VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

УДК 517.5
ББК 22.161.1
С 89

Суетин П. К. **Классические ортогональные многочлены.** — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 480 с. — ISBN 5-9221-0406-3.

В книге излагаются свойства ортогональных многочленов Чебышева, Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общих многочленов Якоби. С доказательствами приводятся асимптотические формулы для этих многочленов и теоремы о разложении функций в ряды Фурье по ним. Рассмотрены применения этих многочленов в вычислительной математике, в математической физике и в некоторых технических науках.

Второе издание — 1979 г.

Для студентов, аспирантов, научных работников и инженеров, специализирующихся в различных областях математики, физики и инженерных наук.

Ил. 16. Библиогр. 131 назв.

ISBN 5-9221-0406-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2005
© П. К. Суетин, 1976, 1979;
с изменениями, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 6
Предисловие к первому изданию 9
Основные обозначения 12

Г л а в а I. **Элементарные свойства общих ортогональных многочленов** 15
§ 1. Теорема существования и первый критерий ортогональности 15
§ 2. Алгебраические свойства ортогональных многочленов 22
§ 3. Нули ортогональных многочленов и второй критерий ортогональности 27
§ 4. Ряды Фурье по ортогональным многочленам 32
§ 5. Неравенство Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам 39
§ 6. Дальнейшие результаты и задачи 43

Г л а в а II. **Общие свойства классических ортогональных многочленов** 52
§ 1. Дифференциальное уравнение Пирсона 52
§ 2. Дифференциальное уравнение для классических ортогональных многочленов 56
§ 3. Обобщенная формула Родрига 60
§ 4. Стандартизация и нормирование классических ортогональных многочленов 66
§ 5. Производящие функции 69
§ 6. Ортогональность производных 74
§ 7. Некоторые дополнения и задачи 78

Г л а в а III. **Многочлены Чебышева** 82
§ 1. Многочлены Чебышева первого рода 82
§ 2. Асимптотические свойства 87
§ 3. Экстремальные свойства 92
§ 4. Ряды Фурье по многочленам Чебышева 95
§ 5. Примеры разложения функций в ряды Фурье–Чебышева . . 101
§ 6. Многочлены Чебышева второго рода 106
§ 7. Некоторые дополнения и задачи 114

Г л а в а IV. **Многочлены Лежандра** 120
§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства 120
§ 2. Интегральные представления и равномерная оценка 128
§ 3. Теорема Сонина и весовая оценка для многочленов Лежандра 131

§ 4. Метод Лиувилля–Стеклова в применении к многочленам Лежандра . . . 134
§ 5. Ряды Фурье по многочленам Лежандра . . . 143
§ 6. Теорема о равносходимости для рядов Фурье–Лежандра . . . 150
§ 7. Примеры разложения функций в ряды Фурье–Лежандра . . . 156
§ 8. Дальнейшие результаты и задачи . . . 161

Глава V. **Многочлены Чебышева–Эрмита** . . . 165
§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства . . . 165
§ 2. Интегральные соотношения . . . 171
§ 3. Метод Лиувилля–Стеклова в применении к многочленам Чебышева–Эрмита . . . 177
§ 4. Ряды Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита . . . 184
§ 5. Примеры разложения функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита . . . 189
§ 6. Некоторые дополнения и задачи . . . 193

Глава VI. **Многочлены Чебышева–Лагерра** . . . 196
§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства . . . 196
§ 2. Интегральные соотношения . . . 205
§ 3. Асимптотические свойства . . . 210
§ 4. Ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра . . . 220
§ 5. Примеры разложения функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра . . . 225
§ 6. Некоторые дополнения и задачи . . . 229

Глава VII. **Многочлены Якоби** . . . 232
§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства . . . 232
§ 2. Производящая функция и дифференциальное уравнение . . . 239
§ 3. Равномерные оценки на сегменте ортогональности . . . 243
§ 4. Асимптотические свойства и весовые оценки . . . 249
§ 5. Ряды Фурье по многочленам Якоби . . . 257
§ 6. Ультрасферические многочлены Гегенбауэра . . . 262
§ 7. Некоторые дополнения и задачи . . . 264

Глава VIII. **Отдельные важные результаты** . . . 269
§ 1. Ортогональные на окружности многочлены . . . 269
§ 2. Главные формулы Сегё в теории ортогональных многочленов 274
§ 3. Теорема Корауса о преобразовании весовой функции . . . 278
§ 4. Формула Кристоффеля . . . 283
§ 5. Ортогональные многочлены дискретного переменного . . . 286
§ 6. Некоторые дополнения и задачи . . . 293

Глава IX. **Ортогональные многочлены в вычислительной математике и в операционном исчислении** . . . 298
§ 1. Интерполирование функций и многочлены Чебышева . . . 298
§ 2. Квадратурные формулы интерполяционно-ортогонального типа Гаусса . . . 306
§ 3. Приближенное дифференцирование по формуле Лагранжа с узлами Чебышева . . . 315

§ 4. Классические ортогональные многочлены в операционном исчислении . . . 320
§ 5. Некоторые дополнения и задачи . . . 325

Глава X. **Ортогональные многочлены в технических науках и в теории вероятностей** . . . 329
§ 1. Радиотехнические фильтры Чебышева . . . 329
§ 2. Многочлены Чебышева–Лагерра в теории автоматического регулирования и управления . . . 333
§ 3. Ортогональные многочлены в математической теории антенн 338
§ 4. Многочлены Чебышева в задачах фазового синтеза математической теории антенн . . . 344
§ 5. Оптимальное расположение дискретных источников в антенных решетках . . . 346
§ 6. Ортогональные на окружности многочлены в обратных задачах теории фильтрации сигналов . . . 351
§ 7. Ортогональные многочлены в теории вероятностей . . . 356
§ 8. Некоторые дополнения и задачи . . . 360

Глава XI. **Ортогональные многочлены в математической физике** . . . 362
§ 1. Присоединенные функции Лежандра и сферические функции 362
§ 2. Шаровые функции и задача Дирихле . . . 368
§ 3. Параболические координаты и многочлены Чебышева–Эрмита 373
§ 4. Гармонический осциллятор и многочлены Чебышева–Эрмита 379
§ 5. Электрон в кулоновом поле и многочлены Чебышева–Лагерра 384
§ 6. Решение неоднородных допустимых дифференциальных уравнений в областях ортогональности . . . 389
§ 7. Некоторые дополнения и задачи . . . 396

Глава XII. **Некоторые результаты из теории приближения функций** . . . 400
§ 1. Модули непрерывности и условия Липшица . . . 400
§ 2. Многочлены наилучшего равномерного приближения . . . 404
§ 3. Теоремы Чебышева об альтернансе . . . 409
§ 4. Сингулярный интеграл Джексона . . . 416
§ 5. Прямые теоремы о наилучших приближениях тригонометрическими полиномами . . . 420
§ 6. Прямые теоремы о наилучших приближениях алгебраическими многочленами . . . 424
§ 7. Поточечные оценки приближения функций алгебраическими многочленами . . . 429
§ 8. Краткий обзор дальнейших результатов . . . 438

Комментарии и дополнения . . . 444
Краткие исторические сведения . . . 458
Цитированная литература . . . 467
Именной указатель . . . 475
Предметный указатель . . . 477

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Издательством «Наука» эта книга была издана дважды в 1976 г. и в 1979 г. С того времени области применения классических ортогональных многочленов значительно расширились и теоретическое значение этих многочленов также возросло.

В качестве характерного примера можно привести книгу О.В. Локуциевского и М.Б. Гаврикова «Начала численного анализа» (Москва, ТОО «Янус», 1995). В этой книге излагается новая концепция численного анализа, основанная на теории приближения функций. При этом первый параграф первой главы называется «Ортогональные многочлены». В этом параграфе кратко излагаются свойства ортогональных многочленов. А далее в тексте книги ортогональные многочлены часто применяются в доказательствах многих результатов вычислительного характера и даже в формулировках некоторых теорем.

Далее, в учебном пособии А.Г. Свешникова, А.Н. Боголюбова и В.В. Кравцова «Лекции по математической физике» (Издательство МГУ, 1993 г.) ортогональным многочленам посвящено два параграфа (более 30 страниц). А затем, как обычно в математической физике, эти многочлены используются при исследовании различных конкретных задач.

Для третьего издания текст книги переработан. Почти все главы и параграфы написаны заново. Изменены и упорядочены некоторые обозначения. Добавлено много нового материала. Значительно дополнен список литературы.

При переработке текста автор придерживался тех же принципов, что и в предыдущих двух изданиях.

1. Книга должна быть пригодной для первоначального изучения теории ортогональных многочленов.

2. Изложение должно быть доступным не только для математиков и физиков, но и для специалистов по техническим наукам, которые занимаются решением практических задач.

3. Объем материала должен быть достаточным для того, чтобы внимательный читатель смог бы начать самостоятельные исследования по теории ортогональных многочленов.

Но в третьем издании имеются некоторые существенные отличия от первых двух.

Во-первых, в конце каждой главы добавлен отдельный параграф, в котором излагаются разные дополнения и замечания к основным параграфам главы, а также дается краткий обзор дальнейших результатов, примыкающих к содержанию данной главы. Это значительно расширяет информацию о свойствах ортогональных многочленов.

Во-вторых, в упомянутых дополнительных параграфах для активизации работы читателей сформулированы разные, старые и новые, нерешенные задачи из теории ортогональных многочленов. Возможно, некоторые из этих задач могут оказаться не совсем удачными, например, слишком трудными, или слишком легкими, или даже кем-то и где-то уже рассмотренными. Эти нерешенные задачи могут повысить интерес читателей к отдельным вопросам теории ортогональных многочленов. Разумеется, в некоторых случаях в связи с конкретной нерешенной задачей у читателя может возникнуть необходимость обращаться и к другим работам по математике. Но автор все-таки надеется, что, размышляя над нерешенными задачами, внимательный читатель испытает удовольствие, даже и не получив конкретного результата.

Схема конструктивной зависимости глав книги позволяет определить, каким образом можно с наименьшими усилиями начинать изучение какой-либо одной системы ортогональных многочленов не-

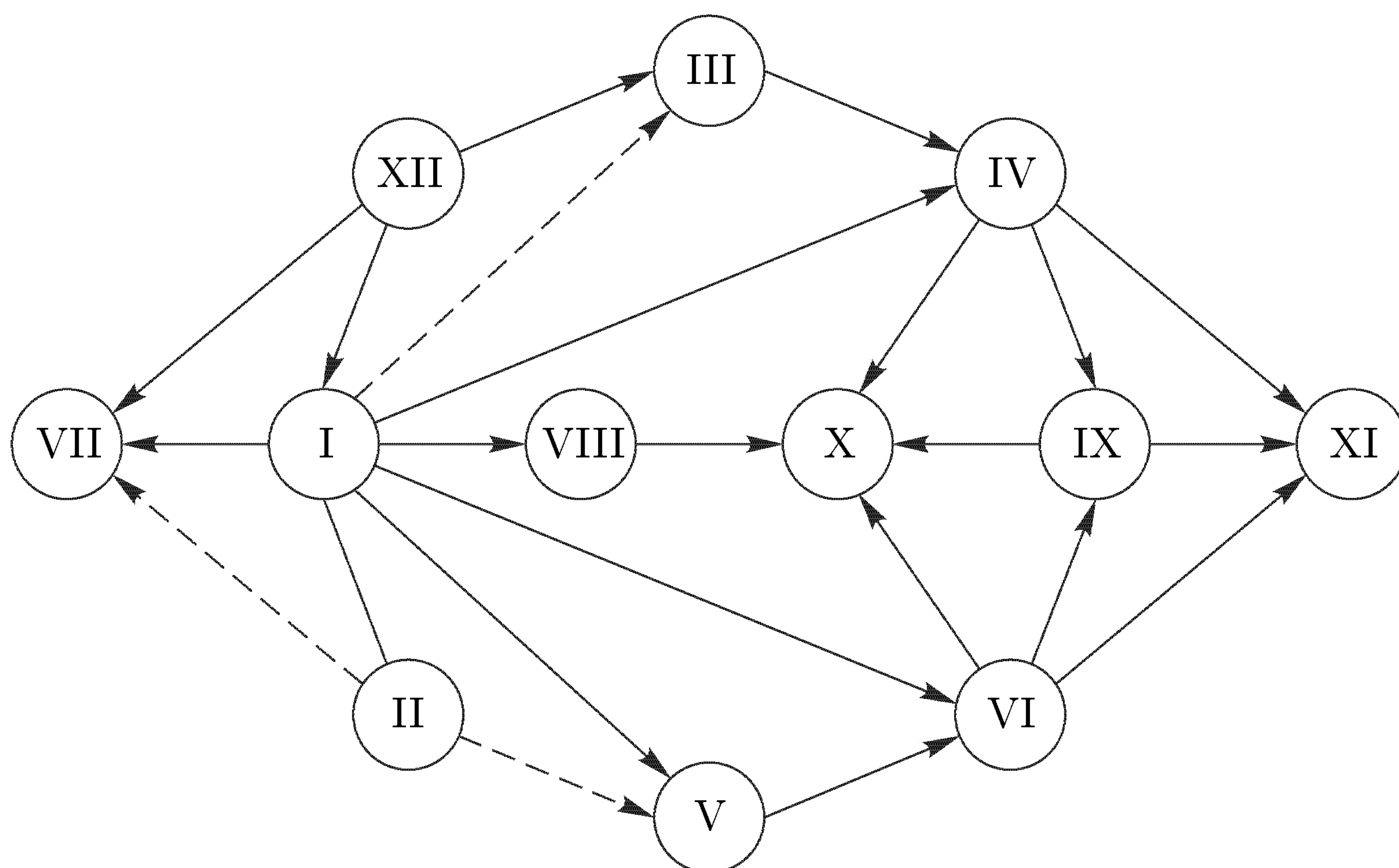


Схема конструктивной зависимости глав книги

зависимо от других систем. Так, например, глава III о многочленах Чебышева и рядах Фурье–Чебышева фактически не зависят даже от содержания главы I. А для изучения многочленов Лежандра и рядов Фурье–Лежандра необходимо усвоить основные определения и теоремы, изложенные в главе I. Аналогичным образом, по отдельности

можно изучать многочлены Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общие многочлены Якоби.

При рассмотрении прикладных вопросов ортогональные многочлены применяются также избирательно — в зависимости от структуры практической задачи. По схеме, самой трудной является глава X, в которой рассматриваются применения ортогональных многочленов в технических науках. Но на самом деле в главе X изложены самые различные задачи технического характера, при рассмотрении каждой из которых применяются лишь отдельные системы ортогональных многочленов.

Как указано в схеме, результаты главы XII применяются в нескольких главах книги. В этой главе рассмотрены основные первоначальные результаты из теории приближения функций. Вообще считается, что теория ортогональных многочленов является частью теории приближения функций. Но во многих книгах по теории ортогональных многочленов результаты из теории приближения функций не применяются. В отличие от этих книг в настоящей книге результаты по теории приближения функций систематически применяются для исследования равномерной сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в случае конечного сегмента ортогональности.

Поскольку XII глава не зависит от других глав книги, она может быть использована для первоначального изучения теории приближения функций.

Аспирант Р.С. Ларионччиков просмотрел рукопись книги и сделал ряд существенных замечаний по тексту. Автор выражает ему глубокую благодарность.

Всем читателям книги автор желает успехов в изучении очень важной и содержательной теории ортогональных многочленов и особенно в применениях этой теории в других математических дисциплинах, а также в физических и технических науках.

Москва, 2003 г. *П.К. Суетин*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В теории ортогональных многочленов отчетливо и ярко выделяется главная ее часть-классические ортогональные многочлены, т. е. многочлены Чебышева, Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общие многочлены Якоби. Как математический аппарат эти многочлены применяются в теоретических исследованиях математиков, в математической физике, в вычислительной математике, в квантовой механике и в прикладной математике. А в последнее время появляются все новые возможности применения классических ортогональных многочленов при решении различных технических задач.

В связи с этим во многих учебных пособиях по высшей математике классическим ортогональным многочленам уделяется все больше внимания. Однако в большинстве случаев этим многочленам посвящаются лишь отдельные главы, в которых излагаются элементарные их свойства и простейшие применения.

Более подробно свойства ортогональных многочленов рассматриваются в монографиях по теории приближения функций. Так, например, в книге И.П. Натансона «Конструктивная теория функций» (Москва, Гостехиздат, 1949 г.) ортогональным многочленам посвящена примерно третья часть всего объема, но, к сожалению, эта книга давно стала библиографической редкостью и, кроме того, изложение в ней, как и во всех монографиях по теории приближений, рассчитано на математиков и не содержит тех вопросов, которые важны для приложений в технических науках.

С другой стороны, классические ортогональные многочлены можно рассматривать как наиболее простые специальные функции математической физики. Поэтому во многих книгах по специальным функциям излагаются свойства многочленов Чебышева, Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общих многочленов Якоби. Однако, как и в вышеупомянутых случаях, ортогональные многочлены в этих книгах не являются основным объектом изучения и многие их свойства излагаются без доказательства, либо вовсе не рассматриваются.

Наиболее полно свойства классических ортогональных многочленов и более общих ортогональных многочленов изложены в известной монографии Г. Сегё «Ортогональные многочлены», впервые издан-

ной в 1939 г. на английском языке. На русском языке монография Г. Сегё была издана в 1962 г. В дополнениях к русскому изданию Я.Л. Геронимус изложил новые результаты по теории ортогональных многочленов, полученные примерно за двадцать лет. Но книга Г. Сегё — научная монография, посвященная общей теории ортогональных многочленов и рассчитанная на специалистов по теории функций.

Автор настоящей книги в течение многих лет читал специальные курсы по теории ортогональных многочленов в Уральском Пединституте (г. Уральск), в Уральском университете (г. Свердловск), в Московском институте электронной техники (г. Зеленоград) и в Московском техническом университете связи и информатики.

Главная цель при написании этой книги заключалась в том, чтобы сделать книгу пригодной для первоначального изучения теории ортогональных многочленов не только для математиков и физиков, но и для специалистов по техническим наукам.

Большое внимание в книге уделяется асимптотическим свойствам классических ортогональных многочленов. С полными доказательствами приведены основные теоремы о разложении функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева, Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и по многочленам Якоби в общем случае. Рассмотрено также много примеров разложения функций в ряды Фурье по указанным системам многочленов.

В отличие от многих учебных пособий, в настоящей книге при изучении условий сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам на всем конечном сегменте ортогональности применяются различные результаты из теории приближения функций. Кроме того, уделяется большое внимание неравенству Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам. Это сделано потому, что с помощью неравенства Лебега во многих случаях легко получаются достаточные условия равномерной сходимости указанных рядов на всем конечном сегменте ортогональности. В связи с этим в книгу включена отдельная глава, в которой излагаются некоторые результаты из теории приближения функций. В результате изложение становится независимым от книг по теории приближения функций, и читатель освобождается от необходимости обращаться к таким книгам.

В книге часто применяется гамма-функция Эйлера. Но из ее многих свойств используются в основном рекуррентная формула и формула удвоения. Несколько раз применяются асимптотические свойства бесселевых функций. Имеется несколько ссылок на известные курсы высшей математики. А в большинстве случаев доказательства автономны, элементарны и доступны пониманию студентов старших курсов даже и технических вузов.

Понятия меры и интеграла Лебега в книге не используются, но это не обедняет книгу для математиков и физиков, ибо главное внимание здесь уделяется конструктивным вопросам, т. е. подробно рассматри-

ваются все основные свойства классических ортогональных многочленов, различные формулы и оценки для них, а также основные методы исследования. А что касается общности результатов, то применение меры и интеграла Лебега позволило бы улучшить изложение лишь в отдельных местах, которые легко увидит внимательный читатель, владеющий этими понятиями.

В некоторых случаях результаты формулируются не в окончательном и не в наилучшем виде. Это делается для того, чтобы не усложнять доказательство, а получить характерный результат простыми способами.

Чтобы облегчить чтение книги и учесть интересы читателей различных специальностей, изложение основных глав книги III–VII сделано независимым между собой. Кроме того, эти основные главы не зависят и от главы II. Поэтому при первоначальном чтении книги читатель может пропустить несколько более трудную главу II.

Список литературы в конце книги содержит наименования тех учебных пособий, книг и отдельных работ, на которые имеются ссылки в тексте. Кроме того, указаны монографии, которые автор использовал при изучении отдельных вопросов.

Еще раз заметим, что настоящая книга предназначена для первоначального изучения теории ортогональных многочленов. Поэтому в книге излагаются, конечно, далеко не все вопросы этой теории.

В каждом параграфе настоящей книги формулы нумеруются автономно, независимо от других параграфов. При ссылке на формулу из другого параграфа данной главы применяется двойная нумерация, первая цифра которой указывает номер параграфа. Аналогично тройной номер применяется в том случае, когда имеется в виду формула из другой главы.

Москва–Зеленоград, 1978 г. *П.К. Суетин*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода.

$U_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода.

$P_n(x)$ — многочлены Лежандра.

$H_n(x)$ — многочлены Чебышева–Эрмита.

$L_n(x;\alpha)$ — многочлены Чебышева–Лагерра.

$P_n(x;\alpha,\beta)$ — стандартизованные многочлены Якоби.

$\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)$ — ортонормированные многочлены Якоби.

$\widetilde{P}_n(x;\alpha,\beta)$ — многочлены Якоби с единичным старшим коэффициентом.

$G_n(x;\lambda)$ — ультрасферические многочлены Гегенбауэра.

$h(x)$ — весовая функция на интервале (a,b) в общем случае (дифференциальный вес).

$B_n(x)$ — ортогональные многочлены в общем случае весовой функции $h(x)$ на интервале (a,b).

$\widehat{B}_n(x)$ — ортонормированные многочлены.

$\widetilde{B}_n(x)$ — ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом.

h_k — степенные моменты весовой функции $h(x)$.

$d\psi(x)$ — интегральная весовая функция (интегральный вес).

C_n^k — биномиальные коэффициенты, т. е.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

$(a)_n$ — символ Похгаммера, т. е. $(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$.

$\Gamma(p)$ — гамма-функция Эйлера.

$B(p,q)$ — бета–функция.

W_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n.

$\widetilde{W}_n$ — множество алгебраических многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом.

$W_n(2\pi)$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n.

$S_n(x; f)$ — частичные суммы ряда Фурье по ортогональным многочленам функции $f(x)$.

$s_n(x; f)$ — частичные суммы тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

$L_n(x; h)$ — функция Лебега ряда Фурье по ортогональным многочленам при весовой функции $h(x)$.

$L_n(h)$ — постоянные Лебега ряда Фурье по ортогональным многочленам при весовой функции $h(x)$.

$J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n.

$Y_n(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка n.

$I_n(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента порядка n.

$\Psi_n(x; m)$ — присоединенная функция Лежандра.

$Y_n(\theta, \phi, m)$ — сферические функции.

$L_n(x; f)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа.

$H_n(x; f)$ — интерполяционный многочлен Эрмита.

$F(x; a, b, c)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

$C[a, b]$ — множество функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$.

$C(2\pi)$ — множество непрерывных периодических функций с периодом 2π.

$\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ на некотором сегменте $[a, b]$.

$\mathrm{Lip}\,\alpha$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α на некотором сегменте $[a, b]$.

$\mathrm{Lip}(\alpha, M)$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α с постоянной M.

$D\,\mathrm{Lip}\,\alpha$ — множество функций, удовлетворяющих условию Дини–Липшица.

$W(p, \alpha)$ — множество функций, непрерывно дифференцируемых p раз на некотором сегменте с условием $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

$W(p, \alpha, 2\pi)$ — множество периодических функций, непрерывно дифференцируемых p раз с условием $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

$L_2[a, b, h]$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на интервале (a, b) с весом $h(x)$.

$L_p[a, b, h]$ — пространство функций, интегрируемых в степени $p \geqslant 1$ на интервале (a, b) с весом $h(x)$.

$E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение порядка n функции $f(x)$ алгебраическими многочленами степени не выше n на некотором сегменте $[a,b]$.

$E_n(f;2\pi)$ — наилучшее равномерное приближение порядка n периодической функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Γ_R — канонический эллипс с фокусами в точках ± 1 и полуосями $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$, $R > 1$.

G_R — каноническая область для сегмента $[-1,1]$, ограниченная каноническим эллипсом Γ_R.

$D_n(x;f)$ — сингулярный интеграл Джексона.

$H_{n,k}(x,y;\alpha)$ — классические многочлены Эрмита по двум переменным.

$A_{n,k}(x,y;\alpha,\beta,\gamma)$ — классические многочлены Аппеля по двум переменным.

Глава I

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 1. Теорема существования и первый критерий ортогональности

Функция $h(x)$ называется *весовой функцией* или просто *весом* на конечном интервале (a, b), если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема и ее интеграл положителен, т. е. если $h(x) \geqslant 0$ и выполняются условия

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx < \infty. \tag{1}$$

Если же интервал (a, b) бесконечен, то, кроме того, должны абсолютно сходиться интегралы

$$h_n = \int_a^b x^n h(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

которые, как известно, и в случае конечного интервала (a, b) называются *степенными моментами* функции $h(x)$.

Пусть дана некоторая последовательность алгебраических многочленов с действительными коэффициентами

$$B_0(x),\ B_1(x),\ B_2(x),\ \ldots,\ B_n(x),\ \ldots, \tag{3}$$

в которой каждый многочлен $B_n(x)$ имеет степень n. Если для любых двух многочленов из этой системы выполняются условия

$$\int_a^b h(x)B_n(x)B_m(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m, \tag{4}$$

то многочлены (3) называются *ортогональными* на интервале (a, b) с весовой функцией $h(x)$. При этом интервал (a, b) называется *интервалом ортогональности*, а в случае, когда оба числа a и b конечны, обычно говорят о *сегменте ортогональности* $[a, b]$.

Система ортогональных многочленов (3) называется *ортонормированной*, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и его норма с весом $h(x)$ равна единице, т. е.

$$||B_n|| = \left[\int_a^b h(x)B_n^2(x)\,dx\right]^{1/2} = 1. \tag{5}$$

Для ортонормированных многочленов обычно применяется специальное обозначение $\{\widehat{B}_n(x)\}$, т. е. вместо общей последовательности (3) вводится специальная последовательность

$$\widehat{B}_0(x),\ \widehat{B}_1(x),\ \widehat{B}_2(x),\ \ldots,\ \widehat{B}_n(x),\ \ldots \tag{6}$$

Для этих многочленов условия (4) и (5) имеют вид

$$\int_a^b h(x)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)\,dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим μ_n старший коэффициент многочлена $\widehat{B}_n(x)$. Тогда формула

$$\widetilde{B}_n(x) = \frac{1}{\mu_n}\,\widehat{B}_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

определяет *ортогональный многочлен* $\widetilde{B}_n(x)$ *с единичным старшим коэффициентом.* В результате имеем еще одну последовательность ортогональных многочленов

$$\widetilde{B}_0(x),\ \widetilde{B}_1(x),\ \widetilde{B}_2(x),\ \ldots,\ \widetilde{B}_n(x),\ \ldots, \tag{9}$$

у каждого из которых старший коэффициент равен единице.

Весовая функция $h(x)$ в большинстве случаев считается непрерывной на интервале (a, b) всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, в окрестностях которых она либо ограничена, либо график ее имеет вертикальные асимптоты. В нуль функция $h(x)$ может обращаться в конечном числе точек или тождественно на некоторых сегментах, расположенных внутри интервала ортогональности (a, b).

Нулем весовой функции $h(x)$ мы будем называть такую точку, в которой эта функция непрерывна и равна нулю.

Регулярными точками весовой функции называются такие точки интервала (a, b), в которых функция $h(x)$ непрерывна и положительна. А *особыми точками* называются все остальные точки и, в частности, нули функции $h(x)$. Разумеется, концы интервала ортогональности (a, b) всегда считаются особыми точками.

Прежде чем доказывать теорему существования системы ортогональных многочленов, установим два вспомогательных элементарных предложения, которые часто будут применяться и в дальнейшем изложении.

Лемма 1.1. *Если в системе $n + 1$ многочленов*

$$F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x) \tag{10}$$

многочлен $F_k(x)$ имеет степень k, то всякий многочлен $Q_n(x)$ степени n можно единственным способом представить в виде

$$Q_n(x) = a_0F_0(x) + a_1F_1(x) + \ldots + a_{n-1}F_{n-1}(x) + a_nF_n(x). \tag{11}$$

Доказательство. Вводя обозначения

$$F_k(x) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)}x + \ldots + b_{k-1}^{(k)}x^{k-1} + b_k^{(k)}x^k, \qquad b_k^{(k)} \neq 0,$$

$$Q_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n, \qquad b_n \neq 0,$$

для определения неизвестных коэффициентов $\{a_k\}$ в формуле (11) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n b_n^{(n)},\\
b_{n-1} &= a_n b_{n-1}^{(n)} + a_{n-1} b_{n-1}^{(n-1)},\\
b_{n-2} &= a_n b_{n-2}^{(n)} + a_{n-1} b_{n-2}^{(n-1)} + a_{n-2} b_{n-2}^{(n-2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_1 &= a_n b_1^{(n)} + a_{n-1} b_1^{(n-1)} + \ldots + a_2 b_1^{(2)} + a_1 b_1^{(1)},\\
b_0 &= a_n b_0^{(n)} + a_{n-1} b_0^{(n-1)} + \ldots + a_1 b_0^{(1)} + a_0 b_0^{(0)}.
\end{aligned}$$

Определитель этой треугольной системы равен произведению отличных от нуля чисел $b_n^{(n)}, b_{n-1}^{(n-1)}, \ldots, b_1^{(1)}, b_0^{(0)}$ и поэтому отличен от нуля. Следовательно, числа $\{a_k\}$ в формуле (11) определяются однозначно. Этим лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Если многочлен $\Phi_m(x)$ степени $m \geqslant 1$ неотрицателен на интервале (a, b), а функция $h(x)$ — весовая функция на этом интервале, то выполняется условие*

$$\int_a^b h(x)\Phi_m(x)\,dx > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала отметим два простых случая, когда утверждение леммы очевидно. Во-первых, если весовая функция $h(x)$ имеет только конечное число особых точек, то вне этих точек, а также вне нулей многочлена $\Phi_m(x)$ произведение $h(x)\Phi_m(x)$ положительно и непрерывно. Поэтому интеграл (12) положителен. Во-вторых, если многочлен $\Phi_m(x)$ положителен на сегменте ортогональности $[a, b]$, то, обозначая через A его минимум на этом сегменте, получим

$$\int_a^b h(x)\Phi_m(x)\,dx \geqslant A\int_a^b h(x)\,dx > 0. \tag{13}$$

В общем случае предположим, что многочлен $\Phi_m(x)$ имеет нули $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ на интервале (a, b). Эти нули четного порядка. Тогда в силу условий (1) интеграл от весовой функции $h(x)$ положителен хотя бы по одному из интервалов

$$(a, \alpha_1),\ (\alpha_1, \alpha_2),\ \ldots,\ (\alpha_p, b). \tag{14}$$

Предположим, что этот интервал конечен. Обозначим его через (α, β). Для этого сегмента имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} h(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx > 0. \tag{15}$$

Следовательно, при малом $\varepsilon > 0$ интеграл от весовой функции $h(x)$ по сегменту $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$ положителен. Но ведь на этом сегменте многочлен $\Phi_m(x)$ не имеет нулей. И его минимум $A(\varepsilon)$ на этом сегменте положителен. Следовательно, аналогично неравенству (13) имеем

$$\int_a^b h(x)\Phi_m(x)\,dx \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} h(x)\Phi_m(x)\,dx \geqslant \\ \geqslant \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} h(x)\Phi_m(x)\,dx \geqslant A(\varepsilon)\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} h(x)\,dx > 0. \tag{16}$$

Если среди интервалов (14) есть бесконечные, то неравенства (15) и (16) видоизменяются незначительно. Если, например, $b = \infty$, то в неравенствах (15) и (16) будет фигурировать интервал $(\alpha_p + \varepsilon, 1/\varepsilon)$ вместо $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$.

Таким образом, лемма 1.2 доказана.

А теперь докажем основную теорему о существовании и единственности системы ортонормированных многочленов, соответствующих данной весовой функции $h(x)$.

Теорема 1.1. *Для всякой весовой функции $h(x)$ на интервале (a, b) существует единственная последовательность многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортонормированности* (7).

Доказательство. Будем доказывать теорему по индукции. Так как $\widehat{B}_0(x) = \mu_0 > 0$, то условие (7) в этом случае имеет вид

$$\int_a^b h(x)[\widehat{B}_0(x)]^2\,dx = \mu_0^2 \int_a^b h(x)\,dx = 1.$$

И в силу условия (1) многочлен $\widehat{B}_0(x)$ определен.

Далее, пусть определены многочлены

$$\widehat{B}_0(x),\ \widehat{B}_1(x),\ \ldots,\ \widehat{B}_{n-1}(x), \tag{17}$$

удовлетворяющие условиям (7). Поскольку каждый многочлен $\widehat{B}_k(x)$ из системы (17) имеет степень точно k, то, добавляя к системе (17) еще многочлен x^n, можно неизвестный нам пока многочлен $\widetilde{B}_n(x)$ в силу

леммы 1.1 единственным способом представить в виде

$$\widetilde{B}_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \widehat{B}_k(x). \tag{18}$$

Здесь числа $\{a_k^{(n)}\}$ надо выбрать так, чтобы многочлен (18) был ортогонален всем многочленам (17), т. е. должны выполняться условия

$$\int_a^b h(x)\widetilde{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)\,dx = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{19}$$

Так как многочлены (17) по индуктивному предположению удовлетворяют условиям ортонормированности (7), то условия (19) в силу формулы (18) приводятся к виду

$$\int_a^b h(x)\left[x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \widehat{B}_k(x)\right]\widehat{B}_m(x)\,dx = \\ = \int_a^b h(x)x^n\widehat{B}_m(x)\,dx + a_m^{(n)} = b_m^{(n)} + a_m^{(n)} = 0,$$

где через $b_m^{(n)}$ обозначен последний интеграл. Поскольку величины $\{b_m^{(n)}\}$ известны, то для выполнения условий (19) достаточно положить $a_m^{(n)} = -b_m^{(n)}$. Остается выбрать старший коэффициент μ_n многочлена $\widehat{B}_n(x)$ так, чтобы выполнялось условие (7) при $n = m$. А это условие приводит к равенству

$$\frac{1}{\mu_n^2} = \int_a^b h(x)\left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n)} \widehat{B}_k(x)\right]^2 dx.$$

В силу леммы 1.2 это равенство определяет положительное число μ_n.

Таким образом, теорема 1.1 доказана.

Последовательность многочленов (6) определяется однозначно и в более общем случае, когда весовая функция $h(x)$ лишь суммируема на интервале (a, b), т. е. интегрируема по Лебегу, и не эквивалентна нулю. Более того, вместо *дифференциального веса* $h(x)$ можно рассматривать так называемый *интегральный вес* $d\psi(x)$, где $\psi(x)$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста. В этом случае вместо (1) и (7) имеем условия

$$0 < \int_a^b d\psi(x) < \infty,$$

$$\int\limits_a^b \widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)d\psi(x) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

В этих формулах имеется в виду интеграл Лебега–Стилтьеса.

Рассмотрим теперь некоторое необходимое и достаточное условие ортогональности, которое называется *первым критерием ортогональности.*

Т е о р е м а 1.2. *Для того чтобы многочлен $B_n(x)$ степени n был ортогональным с весом $h(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого многочлена $Q_m(x)$ степени $m < n$ выполнялось условие*

$$\int\limits_a^b h(x)B_n(x)Q_m(x)\,dx = 0, \qquad m < n, \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть многочлен $B_n(x)$ является ортогональным с весом $h(x)$ на интервале (a, b), т. е. этот многочлен входит в систему многочленов $\{B_k(x)\}$, ортогональных с весом $h(x)$ на интервале (a, b). Тогда по лемме 1.1 для произвольного многочлена $Q_m(x)$ степени $m < n$ имеем разложение

$$Q_m(x) = a_0B_0(x) + a_1B_1(x) + \ldots + a_mB_m(x).$$

Подставляя это разложение под знак интеграла (20), в силу ортогональности многочлена $B_n(x)$ получаем равенство (20). Этим необходимость условия (20) доказана.

Пусть, наоборот, дана весовая функция $h(x)$ и для некоторого многочлена $B_n(x)$ степени n выполняется условие (20) при любых многочленах $Q_m(x)$. Тогда по весовой функции $h(x)$ однозначно определяется система ортонормированных многочленов $\{\widehat{B}_k(x)\}$, и в формуле (20) вместо $Q_m(x)$ можно поставить многочлен $\widehat{B}_m(x)$ при $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Но из доказательства теоремы существования (теорема 1.1) при известной системе многочленов (17) однозначно определяется многочлен $\widetilde{B}_n(x)$, ортогональный всем многочленам (17). Следовательно, заранее заданный многочлен $B_n(x)$, удовлетворяющий условию (20), только множителем может отличаться от многочлена $\widetilde{B}_n(x)$. А именно это и утверждается в достаточности условий (20).

Таким образом, теорема 1.2 доказана.

Т е о р е м а 1.3. *Если интервал ортогональности симметричен относительно начала координат, а весовая функция $h(x)$ четная, то каждый ортогональный многочлен $B_n(x)$ содержит только те степени x, которые имеют одинаковую с номером n четность, т. е. имеет место тождество*

$$B_n(-x) \equiv (-1)^n B_n(x). \tag{21}$$

Иными словами, если n — четное число, то ортогональный многочлен $B_n(x)$ содержит только четные степени x. А если n — нечетное число, то многочлен $B_n(x)$ содержит только нечетные степени x.

Доказательство. Ввиду симметричности интервала ортогональности условия (20) имеют вид

$$\int_{-a}^{a} h(x)B_n(x)Q_m(x)\,dx = 0, \qquad m < n. \tag{22}$$

В этой формуле полагаем $x = -t$. Тогда в силу четности функции $h(x)$ условия (22) приводятся к виду

$$\int_{-a}^{a} h(t)B_n(-t)Q_m(-t)\,dt = 0, \qquad m < n. \tag{23}$$

Поскольку $Q_m(x)$ — произвольный многочлен степени m, то $Q_m(-t)$ тоже есть произвольный многочлен степени m. Следовательно, по первому критерию ортогональности многочлен $B_n(-x)$ — ортогональный многочлен относительно весовой функции $h(x)$. Следовательно, многочлены $B_n(x)$ и $B_n(-x)$ могут отличаться только множителем, т. е. имеем $B_n(-x) = a_n B_n(x)$. Но если рассматривать только ортонормированные многочлены, то получим условие $|a_n| = 1$. Наконец, сравнивая старшие коэффициенты этих двух многочленов, находим $a_n = (-1)^n$. Этим тождество (21) доказано.

Итак, по теореме существования и единственности (по теореме 1.1) всякая весовая функция $h(x)$ и интервал ортогональности (a, b) однозначно определяют систему ортонормированных многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$, удовлетворяющих условию (7). Но среди всевозможных систем наиболее важное теоретическое, а также и прикладное значение имеют так называемые *классические ортогональные многочлены*. Рассмотрим определения и обозначения этих систем.

1. *Многочлены Чебышева первого рода* $\{T_n(x)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in (-1, 1). \tag{24}$$

2. *Многочлены Чебышева второго рода* $\{U_n(x)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весом

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{25}$$

3. *Многочлены Лежандра* $\{P_n(x)\}$, ортогональные на том же сегменте $[-1, 1]$ с весом $h(x) \equiv 1$.

4. *Многочлены Якоби* $\{P_n(x; \alpha, \beta)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}, \qquad x \in (-1, 1), \tag{26}$$

где параметры удовлетворяют условиям

$$\alpha > -1, \qquad \beta > -1. \tag{27}$$

5. *Ультрасферические многочлены Гегенбауэра* $\{P_n(x;\alpha)\}$, ортогональные на сегменте $[-1,1]$ с весовой функцией

$$h(x) = (1-x^2)^\alpha, \qquad x \in (-1,1), \quad \alpha > -1. \tag{28}$$

Многочлены Чебышева первого и второго рода, а также многочлены Лежандра являются частными случаями многочленов Гегенбауэра. Поэтому, сравнивая формулы (24), (25) и (28), находим

$$T_n(x) = P_n\Big(x; -\frac{1}{2}\Big), \quad U_n(x) = P_n\Big(x; \frac{1}{2}\Big), \quad P_n(x) = P_n(x;0). \tag{29}$$

6. *Многочлены Чебышева–Эрмита* $\{H_n(x)\}$, ортогональные на всей оси с весовой функцией

$$h(x) = e^{-x^2}, \qquad x \in (-\infty, +\infty). \tag{30}$$

7. *Многочлены Чебышева–Лагерра* $\{L_n(x;\alpha)\}$, ортогональные на полуоси с весовой функцией

$$h(x) = x^\alpha e^{-x}, \qquad x \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1. \tag{31}$$

Еще раз заметим, что все эти системы ортогональных многочленов называются классическими ортогональными многочленами. При этом существенно различных классов в этом множестве многочленов только три: многочлены Якоби, многочлены Чебышева–Эрмита и многочлены Чебышева–Лагерра.

§ 2. Алгебраические свойства ортогональных многочленов

В настоящем параграфе рассматриваются основные алгебраические свойства ортогональных многочленов: трехчленная рекуррентная формула, формула Кристоффеля–Дарбу и представление через моменты весовой функции.

Теорема 1.4. *Для любых трех соседних ортонормированных многочленов справедлива трехчленная рекуррентная формула*

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\,\widehat{B}_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\widehat{B}_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\,\widehat{B}_{n-1}(x). \tag{1}$$

Доказательство. В силу леммы 1.1 имеем разложение

$$x\widehat{B}_n(x) = a_0\widehat{B}_0(x) + a_1\widehat{B}_1(x) + \ldots + a_n\widehat{B}_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\,\widehat{B}_{n+1}(x). \tag{2}$$

При $k < n-1$ умножим равенство (2) на $h(x)\widehat{B}_k(x)$ и проинтегрируем по интервалу (a,b). Поскольку $x\widehat{B}_k(x)$ есть многочлен степени $k+1$,

причем $k+1<n$, то в силу теоремы 1.2 левая часть равенства (2) после интегрирования обращается в нуль. В результате имеем равенства

$$a_k \int\limits_a^b h(x)\widehat{B}_k^2(x)\,dx = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,n-2.$$

Следовательно, в разложении (2) первые $n-1$ коэффициентов равны нулю, и это равенство приводится к виду

$$x\widehat{B}_n(x) = a_{n-1}\widehat{B}_{n-1}(x) + a_n\widehat{B}_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\,\widehat{B}_{n+1}(x). \tag{3}$$

Для определения коэффициента a_{n-1} умножаем равенство (3) на $h(x)\widehat{B}_{n-1}(x)$ и интегрируем по (a,b). В результате имеем

$$a_{n-1} = \int\limits_a^b h(x)x\widehat{B}_{n-1}(x)\widehat{B}_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\int\limits_a^b h(x)[\mu_n x^n + \ldots]\,\widehat{B}_n(x)\,dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

Переобозначая теперь $a_n = \alpha_n$, из (3) находим формулу (1).

Теорема 1.4 доказана.

Рекуррентную формулу (1) можно записать в более удобной форме

$$\lambda_n\widehat{B}_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\widehat{B}_n(x) - \lambda_{n-1}\widehat{B}_{n-1}(x), \tag{4}$$

где для краткости введено обозначение

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}, \qquad n = 0,1,\ldots \tag{5}$$

В некоторых частных случаях последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ легко определяются, и тогда ортогональные многочлены $\{\widehat{B}_n(x)\}$ можно вычислять последовательно.

В формуле (4) можно перейти к ортогональным многочленам с единичным старшим коэффициентом. В самом деле, разделим равенство (4) на μ_n. В результате, учитывая формулу (5), получим

$$\widetilde{B}_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\widetilde{B}_n(x) - \frac{\mu_{n-1}^2}{\mu_n^2}\,\widetilde{B}_{n-1}(x), \tag{6}$$

Л е м м а 1.3. *В случае конечного сегмента ортогональности* $[a,b]$ *последовательность* $\{\lambda_n\}$ *ограничена, причем имеет место неравенство*

$$0 < \lambda_n \leqslant \lambda = \max\{|a|,|b|\}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из очевидного равенства

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \int\limits_a^b h(x)x\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n+1}(x)\,dx, \tag{8}$$

применяя неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\lambda_n^2 \leqslant \int\limits_a^b h(x)x^2 \widehat{B}_n^2(x)\,dx \int\limits_a^b h(x)\widehat{B}_{n+1}^2(x)\,dx. \qquad (9)$$

В первом интеграле величина x^2 не превосходит λ^2, где λ определяется равенством (7). После вынесения множителя λ^2 первый интеграл как и второй в равенстве (9) становится равным единице. Этим лемма 1.3 доказана.

А теперь докажем очень важную формулу Кристоффеля–Дарбу.

Теорема 1.5. *Для ортонормированных многочленов имеет место формула Кристоффеля–Дарбу*

$$\sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(t) = \lambda_n \frac{\widehat{B}_{n+1}(x)\widehat{B}_n(t) - \widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n+1}(t)}{x-t}. \qquad (10)$$

Доказательство. Умножим равенство (4) на $\widehat{B}_n(t)$. Получим

$$\lambda_n\widehat{B}_{n+1}(x)\widehat{B}_n(t) = (x-\alpha_n)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_n(t) - \lambda_{n-1}\widehat{B}_{n-1}(x)\widehat{B}_n(t).$$

Меняя местами x и t, находим

$$\lambda_n\widehat{B}_{n+1}(t)\widehat{B}_n(x) = (t-\alpha_n)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_n(t) - \lambda_{n-1}\widehat{B}_{n-1}(t)\widehat{B}_n(x).$$

Затем вычитаем почленно из первого равенства второе. В результате имеем

$$(x-t)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_n(t) = \lambda_n[\widehat{B}_{n+1}(x)\widehat{B}_n(t) - \widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n+1}(t)] - \\ - \lambda_{n-1}[\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n-1}(t) - \widehat{B}_{n-1}(x)\widehat{B}_n(t)]. \qquad (11)$$

Это равенство можно написать для номеров $n, n-1, \ldots, 2, 1$. При $n = 0$ имеем очевидное равенство

$$(x-t)\widehat{B}_0(x)\widehat{B}_0(t) = \mu_0^2(x-t) = \lambda_0[\widehat{B}_1(x)\widehat{B}_0(t) - \widehat{B}_1(t)\widehat{B}_0(x)]. \qquad (12)$$

Суммируя все равенства (11) при $n, n-1, \ldots, 2, 1$ и равенство (12), получим формулу Кристоффеля–Дарбу (10). Этим теорема 1.5 доказана.

А теперь переходим к выводу формулы, представляющей ортогональные многочлены через моменты весовой функции $\{h_m\}$, которые определены формулой (1.2). Для этого необходимо рассмотреть *определитель Грама*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} & \ldots & h_{2n} \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Докажем, что этот определитель отличен от нуля. Допустим противное, что $\Delta_n = 0$. Тогда система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} h_0 b_0 + h_1 b_1 + \ldots + h_n b_n &= 0, \\ h_1 b_0 + h_2 b_1 + \ldots + h_{n+1} b_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n b_0 + h_{n+1} b_1 + \ldots + h_{2n} b_n &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

имеет хотя бы одно нетривиальное решение, т. е. существует система чисел $\{b_k\}_0^n$, в которой хотя бы одно число отлично от нуля и которая является решением системы (14). Для этих чисел с помощью формулы (1.2) систему (14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\int_a^b h(x)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)\, dx = 0, \\ &\int_a^b h(x)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)\, x\, dx = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\int_a^b h(x)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)\, x^n\, dx = 0. \end{aligned}$$

Умножим первое из этих равенств на b_0, второе на b_1 и т. д., последнее равенство умножим на b_n и сложим все полученные равенства почленно. В результате получим

$$\int_a^b h(x)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)^2\, dx = 0.$$

Но в силу леммы 1.2 это равенство невозможно, ибо здесь хотя бы одно из чисел $\{b_k\}_0^n$ отлично от нуля. Таким образом, определитель Грама (13) отличен от нуля при любом n.

Т е о р е м а 1.6. *Для ортонормированных многочленов при* $n \geqslant 1$ *имеет место представление через моменты весовой функции*

$$\widehat{B}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \ldots & h_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Докажем, что этот многочлен ортогонален с весом $h(x)$ на интервале (a, b). В самом деле, умножим равенство (16) почленно на $h(x)x^k$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$ и проинтегрируем по интервалу (a, b). В результате этого в силу формулы (1.2) справа получится определитель с двумя одинаковыми строками. Следовательно, имеем равенства

$$\int_a^b h(x)x^k Q_n(x)\,dx = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из этих равенств нетрудно получить условие

$$\int_a^b h(x)Q_n(x)F_m(x)\,dx = 0, \qquad m < n,$$

где $F_m(x)$ — произвольный многочлен степени $m < n$. А из этого условия на основании теоремы 1.2 находим, что многочлен $Q_n(x)$ только множителем может отличаться от ортогонального многочлена $\widehat{B}_n(x)$.

Подсчитаем весовую норму многочлена (16). Используя ортогональность, находим

$$\|Q_n\|^2 = \int_a^b h(x)Q_n^2(x)\,dx = \int_a^b h(x)Q_n(x)[\Delta_{n-1}x^n]\,dx =$$
$$= \Delta_{n-1}\int_a^b h(x)Q_n(x)x^n\,dx = \Delta_{n-1}\Delta_n > 0. \tag{17}$$

Так как $\Delta_0 = h_0 > 0$, то имеем $\Delta_n > 0$ при любом n. А для перехода к ортонормированному многочлену необходимо многочлен $Q_n(x)$ разделить на его весовую норму $\|Q_n\|$. Следовательно, из формулы (17) находим формулу (15). И теорема 1.6 доказана.

Из формулы (15) следует, что для старшего коэффициента μ_n ортонормированного многочлена $\widehat{B}_n(x)$ справедлива формула

$$\mu_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}. \tag{18}$$

Из формулы (5) находим представление коэффициента λ_n из рекуррентной формулы Кристоффеля–Дарбу

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}}{\Delta_n}. \tag{19}$$

Полагая по определению $\Delta_{-1} = 1$, можно считать формулы (18) и (19) распространенными и на случай $n = 0$.

§ 3. Нули ортогональных многочленов и второй критерий ортогональности

Как известно, ортогональные многочлены широко применяются в различных вычислительных процессах: в интерполировании функций, в квадратурных формулах, при приближенном дифференцировании. Это объясняется главным образом замечательными свойствами нулей ортогональных многочленов.

Теорема 1.7. *Все нули ортогонального многочлена $\widehat{B}_n(x)$ действительны, различны и расположены на интервале (a, b).*

Доказательство. Достаточно показать, что многочлен $\widehat{B}_n(x)$ в интервале (a, b) меняет знак n раз. Допустим противное, что многочлен $B_n(x)$ меняет знак в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, где $m < n$. Тогда многочлен

$$Q_m(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_m)$$

тоже меняет знак в тех же самых точках. Следовательно, произведение $\widehat{B}_n(x)Q_m(x)$ сохраняет знак на интервале (a, b). Если это произведение неотрицательно, то, полагая $\Phi_{n+m}(x) = \widehat{B}_n(x)Q_m(x)$, в силу леммы 1.2 находим

$$\int_a^b h(x)\widehat{B}_n(x)Q_m(x)\,dx > 0. \tag{1}$$

А если $\widehat{B}_n(x)Q_m(x) \leqslant 0$, то можно положить

$$\Phi_{n+m}(x) = -\widehat{B}_n(x)Q_m(x),$$

и интеграл (1) также будет отличен от нуля. Но, с другой стороны, по теореме 1.2 при условии $m < n$ этот интеграл обязательно равен нулю. Этого противоречия не будет, если считать $m = n$. Таким образом, теорема 1.7 доказана.

В силу доказанной теоремы для нулей $\{x_k^{(n)}\}$ ортогонального многочлена $\widehat{B}_n(x)$ имеют место неравенства

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_k^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < b. \tag{2}$$

Так как старший коэффициент μ_n ортогонального многочлена $\widehat{B}_n(x)$ положителен, то при любом n имеем

$$\widehat{B}_n(b) > 0. \tag{3}$$

Аналогично для левого конца сегмента ортогональности справедливы неравенства

$$\widehat{B}_{2m}(a) > 0, \qquad \widehat{B}_{2m+1}(a) < 0. \tag{4}$$

Далее, из рекуррентной формулы (2.1) легко получаются два простых утверждения о нулях ортогональных многочленов.

Лемма 1.4. *При любом n два соседних многочлена, $\widehat{B}_n(x)$ и $\widehat{B}_{n+1}(x)$, не могут иметь общих нулей.*

Доказательство. Допустим противное, что эти многочлены имеют общий нуль x_0. Тогда из рекуррентной формулы (2.1) следует, что точка x_0 является нулем и многочлена $\widehat{B}_{n-1}(x)$. Рассуждая аналогично, придем к равенствам

$$\widehat{B}_{n-2}(x_0) = 0, \ \ldots, \ \widehat{B}_1(x_0) = 0, \ \widehat{B}_0(x_0) = 0.$$

Но последнее равенство невозможно. Этим лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Если $x_k^{(n)}$ есть нуль многочлена $\widehat{B}_n(x)$, то многочлены $\widehat{B}_{n+1}(x)$ и $\widehat{B}_{n-1}(x)$ имеют в точке $x_k^{(n)}$ значения разных знаков.*

Доказательство. В самом деле, из рекуррентной формулы (2.1) имеем

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \widehat{B}_{n+1}(x_k^{(n)}) = -\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \widehat{B}_{n-1}(x_k^{(n)}). \tag{5}$$

Поскольку $\mu_n > 0$ при любом n, то лемма 1.5 доказана.

Теорема 1.8. *Для нулей двух соседних ортогональных многочленов, $\widehat{B}_n(x)$ и $\widehat{B}_{n+1}(x)$, имеют место неравенства*

$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < \ldots < x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n+1)} < x_{k+1}^{(n)} < \ldots$$
$$\ldots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n+1)} < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b. \tag{6}$$

Доказательство. Так как $\widehat{B}_0(x_1^{(1)}) > 0$, то $\widehat{B}_2(x_1^{(1)}) < 0$ в силу равенства (5). Поэтому, учитывая (3) и (4), находим, что на концах интервалов $(a, x_1^{(1)})$ и $(x_1^{(1)}, b)$ многочлен $\widehat{B}_2(x)$ имеет значения разных знаков. Следовательно, внутри каждого из этих интервалов многочлен $\widehat{B}_2(x)$ имеет по одному нулю. И для $n = 1$ теорема доказана.

Допустим теперь, что неравенство (6) справедливо. Для обоснования индукции от n к $n+1$ достаточно доказать, что многочлен $\widehat{B}_{n+2}(x)$ имеет нули в каждом из интервалов

$$(a, x_1^{(n+1)}), \ (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}), \ \ldots, \ (x_k^{(n+1)}, x_{k+1}^{(n+1)}), \ \ldots, \ (x_{n+1}^{(n+1)}, b). \tag{7}$$

В силу (4) и (5) многочлены $\widehat{B}_{n+2}(x)$ и $\widehat{B}_n(x)$ имеют значения одинаковых знаков в точке a и разных в точке $x_1^{(n+1)}$. Но многочлен $\widehat{B}_n(x)$

в силу (6) не имеет нулей в интервале $(a, x_1^{(n+1)})$. Следовательно, многочлен $\widehat{B}_{n+2}(x)$ на концах сегмента $[a, x_1^{(n+1)}]$ имеет значения разных знаков, и внутри этого сегмента у него есть по крайней мере один нуль. Аналогично доказывается существование нуля многочлена $\widehat{B}_{n+2}(x)$ в последнем из интервалов (7).

Далее, в силу (6) многочлен $\widehat{B}_n(x)$ имеет в интервале $(x_k^{(n+1)}, x_{k+1}^{(n+1)})$ один простой нуль, а на концах — значения разных знаков. Поэтому по лемме 1.5 многочлен $\widehat{B}_{n+2}(x)$ имеет в точках $x_k^{(n+1)}$ и $x_{k+1}^{(n+1)}$ значения разных знаков. Следовательно, внутри этого интервала он обращается в нуль хотя бы один раз. Таким образом, многочлен $\widehat{B}_{n+2}(x)$ имеет в каждом из $n+2$ интервалов (7) по одному нулю. Этим теорема 1.8 доказана.

Если интервал ортогональности бесконечен, то в формулах (6) и (7) можно соответствующим образом выбрать конкретные числа a и b. И все рассуждения сохраняются.

Неравенство (6) свидетельствует о *взаимном разделении нулей* двух соседних ортогональных многочленов. Иногда для характеристики этого свойства говорят, что *нули многочленов* $\widehat{B}_n(x)$ *и* $\widehat{B}_{n+1}(x)$ *перемежаются.* А теорема 1.8 называется теоремой о *взаимном разделении нулей* ортогональных многочленов.

А теперь рассмотрим одно очень важное экстремальное свойство ортогональных многочленов, которое является характеристическим и часто называется *вторым критерием ортогональности.*

Обозначим через $\widetilde{W}_n$ множество всех алгебраических многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом, и рассмотрим задачу о минимизации интеграла

$$A(\widetilde{Q}_n) = \int_a^b h(x)|\widetilde{Q}_n(x)|^2\,dx \tag{8}$$

на множестве $\widetilde{W}_n$.

Т е о р е м а 1.9. *Минимум интеграла* (8) *в классе многочленов* $\widetilde{W}_n$ *достигается тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{Q}_n(x) \equiv \widetilde{B}_n(x) \equiv \frac{1}{\mu_n}\,\widehat{B}_n(x), \tag{9}$$

причем этот минимум равен $1/\mu_n^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку всякий многочлен $\widetilde{Q}_n(x)$ из класса $\widetilde{W}_n$ имеет единичный старший коэффициент, то для него справедливо разложение

$$\widetilde{Q}_n(x) = c_0\widehat{B}_0(x) + c_1\widehat{B}_1(x) + \ldots + c_{n-1}\widehat{B}_{n-1}(x) + \frac{1}{\mu_n}\,\widehat{B}_n(x). \tag{10}$$

Подставляя это разложение в формулу (8), находим

$$A(\widetilde{Q}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 + \frac{1}{\mu_n^2} \geqslant \frac{1}{\mu_n^2}.$$

Следовательно, минимум интеграла (8) достигается тогда и только тогда, когда $c_k \equiv 0$. И теорема 1.9 доказана.

Таким образом, при любом $\widetilde{Q}_n(x) \in \widetilde{W}_n$ имеем неравенство

$$\frac{1}{\mu_n^2} = \int_a^b h(x)|\widetilde{B}_n(x)|^2\,dx \leqslant \int_a^b h(x)|\widetilde{Q}_n(x)|^2\,dx. \tag{11}$$

Это характеристическое экстремальное свойство ортогонального многочлена $\widetilde{B}_n(x)$ с единичным старшим коэффициентом несколько проясняет вопрос о том, почему все нули ортогонального многочлена расположены на интервале ортогональности.

В самом деле, интеграл из формулы (8) геометрически означает площадь криволинейной трапеции, верхняя сторона которой определяется уравнением

$$y = h(x)|\widetilde{Q}_n(x)|^2, \qquad x \in (a,b). \tag{12}$$

А эта площадь будет минимальной в том случае, когда график функции (12) минимально уклоняется от оси x. Но поскольку весовая функция $h(x)$ фиксирована, то минимизация площади может достигаться тогда, когда все нули многочлена $\widetilde{Q}_n(x)$ располагаются на интервале (a,b). Иными словами, обращаясь в нуль в n точках внутри интервала (a,b), ортогональный многочлен $\widetilde{B}_n(x)$ как бы подтягивает график функции $y = h(x)$ сверху к оси x и делает площадь криволинейной трапеции минимальной.

Более того, на основе неравенства (11) и формулы (12) можно высказать некоторые наводящие соображения о свойствах последовательности ортонормированных многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$ в различных точках интервала ортогональности в зависимости от свойств в этих точках весовой функции $h(x)$.

Допустим, что точка ξ_1 есть нуль весовой функции $h(x)$, т. е. в этой точке функция $h(x)$ непрерывна и $h(\xi_1) = 0$. Тогда график функции $y = h(x)$ в окрестности точки ξ_1 близок к оси x. Следовательно, минимизирующим площадь будет тот многочлен, который имеет нули вдали от точки ξ_1, т. е. тот многочлен, который подтягивает график весовой функции к оси x вне точки ξ_1, а в самой точке ξ_1 этот многочлен может принимать, вообще говоря, даже и бо́льшие по абсолютной величине значения, ибо в любом случае график функции (12) в окрестности точки ξ_1 будет мало уклоняться от нуля (рис. 1.1). Отсюда следует предположение, что последовательность $\{\widehat{B}_n(x)\}$ не

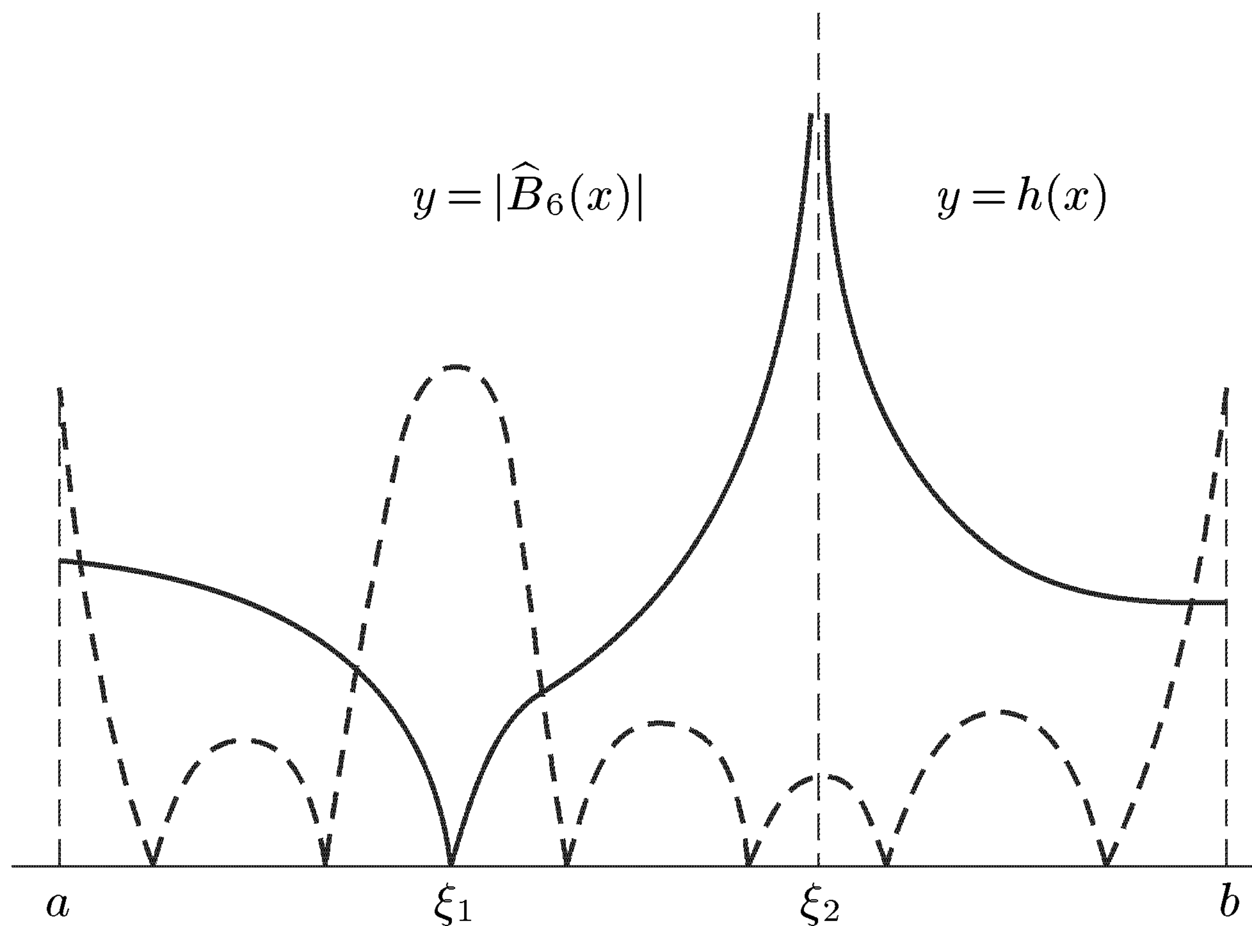


Рис. 1.1

может быть ограниченной в нуле весовой функции, т. е. имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\widehat{B}_n(\xi_1)| = +\infty. \tag{13}$$

Здесь имеется в виду верхний предел числовой последовательности.

Далее предположим, что в точке ξ_2 весовая функция имеет двустороннюю вертикальную асимптоту, т. е. выполняется условие

$$\lim_{x\to\xi_2} h(x) = +\infty. \tag{14}$$

Тогда для минимизации площади вышеуказанной криволинейной трапеции минимизирующий многочлен должен иметь по крайней мере один нуль вблизи точки ξ_2 или даже в самой точке ξ_2, чтобы ослабить или даже вовсе ликвидировать бесконечный изгиб вверх графика функции $y = h(x)$. Отсюда следует предположение

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{B}_n(\xi_2) = 0. \tag{15}$$

Эти два случая являются противоположными в том смысле, что в первом из них $h(\xi_1) = 0$, а во втором $h(\xi_2) = \infty$. Вместе с тем эти два случая исключительные в том смысле, что обе точки ξ_1 и ξ_2 суть нерегулярные точки весовой функции $h(x)$.

Если ξ_3 — регулярная точка весовой функции, т. е. в этой точке весовая функция непрерывна и положительна, то естественно предположить выполнение некоторого среднего между (13) и (15) условия в поведении последовательности $\{\widehat{B}_n(x)\}$. Таким условием оказывается ограниченность этой последовательности в точке ξ_3, т. е. выполнение неравенства

$$|\widehat{B}_n(\xi_3)| \leqslant M. \tag{16}$$

Это неравенство очень важно при исследовании условий сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам.

Все три предположения (13), (15) и (16) действительно имеют место, если точки ξ_1, ξ_2 и ξ_3 суть внутренние точки интервала ортогональности, а весовая функция $h(x)$ в окрестности этих точек удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, но доказательства этих утверждений весьма громоздки.

Рассмотрим теперь линейные преобразования сегмента ортогональности.

Теорема 1.10. *Если многочлены $\{\widehat{B}_n(x)\}$ ортонормированы с весом $h(x)$ на сегменте $[a,b]$, то при $p>0$ многочлены*

$$\widehat{Q}_n(t)=\sqrt{p}\,\widehat{B}_n(pt+q),\qquad n=0,1,2,\ldots,\tag{17}$$

ортонормированы с весом $h(pt+q)$ на сегменте $[A,B]$, который переходит в сегмент $[a,b]$ в результате линейного преобразования $x=$ $=pt+q$.

Доказательство. В самом деле, считая числа p и q фиксированными, причем $p>0$, имеем равенство

$$\int\limits_A^B h(pt+q)\widehat{Q}_n(t)\widehat{Q}_m(t)\,dt=p\int\limits_A^B h(pt+q)\widehat{B}_n(pt+q)\widehat{B}_m(pt+q)\,dt=$$
$$=\int\limits_a^b h(x)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)\,dx=\delta_{nm}.$$

Этим теорема 1.10 доказана.

Можно рассматривать случай, когда в формуле $x=pt+q$ число p отрицательно. Тогда вместо (17) получим формулу

$$\widehat{Q}_n(t)=(\operatorname{sign}p)^n|p|^{1/2}\widehat{B}_n(pt+q),\qquad n=0,1,2,\ldots,\tag{18}$$

которая справедлива и при положительном p.

Из формул (17) и (18) следует, что при линейном преобразовании $x=pt+q$ свойства последовательности ортонормированных многочленов в соответственных точках сегмента ортогональности не изменяются. Поэтому для выяснения качественной картины обычно сначала рассматривают стандартный сегмент $[-1,1]$, а затем полученные результаты распространяют на любой другой конечный сегмент.

§ 4. Ряды Фурье по ортогональным многочленам

Путь функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) и ее квадрат интегрируем с весом $h(x)$ по этому интервалу. Как обычно, множество таких функций будем обозначать через $L_2[a,b;h(x)]$ или иногда более

коротко через L_2. Таким образом, в настоящем параграфе рассматривается пространство функций

$$L_2 = L_2[a, b; h(x)]. \tag{1}$$

Всякой функции из этого класса ставится в соответствие весовая норма

$$\|f\| = \left[\int_a^b h(x) f^2(x)\, dx \right]^{1/2}. \tag{2}$$

Для каждой функции из пространства (1) можно определить коэффициенты Фурье по ортогональным многочленам

$$a_n = \int_a^b h(t) f(t) \widehat{B}_n(t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

В результате получаем ряд Фурье по ортогональным многочленам

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{B}_n(x). \tag{4}$$

Как и у всяких ортогональных рядов частичные суммы ряда (4) являются в некотором смысле наилучшими приближениями функции $f(x)$ в метрике пространства (1).

В самом деле, для произвольного многочлена степени n

$$Q_n(x) = c_0 \widehat{B}_0(x) + c_1 \widehat{B}_1(x) + \ldots + c_n \widehat{B}_n(x), \tag{5}$$

как обычно, имеем

$$\begin{aligned}
\|f - Q_n\|^2 &= \int_a^b h(x)[f(x) - Q_n(x)]^2\, dx = \\
&= \int_a^b h(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \widehat{B}_k(x) \right] \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \widehat{B}_k(x) \right] dx = \\
&= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^{n} c_k a_k + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (c_k - a_k)^2 \geqslant \\
&\geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

В частности, для частичных сумм ряда (4)

$$S_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{B}_k(x) \tag{7}$$

получается равенство

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{8}$$

Сравнивая (6) и (8), находим

$$\|f - S_n\| \leqslant \|f - Q_n\|. \tag{9}$$

Таким образом, при каждом n частичная сумма (7) дает наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства (1) по сравнению со всеми многочленами (5) степени n.

Далее, поскольку правая часть (8) неотрицательна, то имеем неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{10}$$

из которого следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{11}$$

Еще раз заметим, что все вышеперечисленное справедливо для любой функции $f(x)$ из пространства (1), где весовая функция $h(x)$ может обращаться в нуль на некоторых интервалах, внутренних к интервалу ортогональности (a, b), причем последний может быть и бесконечным, но при этом должны существовать моменты (1.2) весовой функции.

Аналогично тригонометрическим рядам Фурье можно рассматривать различные виды сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам (4). При этом сходимость ряда (4) в каком-либо смысле зависит от свойств разлагаемой функции $f(x)$ и от свойств весовой функции $h(x)$. В результате возникают различные задачи.

1. Требуется найти условия, при которых ряд (4) сходится к функции $f(x)$ в метрике пространства (1), т. е. имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0. \tag{12}$$

2. Требуется найти условия, при которых ряд (4) сходится в отдельной точке интервала ортогональности, т. е. условия, при которых выполняется равенство

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{B}_n(x_0), \qquad x_0 \in (a, b). \tag{13}$$

3. Если интервал ортогональности (a, b) конечен, то обычно рассматриваются условия равномерной сходимости ряда (4) на всем сегменте $[a, b]$.

4. Если же интервал ортогональности бесконечен, то можно рассматривать условия равномерной сходимости ряда (4) на любом конечном сегменте $[\alpha, \beta]$, расположенном внутри интервала (a, b).

5. Можно рассматривать условия абсолютной сходимости ряда (4) в интервале (a, b).

По всем этим направлениям получены многочисленные результаты, в которых фигурируют весовые функции с различными свойствами. Но даже для классических ортогональных многочленов, когда весовые функции имеют конкретный вид, многие результаты не являются законченными.

Рассмотрим простейшие результаты о сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам.

Если сегмент ортогональности $[a, b]$ конечен, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по известной теореме Вейерштрасса [III.1, III.2, III.4] для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $F_n(x)$, что имеет место неравенство

$$|f(x) - F_n(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [a, b]. \tag{14}$$

Следовательно, для данной функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, существует последовательность многочленов $\{F_n(x)\}$, сходящаяся равномерно к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Но из неравенства (9), учитывая определение нормы (2), в силу (14) находим

$$\|f - S_n\| \leqslant \|f - F_n\| = \left[\int_a^b h(x)[f(x) - F_n(x)]^2\,dx\right]^{1/2} < \\ < \varepsilon\left[\int_a^b h(x)\,dx\right]^{1/2} = \varepsilon\sqrt{h_0}. \tag{15}$$

Следовательно, если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то последовательность частичных сумм (7) ее ряда Фурье по ортогональным многочленам сходится к этой функции в среднем, т. е. в метрике пространства (1). Иными словами, если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то условие (12) выполняется при любой весовой функции $h(x)$.

Если интервал ортогональности неограничен, то вместо теоремы Вейерштрасса в виде неравенства (14) возникает вопрос об аналоге теоремы Вейерштрасса в виде неравенства

$$\int_a^b h(x)[f(x) - F_n(x)]^2\,dx < \varepsilon. \tag{16}$$

Иными словами, здесь речь идет о теореме Вейерштрасса в метрике пространства (1). Если условие (16) выполняется, то из неравенства (9) следует предельное соотношение (12).

Таким образом, вопрос о сходимости ряда Фурье по ортогональным многочленам в метрике пространства (1) сводится к аналогу теоремы Вейерштрасса о приближении функции многочленами в метрике пространства (1). А это зависит от свойств весовой функции $h(x)$.

А теперь рассмотрим условия сходимости ряда (4) к функции $f(x)$ в отдельной точке интервала ортогональности, т. е. условия, при которых выполняется равенство (13). Прежде всего заметим, что этот вопрос гораздо более сложен, чем сходимость ряда (4) в среднем, ибо ряд Фурье по ортогональным многочленам, как и всякий ортогональный ряд, конструктивно приспособлен именно для сходимости в среднем, а, например, равномерная сходимость имеет место далеко не всегда, ибо здесь метрика другая.

Вводим обозначение

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(t). \tag{17}$$

Тогда, используя формулу коэффициентов Фурье (3), частичную сумму (7) представляем в виде

$$S_n(x;f) = \int_a^b h(t)f(t)K_n(x,t)\,dt. \tag{18}$$

Далее, тождество

$$\int_a^b h(t)\Big[\sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(t)\Big]\,dt = 1$$

умножаем на $f(x)$ и вычитаем из него почленно равенство (18). В результате имеем

$$f(x) - S_n(x;f) = \int_a^b h(t)[f(x) - f(t)]K_n(x,t)\,dt. \tag{19}$$

А теперь сумму (17) заменяем по формуле Кристоффеля–Дарбу (2.10). В результате находим

$$f(x) - S_n(x;f) =$$
$$= \lambda_n \int_a^b h(t)\Big[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big]\Big[\widehat{B}_{n+1}(x)\widehat{B}_n(t) - \widehat{B}_n(x)\widehat{B}_{n+1}(t)\Big]\,dt. \tag{20}$$

Будем считать, что точка x фиксирована на интервале (a,b). Положим для краткости

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}, \qquad t \in (a,b). \tag{21}$$

Для этой вспомогательной функции вводим ее коэффициенты Фурье

$$a_n(\varphi_x) = \int_a^b h(t)\varphi_x(t)\widehat{B}_n(t)\,dt. \tag{22}$$

Тогда равенство (20) приводится к виду

$$f(x) - S_n(x; f) = \lambda_n[a_n(\varphi_x)\widehat{B}_{n+1}(x) - a_{n+1}(\varphi_x)\widehat{B}_n(x)]. \qquad (23)$$

С помощью этого равенства можно формулировать достаточные условия сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в отдельной точке.

Теорема 1.11. *Если интервал ортогональности конечен и вспомогательная функция* $\varphi_x(t)$ *при фиксированном* $x \in [a, b]$ *принадлежит классу* $L_2 = L_2[a, b, h(t)]$, *а последовательность ортонормированных многочленов* $\{\widehat{B}_n(x)\}$ *ограничена в точке* x, *то ряд Фурье по ортонормированным многочленам функции* $f(x)$ *сходится к ней в точке* x, *т. е. имеем*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{B}_n(x), \qquad x \in [a, b]. \qquad (24)$$

Доказательство. По лемме 1.3 последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена. В силу условия $\varphi_x(t) \in L_2[a, b, h(t)]$ на основании (11) последовательность $\{a_n(\varphi_x)\}$ сходится к нулю. С другой стороны, в теореме дано, что последовательность ортонормированных многочленов ограничена в данной точке x, т. е. имеем

$$|\widehat{B}_n(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a, b]. \qquad (25)$$

Следовательно, правая часть равенства (23) стремится к нулю. И теорема 1.11 доказана.

Таким образом, равенство (24) имеет место в такой точке $x \in [a, b]$, где ортонормированные многочлены ограничены, и выполняется условие

$$\int_a^b h(t)\left|\frac{f(x) - f(t)}{x - t}\right|^2 dt < \infty. \qquad (26)$$

В частности, условие (26) выполняется, если функция $f(t)$ в некоторой окрестности точки x удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$, т. е.

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M_1|t - x|, \qquad t \in (x - \delta, x + \delta). \qquad (27)$$

Интеграл (26) существует как несобственный, если весовая функция $h(t)$ в некоторой окрестности точки x ограничена, а функция $f(t)$ в той же окрестности вместо (27) удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, т. е.

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M_2|t - x|^{\alpha}, \qquad \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1, \quad t \in (x - \delta, x + \delta). \qquad (28)$$

А с другой стороны, выполнение неравенства (25) зависит от свойств весовой функции $h(t)$ в окрестности точки x, причем имеет

смысл рассматривать это неравенство только в регулярных точках весовой функции.

Анализ условий теоремы 1.11 и ее частных случаев, которые характеризуются неравенствами (27) и (28), показывает, что при некоторых общих условиях на весовую функцию $h(t)$ сходимость ряда Фурье по ортогональным многочленам в фиксированной точке x зависит только от конкретных свойств функции $f(t)$ в окрестности точки x. Поэтому, как и для тригонометрических рядов Фурье, здесь можно сформулировать некоторый *принцип локализации условий сходимости*, который непосредственно следует из теоремы 1.11.

Теорема 1.12. *Если интервал (a, b) конечен и две функции, $f(x)$ и $g(x)$, из пространства* (1) *совпадают в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, причем в точке x_0 ортонормированные многочлены ограничены, то в этой точке ряды Фурье по ортогональным многочленам функций $f(x)$ и $g(x)$ оба сходятся или оба расходятся.*

Доказательство. Для разности частичных сумм рядов Фурье этих двух функций в силу (3) и (7) имеем формулу

$$S_n(x_0; f) - S_n(x_0; g) = S_n(x_0; f - g). \tag{29}$$

Поскольку функция $f(x) - g(x)$ тождественно равна нулю на малом интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то для этой функции условие (26) выполняется, и, следовательно, ее ряд Фурье по ортогональным многочленам сходится к ней в точке x_0. Поэтому из (29) следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} [S_n(x_0; f) - S_n(x_0; g)] = 0.$$

Таким образом, если последовательность $\{S_n(x_0; f)\}$ сходится к некоторому пределу, то к тому же пределу сходится и вторая последовательность. И, наоборот, если первая последовательность расходится, то расходится и вторая последовательность. Этим теорема 1.12 доказана.

Все предыдущие результаты установлены при условии, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2 = L_2[a, b; h(x)]$, т. е. для этой функции существует интеграл (2). Но ряды Фурье по ортогональным многочленам (4) иногда можно рассматривать и в более общем случае.

Обозначим через $L_1 = L_1[a, b; h(x)]$ множество функций, для которых существует интеграл

$$\int_a^b h(x)|f(x)|\,dx. \tag{30}$$

Если интервал ортогональности (a, b) конечен, то все интегралы (3) сходятся абсолютно, и данной функции $f(x)$ из класса L_1 можно поставить в соответствие ряд Фурье по ортогональным многочленам (4). В случае бесконечного интервала (a, b) формула (3) опре-

деляет коэффициенты Фурье функции $f(x)$ при условии, что произведение $h(x)f(x)$ имеет конечные степенные моменты. Разумеется, при этих минимальных условиях нельзя утверждать, что частичные суммы ряда Фурье (4) обладают минимальным свойством или что выполняется неравенство Бесселя (10). Но предельное соотношение (11) и разложение (24) при некоторых дополнительных предположениях имеют место.

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что разлагаемая функция $f(x)$ измерима по Лебегу и удовлетворяет некоторым условиям интегрируемости. А читатель, не знакомый с теорией меры и интеграла Лебега, для упрощения может считать, что функция $f(x)$ непрерывна всюду, кроме отдельных точек, в которых она может иметь разрывы первого или второго рода.

§ 5. Неравенство Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам

Рассмотрим еще один способ исследования достаточных условий сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в случае конечного интервала ортогональности. Этот способ основан на так называемых *функциях Лебега*, в нем используются оценки скорости приближения непрерывных функций алгебраическими многочленами. Простейшие из этих оценок мы приведем здесь без доказательства, а более подробно вопросы приближения функций многочленами рассмотрены в последней главе настоящей книги.

Прежде всего заметим, что первоначальные задачи о наилучшем равномерном приближении непрерывных функций многочленами были сформулированы и исследованы великим русским математиком П.Л. Чебышевым, которому принадлежат многие основные результаты в теории ортогональных многочленов и в теории приближения функций.

Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то величина

$$\rho(f, F_n) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - F_n(x)| \tag{1}$$

принимается в качестве расстояния в равномерной метрике между функцией $f(x)$ и многочленом $F_n(x)$. Эта величина (1) называется *чебышевским уклонением* многочлена $F_n(x)$ от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Величина (1) изменяется при варьировании многочлена $F_n(x)$, и поэтому естественно ввести точную нижнюю границу

$$E_n(f) = \inf_{F_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - F_n(x)|, \tag{2}$$

которая берется по всему множеству W_n алгебраических многочленов степени не выше n. Величина (2) называется *наилучшим равно-*

мерным приближением функции $f(x)$ многочленами порядка n на сегменте $[a,b]$ или *чебышевским приближением.* В теории приближения функций доказывается, что для всякого n существует многочлен $Q_n(x)$ степени не выше n, уклонение которого от функции $f(x)$ в точности равно $E_n(f)$, т. е.

$$E_n(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_n(x)|. \tag{3}$$

Многочлен $Q_n(x)$, для которого выполняется условие (3), называется *многочленом наилучшего равномерного приближения.* Таким образом, всякой непрерывной функции $f(x)$ соответствует последовательность наилучших приближений $\{E_n(f)\}$, которая в силу условия $W_n \subset W_{n+1}$ не возрастает, т. е. имеем

$$E_0(f) \geqslant E_1(f) \geqslant \ldots \geqslant E_n(f) \geqslant \ldots \tag{4}$$

При этом из теоремы Вейерштрасса следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0. \tag{5}$$

Скорость убывания величины $E_n(f)$ к нулю зависит от структурных и дифференциальных свойств функции $f(x)$. В качестве структурной характеристики непрерывной функции часто принимается *условие Липшица*

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M|t-x|^\alpha, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{6}$$

Класс таких функций обозначается $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

В гл. XII доказывается, что если функция $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица (6), то для наилучших приближений этой функции имеет место неравенство

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_1}{n^\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от n.

Если же функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[a,b]$, причем $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, то справедлива оценка

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_2}{n^{p+\alpha}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Из неравенства (8) следует, что чем больше непрерывных производных имеет функция $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, тем быстрее сходится к нулю последовательность ее наилучших приближений.

Далее, в качестве структурной характеристики непрерывной функции $f(x)$ часто рассматривается ее модуль непрерывности

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|t-x|\leqslant\delta} |f(t) - f(x)|. \tag{9}$$

Эта величина как функция δ монотонно убывает к нулю при $\delta \to 0$. В этом случае вместо неравенства (7) имеет место оценка

$$E_n(f) \leqslant c_3\, \omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big). \tag{10}$$

Оценки скорости убывания наилучшего приближения (7), (8) и (10) относятся к так называемым *прямым теоремам о порядке наилучшего приближения*. Эти теоремы изложены в гл. XII.

Рассмотрим теперь *неравенство Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам.*

Прежде всего, многочлен наилучшего равномерного приближения можно представить в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \widehat{B}_k(x) = S_n(x; Q_n), \tag{11}$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$b_k = \int_a^b h(t) Q_n(t) \widehat{B}_k(t)\, dt. \tag{12}$$

Далее имеем

$$f(x) - S_n(x; f) = [f(x) - Q_n(x)] + [S_n(x; Q_n) - S_n(x; f)] = \\ = [f(x) - Q_n(x)] + S_n(x; Q_n - f). \tag{13}$$

Учитывая формулу для коэффициентов Фурье, получаем

$$S_n(x; Q_n - f) = \int_a^b h(t)[Q_n(t) - f(t)] \left[\sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x) \widehat{B}_k(t) \right] dt. \tag{14}$$

Далее переходим к неравенству. В силу обозначения (3) имеем

$$|S_n(x; Q_n - f)| \leqslant E_n(f) L_n(x), \tag{15}$$

где введено обозначение

$$L_n(x) = \int_a^b h(t) \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x) \widehat{B}_k(t) \right| dt. \tag{16}$$

Функция (16) называется *функцией Лебега порядка* n *ортонормированной системы* $\{\widehat{B}_k(x)\}$. А максимум этой функции

$$L_n = \max_{x \in [a,b]} L_n(x) \tag{17}$$

называется *постоянной Лебега порядка* n.

С помощью оценки (15) из формулы (13) получается неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{B}_k(x) \right| \leqslant [1 + L_n(x)] E_n(f), \qquad x \in [a, b]. \tag{18}$$

А если учесть обозначение (17), то из (18) находим

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{B}_k(x) \right| \leqslant (1 + L_n) E_n(f), \qquad x \in [a, b]. \tag{19}$$

Неравенство (19) называется *неравенством Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам*, а неравенство (18) — *поточечным неравенством Лебега*.

С помощью неравенств (18) и (19) можно формулировать достаточные условия сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в отдельной точке или на всем сегменте ортогональности.

Из неравенства Лебега (19) следует, что если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} L_n E_n(f) = 0, \tag{20}$$

то функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по ортогональным многочленам, причем этот ряд сходится равномерно на всем сегменте ортогональности $[a,b]$.

Последовательность постоянных Лебега $\{L_n\}$ возрастает неограниченно, но во многих частных случаях, а также и при некоторых общих условиях на весовую функцию $h(x)$ можно определить скорость этого возрастания. В последующих главах будут приведены конкретные оценки постоянных Лебега для многочленов Чебышева первого и второго рода, для многочленов Лежандра и для общих многочленов Якоби. С другой стороны, имеются различные результаты об оценке скорости убывания последовательности наилучших приближений $\{E_n(f)\}$.

Таким образом, неравенство Лебега (19) и условие (20) открывают возможность устанавливать различные достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам на всем сегменте ортогональности.

Рассмотрим теперь поточечное неравенство Лебега (18). Если вместо (20) выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) E_n(f) = 0, \qquad x \in [a,b], \tag{21}$$

то ряд Фурье по ортогональным многочленам сходится к функции $f(x)$ в отдельной точке $x \in [a,b]$.

В большинстве случаев последовательность функций Лебега $\{L_n(x)\}$, определяемых равенством (16), возрастает с различными скоростями в зависимости от положения точки x на сегменте ортогональности, например, во внутренних точках и на концах его. Поэтому достаточные условия сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам могут быть различными для разных точек сегмента ортогональности.

А теперь вернемся к формуле (14). Применяя неравенство Буняковского–Шварца, вместо (15) находим

$$|S_n(x;Q_n - f)|^2 \leqslant \int\limits_a^b h(t)|Q_n(t) - f(t)|^2\,dt \int\limits_a^b h(t)\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(t)\right|^2 dt. \tag{22}$$

В силу очевидного равенства

$$\int_a^b h(t)\left|\sum_{k=0}^n \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(t)\right|^2 dt = \sum_{k=0}^n |\widehat{B}_k(x)|^2 \tag{23}$$

формула (22) приводится к виду

$$|S_n(x; Q_n - f)|^2 \leqslant \|Q_n - f\|^2 \sum_{k=0}^n |\widehat{B}_k(x)|^2. \tag{24}$$

Введем обозначение

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n |\widehat{B}_k(x)|^2. \tag{25}$$

Тогда из формулы (13) получаем

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant |f(x) - Q_n(x)| + \|Q_n - f\|[M_n(x)]^{1/2}. \tag{26}$$

Таким образом, возникает необходимость оценить скорость возрастания величины (25).

В формуле (26) многочлен $Q_n(x)$ является произвольным. Из этой формулы следует, что ряд Фурье по ортогональным многочленам сходится к функции $f(x)$ в отдельной точке x, если последовательность многочленов $\{Q_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ и величина

$$\|Q_n - f\| = \left[\int_a^b h(t)|Q_n(t) - f(t)|^2 dt\right]^{1/2} \tag{27}$$

убывает к нулю так быстро, что произведение (24) стремится к нулю.

Далее, аналогично постоянным Лебега (17) можно ввести постоянные

$$M_n = \max_{x\in[a,b]} M_n(x). \tag{28}$$

Тогда вместо (26) приходим к неравенству

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant |f(x) - Q_n(x)| + \|Q_n - f\|[M_n]^{1/2}. \tag{29}$$

Это неравенство можно использовать для доказательства равномерной сходимости ряда Фурье по ортогональным многочленам.

§ 6. Дальнейшие результаты и задачи

В настоящем параграфе рассматриваются в основном без доказательства некоторые дополнительные вопросы общей теории ортогональных многочленов.

1. Еще раз заметим, что почти все свойства ортогональных многочленов можно рассматривать не только для дифференциального веса $h(x)$, но и для интегрального веса $d\psi(x)$.

Пусть на интервале (a, b) определена ограниченная неубывающая функция $\psi(x)$ с бесконечным множеством точек роста. Как известно [I.1, I.2], такую функцию можно представить в виде трех слагаемых

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x), \qquad x \in (a, b). \tag{1}$$

В этой формуле $\psi_1(x)$ — абсолютно непрерывная компонента, у которой существует отличная от тождественного нуля производная, т. е.

$$\psi_1'(x) = h(x), \qquad x \in (a, b). \tag{2}$$

Далее, $\psi_2(x)$ — функция скачков, т. е. ступенчатая функция, а функция $\psi_3(x)$ — так называемая сингулярная компонента, т. е. эта функция непрерывна, но почти всюду выполняется условие

$$\psi_3'(x) = 0, \qquad x \in (a, b). \tag{3}$$

Условия (2) и (3) могут не выполняться на множестве меры нуль по Лебегу.

Будем считать, как обычно, что выполняются два условия:

$$0 < \int_a^b d\psi(x) < \infty. \tag{4}$$

Здесь имеется в виду интеграл Лебега–Стилтьеса [I.1, I.2]. При условиях (4) однозначно определяется система ортонормированных многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$, для которых выполняются условия

$$\int_a^b \widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)d\psi(x) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{5}$$

На эти многочлены переносятся все свойства ортонормированных многочленов, установленные при дифференциальном весе $h(x)$. Но, конечно, некоторые формулировки усложняются.

Если $\psi_2(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$, то в силу (2) интегральный вес превращается в дифференциальный.

Пусть теперь $\psi_1(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$, а функция $\psi_2(x)$ имеет скачки $\{p_k\}$ в точках $\{x_k\}$, причем

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k < \infty, \qquad p_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Тогда интеграл Лебега–Стилтьеса (5) превращается в сумму

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \widehat{B}_n(x_k)\widehat{B}_m(x_k) = \delta_{nm}. \tag{7}$$

Таким образом, в этом случае получаются ортогональные многочлены дискретного переменного [I.4, I.6].

Если функция $\psi_2(x)$ имеет только конечное число скачков в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$, то сумма (7) приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{m} p_k \widehat{B}_n(x_k)\widehat{B}_s(x_k) = \delta_{ns}. \tag{8}$$

В этом случае по теореме существования определяется только $m+1$ ортогональных многочленов

$$\widehat{B}_0(x),\ \widehat{B}_1(x),\ \ldots,\ \widehat{B}_m(x). \tag{9}$$

Для интегрального веса $d\psi(x)$ можно рассматривать ряды Фурье по ортогональным многочленам, но некоторые формулировки существенно усложняются.

2. Наряду с пространством

$$L_2 = L_2[a, b; h(x)] \tag{10}$$

рассмотрим теперь пространство функций

$$L_p = L_p[a, b; h(x)], \qquad p \geqslant 1, \tag{11}$$

для которых выполняется условие

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b h(x)|f(x)|^p\,dx\right|^{1/p} < \infty. \tag{12}$$

Система ортогональных многочленов называется *полной в пространстве* (11), если при условии $f(x) \in L_p$ из равенств

$$\int_a^b h(x)f(x)\widehat{B}_n(x)\,dx = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

всегда следует, что функция $f(x)$ равна нулю почти всюду на $[a, b]$, т. е. условие

$$f(x) \equiv 0, \qquad x \in [a, b], \tag{14}$$

выполняется всюду, кроме множества меры нуль по Лебегу.

Иными словами, система многочленов является полной в пространстве (11), если в этом пространстве нет функции, отличной от нуля на множестве положительной меры и ортогональной всем многочленам $\{\widehat{B}_n(x)\}$. В этом случае, если для некоторой функции $f(x)$ все ее коэффициенты Фурье по ортогональным многочленам равны нулю, то сама эта функция равна нулю почти всюду на сегменте $[a, b]$.

При условии полноты системы многочленов в пространстве (11), если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ из этого пространства имеют одинаковые коэффициенты Фурье по ортогональным многочленам, то они равны почти всюду на $[a, b]$.

Далее, если ряд Фурье по ортогональным многочленам некоторой функции $f(x)$ из L_p при условии полноты сходится равномерно на

конечном сегменте ортогональности, то суммой этого ряда является именно эта функция $f(x)$ с точностью до множества меры нуль.

Разумеется, свойство полноты системы многочленов в пространстве L_p зависит от свойств весовой функции. Пусть, например, весовая функция $h(x)$ тождественно равна нулю на некотором внутреннем интервале (α, β), т. е. имеем

$$h(x) \equiv 0, \qquad x \in (\alpha, \beta), \quad a < \alpha < \beta < b. \tag{15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$ отлична от нуля на интервале (α, β), но тождественно равна нулю на остальной части сегмента ортогональности. Тогда имеем

$$\int\limits_a^b h(x)\varphi(x)\widehat{B}_n(x)\,dx \equiv 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, при условии (15) полнота не имеет места.

Но, с другой стороны, если выполняется условие

$$h(x) > 0, \qquad x \in [a, b], \tag{16}$$

причем сегмент ортогональности конечен, то полнота имеет место. Разумеется, условие (16) можно несколько ослабить. А именно, весовая функция может иметь конечное число нулей [I.2, X.6, XI.12].

3. С понятием полноты тесно связано понятие замкнутости системы многочленов в пространстве L_p.

Система многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$ называется замкнутой в пространстве L_p, если всякая функция $f(x)$ из этого пространства может быть приближена сколь угодно точно линейными комбинациями этих многочленов в метрике пространства L_p. Иными словами, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая линейная комбинация

$$\Phi_n(x, f, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varepsilon)\widehat{B}_k(x), \tag{17}$$

что выполняется условие

$$\|f - \Phi_n\|_p = \left\{ \int\limits_a^b h(x)|f(x) - \Phi_n(x, f, \varepsilon)|^p\,dx \right\}^{1/p} < \varepsilon. \tag{18}$$

В случае $p = 2$ условие замкнутости (18) можно сформулировать по-иному. В самом деле, рассмотрим формулу (4.8)

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{19}$$

В силу экстремальных свойств частичных сумм ряда Фурье по ортогональным многочленам из условия (18) при $p = 2$ следует, что правая

часть (19) стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в формуле (19), получаем равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2. \tag{20}$$

Таким образом, для замкнутости системы ортогональных многочленов в пространстве L_2 необходимо и достаточно выполнения равенства Парсеваля (20).

Если система замкнута, то нетрудно доказать, что для любых двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ из L_2 справедливо равенство Парсеваля

$$\int_a^b h(x)f(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \tag{21}$$

где $\{b_k\}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$.

Нетрудно доказать, что в пространстве L_2 понятия замкнутости и полноты эквивалентны, т. е. система многочленов в пространстве $L_2 = L_2[a,b;h(x)]$ полна тогда и только тогда, когда она замкнута.

А в общем случае пространства (11), когда интервал ортогональности бесконечен, понятия полноты и замкнутости не совпадают. Но контрпримеры довольно сложные.

Вопросы полноты и замкнутости системы многочленов подробно рассмотрены в книгах [I.1, I.2, III.1, III.5].

4. В теории тригонометрических рядов Фурье хорошо известна теорема Рисса–Фишера [III.2]. Эта теорема переносится на ряды Фурье по ортогональным многочленам в случае замкнутости системы многочленов в пространстве $L_2[a,b;h(x)]$. А именно, пусть задана произвольная система чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{22}$$

Тогда в любом пространстве $L_2[a,b;h(x)]$, в котором система многочленов замкнута, найдется такая функция $f(x)$, что числа $\{a_n\}$ являются ее коэффициентами Фурье, т. е.

$$a_n = \int_a^b h(x)f(x)\widehat{B}_n(x)\,dx. \tag{23}$$

5. Вернемся к условию (15). Хотя это условие (вернее, его отрицание) привело нас к важному и характерному достаточному условию замкнутости (20), но само по себе условие (15) не совсем естественно. А именно, если выполняется условие (15), то, вроде бы, не совсем правильно говорить об ортогональности на сегменте $[a,b]$. А лучше сказать, что многочлены $\{\widehat{B}_n(x)\}$ ортогональны на двух сегментах, $[a,\alpha]$

и $[\beta, b]$. Обобщая этот случай, можно говорить о многочленах, ортогональных на нескольких интервалах. Свойства таких многочленов изучаются [XI.16, XI.39].

6. Пусть многочлены $\{\widehat{B}_n(x)\}$ ортонормированы с весом $h(x)$ на интервале (a, b). Рассмотрим билинейный ряд по ортогональным многочленам

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(x_0) \tag{24}$$

и его частичные суммы

$$K_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{B}_k(x)\widehat{B}_k(x_0). \tag{25}$$

С помощью частичных сумм (25) можно решать некоторую экстремальную задачу.

Обозначим через $W_n(1)$ множество всех алгебраических многочленов степени не более n с комплексными коэффициентами, для которых выполняется условие

$$\int_a^b h(x)|Q_n(x)|^2\,dx = 1. \tag{26}$$

С другой стороны, пусть фиксирована произвольная точка $z_0 = x_0 + iy_0$ на комплексной плоскости. Для каждого многочлена из множества $W_n(1)$ вычисляем величину $|Q_n(z_0)|^2$. Спрашивается, каков максимум величины $|Q_n(z_0)|^2$? И существует ли конкретный многочлен, реализующий этот максимум при нормировке (26)?

Каждый многочлен из семейства $W_n(1)$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\widehat{B}_k(x). \tag{27}$$

Подставляя это разложение в интеграл (26), получаем равенство

$$\int_a^b h(x)|Q_n(x)|^2\,dx = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 = 1. \tag{28}$$

Далее, многочлен (27) вычисляем в точке z_0 и применяем неравенство Коши–Буняковского. В результате получаем

$$|Q_n(z_0)|^2 = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\widehat{B}_k(z_0)\right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\widehat{B}_k(z_0)|^2 = \\ = \sum_{k=0}^{n} |\widehat{B}_k(z_0)|^2 = K_n(z_0, z_0). \tag{29}$$

Но, как известно, неравенство Коши–Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда в данном случае

$$a_k = b\overline{\widehat{B}_k(z_0)}. \tag{30}$$

В этом случае имеем

$$|Q_n(z_0)|^2 = |b|^2 \left[\sum_{k=0}^{n} |\widehat{B}_k(z_0)|^2 \right]^2. \tag{31}$$

Подставляя (30) в формулу (27) и вычисляя интеграл (28), находим

$$\int_a^b h(x) \left| b \sum_{k=0}^{n} \overline{\widehat{B}_k(z_0)} \widehat{B}_k(x) \right|^2 dx = |b|^2 \sum_{k=0}^{n} |\widehat{B}_k(z_0)|^2 = |b|^2 K_n(z_0, z_0) = 1. \tag{32}$$

Таким образом, в данной экстремальной задаче максимум величины $|Q_n(z_0)|^2$ во множестве всех многочленов $W_n(1)$ равен $K_n(z_0, z_0)$, а экстремальный многочлен, на котором этот максимум достигается, имеет вид

$$Q_n(x) = \frac{c}{\sqrt{K_n(z_0, z_0)}} \sum_{k=0}^{n} \overline{\widehat{B}_k(z_0)} \widehat{B}_k(x), \qquad |c| = 1. \tag{33}$$

7. В теории ортогональных многочленов часто рассматриваются так называемые функции второго рода. Пусть многочлены $\{B_n(x)\}$ ортонормированы на сегменте $[a, b]$ с весовой функцией $h(x)$. При некоторых минимальных условиях на весовую функцию можно рассматривать разложение ядра Коши

$$\frac{1}{t-x} = \sum_{k=0}^{\infty} q_n(t) B_n(x), \qquad x \in [a, b]. \tag{34}$$

Если $x \in [a, b]$, а t фиксировано и не принадлежит сегменту $[a, b]$, то левая часть (34) есть аналитическая функция по x.

Как обычно, коэффициенты разложения (34) определяются по формуле

$$q_n(t) = \int_a^b h(x) \, \frac{B_n(x)}{t-x} \, dx. \tag{35}$$

Функции (35) называются *функциями второго рода для веса* $h(x)$.

Если t не принадлежит сегменту $[a, b]$, то функция (34) интегрируема с квадратом по сегменту $[a, b]$. Поэтому справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n(t)|^2 \leqslant \int_a^b \frac{h(x)\, dx}{|t-x|^2}. \tag{36}$$

В формулах (34)–(36) вместо t можно поставить любое число ζ из дополнения сегмента $[a, b]$ до комплексной плоскости.

Из неравенства (36) следует, что последовательность функций второго рода $\{q_n(z)\}$ сходится к нулю равномерно на всяком компакте комплексной плоскости, расположенном вне сегмента $[a,b]$.

Из формулы (35) следует, что функция $q_n(\zeta)$ есть интеграл типа Коши в комплексной плоскости. Следовательно, к этим интегралам можно применить все методы и результаты, которые имеют место в теории интегралов типа Коши [VIII.2].

В теории ортогональных многочленов асимптотические свойства функций второго рода обычно рассматриваются одновременно с асимптотическими свойствами ортогональных многочленов.

Для всякого контура Г, охватывающего сегмент $[a,b]$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \widehat{B}_m(\zeta)q_n(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_a^b \widehat{B}_n(x)\left[\int\limits_{\Gamma} \frac{\widehat{B}_m(\zeta)}{\zeta - x}\,d\zeta\right]dx = \\ = 2\pi i \int\limits_a^b h(x)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m. \quad (37)$$

Следовательно, функции второго рода биортогональны с ортогональными многочленами по любой кривой Г, охватывающей сегмент $[a,b]$.

8. Имеется много результатов [I.2, X.6, XI.10] о связи особенностей весовой функции с поведением последовательности ортонормированных многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$ в особых точках весовой функции $h(x)$. Еще раз отметим, что нуль весовой функции также является особой точкой. Приведем две простые и наиболее характерные формулировки.

Предположим, что весовая функция $h(x)$ определена на сегменте $[a,b]$ и имеет нуль во внутренней точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = 0, \qquad x_0 \in (a,b). \quad (38)$$

Тогда, как показывают многие примеры и частные случаи, выполняется предельное условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\widehat{B}_n(x_0)| = \infty, \quad (39)$$

где имеется в виду верхний предел последовательности. Спрашивается, каковы минимальные условия на весовую функцию $h(x)$ в окрестности точки x_0 и на всем сегменте $[a,b]$, при которых выполняется условие (39). И, наоборот, если в некоторой точке x_0 выполняется условие (39), то что можно сказать о поведении функции $h(x)$ в окрестности точки x_0?

Далее, если в некоторой точке $x_1 \in (a,b)$ весовая функция $h(x)$ имеет вертикальную асимптоту, т. е.

$$\lim_{x\to x_1} h(x) = +\infty, \quad (40)$$

то, как показывают многие примеры и частные случаи, в этой точке выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{B}_n(x_1) = 0. \quad (41)$$

Вероятно, из условия (41) следует неограниченность весовой функции $h(x)$ в окрестности точки x_1.

Предельные соотношения (39) и (41) рассмотрены при различных конкретных условиях на весовую функцию. Например, если весовая функция имеет вид

$$h(x) = |x - x_0|^\delta h_0(x), \qquad \delta > 0, \tag{42}$$

где функция $h_0(x)$ положительна и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то вместо (39) имеет место неравенство

$$|\widehat{B}_n(x_0)| \leqslant c_1 n^{\delta/2}. \tag{43}$$

А если

$$h(x) = \frac{h_1(x)}{|x - x_1|^\sigma}, \qquad 0 < \sigma < 1, \tag{44}$$

где функция $h_1(x)$ положительна и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то вместо (41) имеем

$$|\widehat{B}_n(x_1)| \leqslant c_2 n^{-\sigma/2}. \tag{45}$$

Но в общем случае предельные соотношения (39) и (41), кажется, не рассмотрены.

9. Теорема существования системы ортонормированных многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$, соответствующих весовой функции $h(x)$ на интервале (a, b), доказана методом ортогонализации системы степеней $\{x^n\}$. Но вместо $\{x^n\}$ можно ортогонализировать произвольную систему многочленов $\{A_n(x)\}$, где каждый многочлен $A_n(x)$ имеет степень n. В этом случае вместо моментов (1.2) вводятся двухиндексные моменты

$$h_{km} = \int_a^b A_k(x) A_m(x) h(x)\, dx$$

и рассматриваются формулы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0n} \\ h_{10} & h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n0} & h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\widehat{B}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0n} \\ h_{10} & h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1,0} & h_{n-1,1} & \dots & h_{n-1,n} \\ A_0(x) & A_1(x) & \dots & A_n(x) \end{vmatrix}. \tag{46}$$

Доказательство формулы (46) аналогично доказательству формулы (2.15) из теоремы 1.6.

Глава II

ОБЩИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 1. Дифференциальное уравнение Пирсона

Дифференциальное уравнение

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2}, \tag{1}$$

в котором все коэффициенты действительны, называется *уравнением Пирсона.* Вид решения этого уравнения и область существования зависят от многочленов

$$A(x) = p_0 + p_1 x, \qquad D(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2. \tag{2}$$

Из всех решений уравнения (1) мы выделим те, которые на всей связной области своего существования могут быть весовыми функциями, и, следовательно, могут определять некоторую систему ортогональных многочленов. При этом для выяснения качественной картины мы будем иногда допускать линейные преобразования независимого переменного в уравнении (1). Как отмечено в теореме 1.10, если в весовой функции $h(x)$ сделать замену переменного $x = pt + q$, то ортонормированные многочлены, соответствующие весу $h(pt + q)$, будут только постоянным множителем отличаться от многочленов $\{\widehat{B}_n(pt + q)\}$. Следовательно, простейшие асимптотические свойства ортогональных многочленов при линейной замене независимого переменного не изменяются.

1. Предположим, что многочлен $D(x)$ не имеет нулей, т. е. $q_1 = q_2 = 0$, но $q_0 \neq 0$. Тогда уравнение Пирсона (1) после переноса начала координат можно записать в виде

$$\frac{y'}{y} = -2\beta x. \tag{3}$$

Решение этого уравнения

$$y = \varphi_1(x) = c_1 e^{-\beta x^2} \tag{4}$$

определено при всех x, но весовой функцией может служить лишь при условиях $\beta > 0$ и $c_1 > 0$. Линейным преобразованием независимого переменного $\sqrt{\beta}\, x = t$ эта функция (4) приводится с точностью до постоянного множителя c_1 к весовой функции многочленов Чебышева–Эрмита (I.1.30). Поскольку умножение весовой функции на постоянный множитель фактически не изменяет ортонормированные многочлены, то в формуле (4), как и в нижеследующих аналогичных

формулах, не нарушая общности, можно считать $c_1 = 1$. Впрочем, в данном случае многочлены, ортонормированные с весом (4), представляются через многочлены Чебышева–Эрмита по формуле

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\sqrt[4]{\beta}}{\sqrt{c_1}}\,\widehat{H}_n(\sqrt{\beta}x). \tag{5}$$

Это следует из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c_1 e^{-\beta x^2}\,\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\sqrt{c_1}}\,\widehat{H}_n(\sqrt{\beta}x)\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\sqrt{c_1}}\,\widehat{H}_m(\sqrt{\beta}x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\widehat{H}_n(t)\widehat{H}_m(t)\,dt = \delta_{nm}.$$

Таким образом, если многочлен $D(x)$ не имеет нулей, т. е. это есть просто постоянная, то при некотором выборе постоянных p_0, p_1 и q_0 решение уравнения (1) может служить весовой функцией, которая линейным преобразованием независимого переменного и умножением на постоянную сводится к весовой функции многочленов Чебышева–Эрмита. В связи с этим ортонормированные многочлены (5) естественно называть *обобщенными многочленами Чебышева–Эрмита.*

2. Пусть теперь $q_2 = 0$, $q_1 \neq 0$. Тогда без нарушения общности можно считать $q_0 = 0$, ибо это достигается линейным преобразованием независимого переменного. В этом случае уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} - \beta. \tag{6}$$

Его решение

$$y = \varphi_2(x) = c_2 x^{\alpha} e^{-\beta x} \tag{7}$$

будет весовой функцией на интервале $(0, +\infty)$ при условиях $c_2 > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$. Многочлены, ортогональные с весом (7), можно рассматривать как *обобщение многочленов Чебышева–Лагерра*, ортогональных с весовой функцией (I.1.31). Эти многочлены можно представить через многочлены Чебышева–Лагерра аналогично формуле (5).

3. Рассмотрим теперь случай, когда многочлен $D(x)$ имеет два действительных и различных нуля. Тогда уравнение Пирсона (1) можно представить в виде

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2(x-a)(x-b)} = \frac{\beta}{x-a} - \frac{\alpha}{b-x}, \tag{8}$$

где α и β — некоторые постоянные и $a < b$. Решение уравнения (8)

$$y = \varphi_3(x) = c_3(b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} \tag{9}$$

определено на интервале (a, b) и весовой функцией может быть только при условиях $c_3 > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Линейным преобразованием $2x =$

$= (b-a)t + (a+b)$ функция (9) сводится к весовой функции многочленов Якоби (I.1.26). Поэтому многочлены, ортогональные с весовой функцией (9), можно назвать *обобщенными многочленами Якоби.*

Решение уравнения (8) существует и на двух других интервалах: $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$.

В самом деле, уравнение (8) можно представить в виде

$$\frac{y'}{y} = \frac{\beta}{x-a} + \frac{\alpha}{x-b}.$$

Тогда вместо (9) получим функцию

$$y = \varphi_4(x) = c_3(x-a)^\beta(x-b)^\alpha. \tag{10}$$

Эта функция определена при $x > b$. Но на интервале $(b, +\infty)$ эта функция весом не может быть ни при каких α и β, ибо ее степенные моменты с достаточно большими номерами не существуют.

Аналогично, если уравнение (8) представить в виде

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\beta}{a-x} - \frac{\alpha}{b-x},$$

то в качестве решения получим функцию

$$y = \varphi_5(x) = c_3(a-x)^\beta(b-x)^\alpha. \tag{11}$$

Эта функция определена на интервале $(-\infty, a)$, но весовой функцией служить не может.

Таким образом, если квадратный трехчлен $D(x)$ имеет два действительных нуля a и b, то формулы (9)–(11) определяют решение этого уравнения на всей оси, но только функция (9) является весовой функцией на интервале (a, b) при условиях $c_3 > 0$, $\alpha > -1$ и $\beta > -1$.

4. Если многочлен $D(x)$ имеет двойной нуль, например в начале координат, то вместо (8) и (9) получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2 x^2} = \frac{\beta}{x^2} + \frac{\alpha}{x},$$

$$y = \varphi_6(x) = c_4 x^\alpha e^{-\beta/x}, \tag{12}$$

Это решение определено при $x > 0$, но весовой функцией на всем интервале не может быть, ибо функция (12) даже не интегрируема.

5. Наконец, если многочлен $D(x)$ имеет мнимые нули, то уравнение Пирсона можно представить в виде

$$\frac{y'}{y} = -\frac{a\alpha + 2\beta x}{x^2 + a^2}, \qquad a > 0.$$

Решение этого уравнения

$$y = \varphi_7(x) = \frac{c_5}{(x^2+a^2)^\beta}\, e^{-\alpha \operatorname{arctg}(x/a)} \tag{13}$$

определено при всех x, но весовой функцией на всей оси быть не может, ибо его моменты при больших номерах не существуют.

Итак, мы доказали, что решение уравнения Пирсона может быть принято в качестве весовой функции для ортогональных многочленов только в трех случаях, которые характеризуются формулами (4), (7) и (9). В каждом из этих трех случаев ортогональные многочлены линейными преобразованиями независимого переменного и умножением на постоянные сводятся по формуле типа (5) соответственно к многочленам Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и к многочленам Якоби. А в остальных четырех случаях каждое из решений может служить весовой функцией, но не на всем бесконечном интервале своего существования, а лишь на любой конечной части его.

Нетрудно видеть, что для вышеупомянутых трех случаев, когда решение уравнения Пирсона на всей связной области своего существования является весовой функцией, на концах интервала ортогональности (a, b) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{x\to a+0} h(x)D(x) = \lim_{x\to b-0} h(x)D(x) = 0. \tag{14}$$

В самом деле, в случае веса (4) имеем $a = -\infty$ и $b = +\infty$. А многочлен $D(x)$ определяется второй формулой (2). Поэтому соотношения (14) в этом случае очевидны. Если же весовая функция $h(x)$ определяется формулой (7), то, поскольку в этом случае $D(x) = x$ и $\alpha > -1$, условия (14) и в этом случае выполняются. Пусть теперь весовая функция $h(x)$ совпадает с функцией (9). Тогда в силу формулы (8) имеем

$$h(x)D(x) = -c_3(b-x)^{\alpha+1}(x-a)^{\beta+1}.$$

Так как $\alpha > -1$ и $\beta > -1$, то условия (14) выполняются и в этом случае.

Таким образом, первые три решения уравнения Пирсона, т. е. функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ удовлетворяют краевым условиям (14). С другой стороны, ясно, что остальные четыре функции, являющиеся решениями уравнения Пирсона либо не являются весовыми функциями, либо не удовлетворяют по крайней мере одному из краевых условий (14). Это следует непосредственно из формул (10)–(13). Более того, если любую из этих четырех функций рассматривать на конечном интервале, содержащемся в области ее существования, то, будучи на этом интервале весом, эта функция все равно не будет удовлетворять по крайней мере одному из предельных соотношений (14). Следует отметить, что функции (9), (10) и (11), определяемые на различных интервалах, по существу составляют одно решение дифференциального уравнения Пирсона вида (8), но в данной ситуации целесообразно рассматривать эти функции как различные даже и в том наиболее хорошем случае, когда числа α и β четные, т. е. когда особые точки уравнения (8) становятся просто нулями решения, определенного на всей действительной оси.

Уравнение Пирсона (1) широко применяется в теории вероятностей [VIII.3]. Решения этого уравнения определяют различные

распределения вероятностей, которые называются распределениями Пирсона. Обычно выделяют тринадцать распределений, каждое из которых имеет определенное название (нормальное распределение, бета-распределение, гамма-распределение, распределение хи-квадрат, распределения Фишера, Стьюдента, Парето и другие).

В настоящей главе рассматриваются общие свойства ортогональных многочленов, весовая функция которых является решением уравнения Пирсона (1) и удовлетворяет условиям (14). Такие ортогональные многочлены называются *классическими*. В настоящем параграфе установлено, что классические ортогональные многочлены образуют три отдельные семейства: обобщенные многочлены Чебышева–Эрмита, обобщенные многочлены Чебышева–Лагерра и обобщенные многочлены Якоби. Каждое из этих семейств получается линейными преобразованиями независимого переменного и умножением на постоянные соответственно из многочленов Чебышева–Эрмита, многочленов Чебышева–Лагерра и многочленов Якоби.

§ 2. Дифференциальное уравнение для классических ортогональных многочленов

В настоящем параграфе мы докажем, что классические ортогональные многочлены являются собственными функциями некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Частные случаи этого уравнения появляются при исследовании различных задач физического и технического содержания. Этим собственно и объясняется та важная роль, которую играют классические ортогональные многочлены в вычислительной математике и в прикладных задачах.

Пусть весовая функция на интервале (a, b) удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{D(x)}, \qquad x \in (a, b). \tag{1}$$

А на концах интервала (a, b) выполняются предельные соотношения (1.14), которые здесь мы запишем в более краткой форме

$$h(a)D(a) = h(b)D(b) = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\{F_n(x)\}$ ортогональные многочлены, соответствующие весовой функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2).

Таким образом, в настоящем и следующих параграфах как единый случай рассматриваются все три семейства классических ортогональных многочленов.

Теорема 2.1. *Если весовая функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то ортогональный многочлен $F_n(x)$ является реше-*

нием дифференциального уравнения

$$D(x)y'' + [A(x) + D'(x)]y' - \gamma_n y = 0, \tag{3}$$

где

$$\gamma_n = n[p_1 + (n+1)q_2]. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_{nk} = \int_a^b [D(x)h(x)F_n'(x)]' x^k \, dx. \tag{5}$$

Интегрируя по частям, находим

$$J_{nk} = x^k[D(x)h(x)F_n'(x)]\Big|_a^b - k\int_a^b x^{k-1}D(x)h(x)F_n'(x)\,dx.$$

В силу условий (2) внеинтегральный член равен нулю, поэтому, снова интегрируя по частям, получаем

$$J_{nk} = -kx^{k-1}D(x)h(x)F_n(x)\Big|_a^b + k\int_a^b F_n(x)[x^{k-1}D(x)h(x)]'\,dx =$$

$$= k\int_a^b F_n(x)[(k-1)x^{k-2}D(x)h(x) +$$

$$+ x^{k-1}D'(x)h(x) + x^{k-1}D(x)h'(x)]\,dx.$$

Из условия (1) следует тождество

$$D(x)h'(x) \equiv h(x)A(x). \tag{6}$$

Поэтому предыдущее равенство представляем в виде

$$J_{nk} = k\int_a^b F_n(x)[(k-1)x^{k-2}D(x) + x^{k-1}D'(x) + x^{k-1}A(x)]h(x)\,dx.$$

В квадратных скобках стоит многочлен степени не выше k. Следовательно, в силу ортогональности многочлена $F_n(x)$ имеем равенства

$$J_{nk} = k\int_a^b F_n(x)x^{k-2}[(k-1)D(x) + xD'(x) + xA(x)]h(x)\,dx = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Следовательно, при тех же k равен нулю и интеграл (5). Выполняя в нем операцию дифференцирования и снова используя тождество (6),

получим

$$J_{nk} = \int_a^b [D'(x)h(x)F_n'(x) + D(x)h'(x)F_n'(x) + D(x)h(x)F_n''(x)]x^k\,dx =$$

$$= \int_a^b \{[D'(x) + A(x)]F_n'(x) + D(x)F_n''(x)\}x^k h(x)\,dx = 0. \quad (7)$$

В фигурных скобках стоит многочлен степени не выше n. Обозначим его через $Q_n(x)$, т. е. полагаем

$$Q_n(x) = D(x)F_n''(x) + [A(x) + D'(x)]F_n'(x). \quad (8)$$

Тогда равенство (7) приводится к виду

$$\int_a^b h(x)Q_n(x)x^k\,dx = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (9)$$

Умножаем при каждом k равенство (9) на произвольный коэффициент c_k и складываем. В результате получим равенство

$$\int_a^b h(x)Q_n(x)R_m(x)\,dx = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (10)$$

в котором $R_m(x)$ — произвольный многочлен степени $m < n$. Но по теореме 1.2 (первый критерий ортогональности) условие (10) необходимо и достаточно для того, чтобы многочлен $Q_n(x)$ был ортогонален с весом $h(x)$. Следовательно, многочлен $Q_n(x)$ только множителем может отличаться от ортогонального многочлена $F_n(x)$. Таким образом, в силу (8) имеем равенство

$$D(x)F_n''(x) + [A(x) + D'(x)]F_n'(x) = \gamma_n F_n(x). \quad (11)$$

Остается определить постоянную γ_n. Для этого обозначим через μ_n старший коэффициент многочлена $F_n(x)$. Используем формулы (1.2)

$$A(x) = p_0 + p_1 x, \qquad D(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2. \quad (12)$$

Сравнивая старшие коэффициенты слева и справа в равенстве (11), находим

$$q_2 n(n-1)\mu_n + (p_1 + 2q_2)n\mu_n = \gamma_n \mu_n. \quad (13)$$

Сокращая на μ_n, получим формулу (4).

Таким образом, теорема 2.1 доказана.

Поскольку в равенстве (13) старший коэффициент μ_n сокращается, то теорема 2.1 справедлива для ортонормированных многочленов $\{\widehat{F}_n(x)\}$, для ортогональных многочленов с единичным старшим

коэффициентом $\{\widetilde{F}_n(x)\}$, а также для так называемых стандартизованных ортогональных многочленов, которые отличаются от многочленов $\{\widetilde{F}_n(x)\}$ постоянными множителями.

Дифференциальное уравнение (3) с условием (4) интересует нас постольку, поскольку из него можно получить дифференциальные уравнения для многочленов Чебышева–Эрмита, многочленов Чебышева–Лагерра и многочленов Якоби. Рассмотрим эти частные случаи.

Если в формуле (1.4) положить $c_1 = 1$ и $\beta = 1$, то получим весовую функцию многочленов Чебышева–Эрмита. Соответствующее уравнение Пирсона имеет вид

$$\frac{y'}{y} = -2x.$$

Следовательно, в силу (12) здесь имеем

$$A(x) \equiv -2x, \qquad D(x) \equiv 1.$$

Поэтому вместо (3) после вычисления (4) для многочленов Чебышева–Эрмита получим дифференциальное уравнение

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \tag{14}$$

т. е. имеет место тождество

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) \equiv 0. \tag{15}$$

Положим теперь в формуле (1.7) $c_2 = \beta = 1$. Тогда получим весовую функцию многочленов Чебышева–Лагерра и соответствующее уравнение Пирсона

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha - x}{x}.$$

Следовательно, в случае многочленов Чебышева–Лагерра формулы (12) и (13) приводятся к виду

$$A(x) = \alpha - x, \quad D(x) = x, \quad \gamma_n = -n.$$

Подставляя эти значения в (3), находим уравнение

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0. \tag{16}$$

Этому уравнению удовлетворяют многочлены Чебышева–Лагерра, т. е. имеет место тождество

$$xL_n''(x;\alpha) + (\alpha - x + 1)L_n'(x;\alpha) + nL_n(x;\alpha) \equiv 0. \tag{17}$$

Далее, в формуле (1.9) положим $c_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$. Тогда получим весовую функцию многочленов Якоби

$$h(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta. \tag{18}$$

В этом случае уравнение (1.8) приводится к виду

$$\frac{y'}{y} = \frac{\beta}{1+x} - \frac{\alpha}{1-x} = \frac{(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta)x}{1-x^2}.$$

Следовательно, имеем

$$A(x) = (\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x, \qquad D(x) = 1 - x^2,$$
$$\gamma_n = -n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Подставляя эти значения в формулу (3), получим дифференциальное уравнение для многочленов Якоби

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \qquad (19)$$

и соответствующее тождество

$$(1 - x^2)P_n''(x; \alpha, \beta) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]P_n'(x; \alpha, \beta) +$$
$$+ n(n + \alpha + \beta + 1)P_n(x; \alpha, \beta) \equiv 0. \qquad (20)$$

В частности, многочлены Лежандра, для которых $\alpha = \beta = 0$, удовлетворяют уравнению

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \qquad (21)$$

В случае многочленов Чебышева первого рода $\alpha = \beta = -1/2$. Поэтому уравнение для этих многочленов имеет вид

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \qquad (22)$$

Аналогично для многочленов Чебышева второго рода, учитывая условия $\alpha = \beta = 1/2$, находим дифференциальное уравнение

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0. \qquad (23)$$

В случае многочленов Гегенбауэра имеем $\alpha = \beta$. Поэтому из (19) получаем уравнение

$$(1 - x^2)y'' - 2(\alpha + 1)xy' + n(n + 2\alpha + 1)y = 0. \qquad (24)$$

Все эти уравнения в последующих главах будут получены независимо от материала настоящего параграфа. А здесь мы получили их как частные случаи теоремы 2.1.

§ 3. Обобщенная формула Родрига

Для классических ортогональных многочленов имеет место весьма важное представление через весовую функцию, которое называется *обобщенной формулой Родрига.*

Л е м м а 2.1. *Если весовая функция $h(x)$ на интервале ортогональности (a, b) удовлетворяет условию*

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{A(x)}{D(x)}, \qquad x \in (a, b), \qquad (1)$$

где, как обычно,

$$A(x) = p_0 + p_1x, \qquad D(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2, \qquad (2)$$

то функция

$$Q_n(x) = \frac{1}{h(x)}\,[h(x)D^n(x)]^{(n)} \tag{3}$$

есть многочлен степени не выше n.

Доказательство. При фиксированном n рассмотрим функцию

$$\Gamma_k(x;n) = [h(x)D^n(x)]^{(k)}. \tag{4}$$

При $k = 0$ и $k = 1$, используя (1), имеем

$$\Gamma_0(x;n) = h(x)D^n(x),$$

$$\Gamma_1(x;n) = h'(x)D^n(x) + h(x)nD^{n-1}(x)D'(x) = \\ = h(x)D^{n-1}(x)[A(x) + nD'(x)] = h(x)D^{n-1}(x)R_1(x),$$

где $R_1(x)$ означает стоящий в квадратных скобках многочлен степени не более единицы. Методом индукции докажем, что для величины (4) имеет место представление

$$\Gamma_k(x;n) = h(x)D^{n-k}(x)R_k(x), \tag{5}$$

где $R_k(x)$ — многочлен степени не более k. Сделаем индуктивный переход от k к $k+1$. Продифференцируем функцию (5) еще один раз. Используя (1), находим

$$\Gamma_{k+1}(x;n) = [\Gamma_k(x;n)]' = h'(x)D^{n-k}(x)R_k(x) + \\ + h(x)(n-k)D^{n-k-1}(x)D'(x)R_k(x) + h(x)D^{n-k}(x)R_k'(x) = \\ = h(x)D^{n-k-1}(x)[A(x)R_k(x) + (n-k)D'(x)R_k(x) + D(x)R_k'(x)] = \\ = h(x)D^{n-k-1}(x)R_{k+1}(x), \tag{6}$$

где многочлен $R_{k+1}(x)$ имеет степень не более $k+1$ и определяется равенством

$$R_{k+1}(x) = [A(x) + (n-k)D'(x)]R_k(x) + D(x)R_k'(x). \tag{7}$$

Этим формула (5) установлена. Положим в этой формуле $k = n$ и подставим функцию $\Gamma_n(x;n)$ в равенство (3). В результате получим, что $Q_n(x)$ есть многочлен степени не выше n. Этим лемма 2.1 доказана.

Заметим, что в лемме 2.1 не использовано второе условие из определения классических ортогональных многочленов, а именно предельные соотношения (2.2). Следовательно, лемма 2.1 справедлива для любой из семи функций $\{\varphi_m(x)\}$, определенных в § 1, в качестве решений дифференциального уравнения Пирсона, причем каждую из этих функций можно рассматривать на любом интервале, содержащемся в области существования.

Теорема 2.2. *Для классических ортогональных многочленов имеет место формула Родрига*

$$F_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)} [h(x)D^n(x)]^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где $\{c_n\}$ *— некоторые коэффициенты.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 правая часть равенства (8) есть многочлен степени не выше n. Далее, из формулы (5), используя условия (2.2), находим

$$\Gamma_k(a; n) = \Gamma_k(b; n) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поэтому в силу (4) при тех же k имеем равенства

$$[h(x)D^n(x)]^{(k)}\Big|_{x=a} = [h(x)D^n(x)]^{(k)}\Big|_{x=b} = 0.$$

Следовательно, для многочлена (3) получаем

$$\int_a^b h(x)x^k Q_n(x)\,dx = \int_a^b x^k [h(x)D^n(x)]^{(n)}\,dx =$$

$$= x^k [h(x)D^n(x)]^{(n-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} - k\int_a^b x^{k-1}[h(x)D^n(x)]^{(n-1)}\,dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k k! \int_a^b [h(x)D^n(x)]^{(n-k)}\,dx =$$

$$= (-1)^k k!\,[h(x)D^n(x)]^{(n-k-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0. \tag{9}$$

Докажем теперь, что многочлен $Q_n(x)$, определяемый формулой (3) при условиях (2.2), имеет степень точно n. Допустим противное, что $Q_n(x)$ имеет степень меньше n. Тогда, поскольку равенство (9) имеет место при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то, умножая каждое из этих равенств на соответствующий коэффициент многочлена $Q_n(x)$ и складывая эти равенства почленно, получим

$$\int_a^b h(x)Q_n^2(x)\,dx = 0.$$

А это равенство в силу леммы 1.2 невозможно, ибо $h(x)$ есть весовая функция.

Итак, многочлен $Q_n(x)$ имеет степень n. А тогда из условий (9) следует, что он лишь множителем может отличаться от ортогонального многочлена $F_n(x)$, соответствующего весовой функции $h(x)$. Этим формула (8) и теорема 2.2 доказаны.

Формулу (8) в силу (3) можно записать в виде

$$F_n(x) = c_n Q_n(x). \tag{10}$$

Поэтому возникает задача вычислить старший коэффициент многочлена $Q_n(x)$. Но для дальнейшего изложения необходимо подсчитать и второй коэффициент этого многочлена. Для этого введем разложение

$$Q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots \tag{11}$$

и определим эти два коэффициента.

Лемма 2.2. *Для двух старших коэффициентов многочлена $Q_n(x)$ имеют место формулы*

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} [\,p_1 + (n+k)q_2], \tag{12}$$

$$b_n = n\,\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}\,a_n. \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим через $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ первый и второй старшие коэффициенты многочлена $R_k(x)$ из формулы (5), т. е. полагаем

$$R_k(x) = a_k^{(n)} x^k + b_k^{(n)} x^{k-1} + \ldots \tag{14}$$

Тогда из формулы (7), учитывая (2), имеем равенство

$$\begin{aligned} a_{k+1}^{(n)} x^{k+1} + b_{k+1}^{(n)} x^k + \ldots = \\ = [\,p_0 + p_1 x + (n-k)(q_1 + 2q_2 x)](a_k^{(n)} x^k + b_k^{(n)} x^{k-1} + \ldots) + \\ + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2)[k a_k^{(n)} x^{k-1} + (k-1) b_k^{(n)} x^{k-2} + \ldots]. \end{aligned} \tag{15}$$

Сравнивая старшие коэффициенты в левой и правой частях равенства (15), находим

$$a_{k+1}^{(n)} = [\,p_1 + (2n-k)q_2] a_k^{(n)}. \tag{16}$$

Далее, равенства (4) и (5) при $k = n$ имеют вид

$$\Gamma_n(x;n) = [h(x)D^n(x)]^{(n)}, \qquad \Gamma_n(x;n) = h(x)R_n(x).$$

Следовательно, в силу формулы (3) многочлены $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ совпадают. Поэтому, применяя равенство (16), находим

$$\begin{aligned} a_n = a_n^{(n)} = [\,p_1 + (n+1)q_2] a_{n-1}^{(n)} = \\ = [\,p_1 + (n+1)q_2][\,p_1 + (n+2)q_2] a_{n-2}^{(n)} = \ldots \\ \ldots = [\,p_1 + (n+1)q_2][\,p_1 + (n+2)q_2] \ldots [\,p_1 + 2nq_2] a_0^{(n)}. \end{aligned}$$

В силу (4) имеем $a_0^{(n)} = 1$. Таким образом, формула (12) доказана.

Аналогичным образом для определения второго коэффициента b_n приравниваем в формуле (15) коэффициенты при x^k слева и справа.

В результате находим

$$b_{k+1}^{(n)} = [p_0 + (n-k)q_1]a_k^{(n)} + [p_1 + (n-k)2q_2]b_k^{(n)} + \\ + kq_1 a_k^{(n)} + q_2(k-1)b_k^{(n)} = [p_1 + (2n-k-1)q_2]b_k^{(n)} + (p_0 + nq_1)a_k^{(n)}. \quad (17)$$

Далее, положим в формуле (17) сначала $k=0$, а затем $k=1$. Вследствие этого, учитывая равенства $a_0^{(n)} = 1$, $b_0^{(n)} = 0$ и равенство (16) при $k=0$, получаем

$$b_1^{(n)} = p_0 + nq_1,$$

$$b_2^{(n)} = [p_1 + (2n-2)q_2]b_1^{(n)} + (p_0 + nq_1)a_1^{(n)} = \\ = [p_1 + (2n-2)q_2](p_0 + nq_1) + (p_0 + nq_1)(p_1 + 2nq_2) = \\ = 2[p_1 + (2n-1)q_2](p_0 + nq_1) = 2\,\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}\,a_2^{(n)}.$$

А теперь методом индукции докажем равенство

$$b_k^{(n)} = k\,\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}\,a_k^{(n)}. \quad (18)$$

Для этого подставляем значение (18) в равенство (17). В результате находим последовательно

$$b_{k+1}^{(n)} = [p_1 + (2n-k-1)q_2]k\,\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}\,a_k^{(n)} + (p_0 + nq_1)a_k^{(n)} = \\ = \frac{kp_1 + k(2n-k-1)q_2 + p_1 + 2nq_2}{p_1 + 2nq_2}\,(p_0 + nq_1)a_k^{(n)} = \\ = (k+1)\,\frac{p_1 + (2n-k)q_2}{p_1 + 2nq_2}\,(p_0 + nq_1)a_k^{(n)} = (k+1)\,\frac{p_0 + nq_1}{p_1 + 2nq_2}\,a_{k+1}^{(n)}.$$

Здесь мы воспользовались равенством (16). Таким образом, индукция проведена и формула (18) доказана.

В формуле (18) полагаем $k=n$. В результате получим $b_n = b_n^{(n)}$. Этим формула (13) и лемма 2.2 доказаны.

Подсчитаем теперь коэффициенты a_n и b_n во всех основных частных случаях.

В случае многочленов Якоби имеем

$$A(x) = (\beta - \alpha) - (\alpha + \beta)x, \qquad D(x) = 1 - x^2. \quad (19)$$

Следовательно, из формулы (12) получаем

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}[-(\alpha+\beta) + (n+k)(-1)] = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(\alpha+\beta+n+k) = \\ = (-1)^n(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2)\ldots(\alpha+\beta+n+n). \quad (20)$$

Далее применяем гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt, \qquad p > 0. \tag{21}$$

Свойства этой функции хорошо известны [IV.1, IV.5, IV.6]. В частности, для этой функции справедлива рекуррентная формула

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p), \qquad p > 0. \tag{22}$$

Применяя эту формулу несколько раз, получим равенство

$$\Gamma(\alpha+\beta+2n+1) = \\ = (\alpha+\beta+2n)\ldots(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1). \tag{23}$$

С помощью этого равенства формулу (20) представляем в виде

$$a_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \tag{24}$$

Используя этот результат, в силу формул (13) и (19) вычисляем второй коэффициент. Имеем

$$b_n = n\,\frac{p_0+nq_1}{p_1+2nq_2}\,a_n = n\,\frac{\beta-\alpha}{-(\alpha+\beta)-2n}\,a_n = \\ = (-1)^n(\alpha-\beta)n\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \tag{25}$$

Для многочленов Чебышева–Эрмита

$$A(x) = -2x, \qquad D(x) = 1.$$

Следовательно, в этом случае находим

$$a_n = \prod_{k=1}^n (-2) = (-1)^n 2^n, \qquad b_n = 0. \tag{26}$$

В случае многочленов Чебышева–Лагерра

$$A(x) = \alpha - x, \qquad D(x) = x.$$

Поэтому в силу формул (12) и (13) здесь имеем

$$a_n = \prod_{k=1}^n (-1) = (-1)^n, \qquad b_n = (-1)^{n+1}n(\alpha+n). \tag{27}$$

Эти формулы для коэффициентов a_n и b_n применяются для получения нормированных классических ортогональных многочленов и для подсчета коэффициентов в рекуррентных формулах и формулах Кристоффеля–Дарбу. А сейчас можно получить формулы Родрига для классических ортогональных многочленов с единичным старшим

коэффициентом. Учитывая равенства (24), (26) и (27), из (8) находим формулы

$$\widetilde{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \tag{28}$$

$$\widetilde{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)}, \tag{29}$$

$$\widetilde{P}_n(x;\alpha,\beta) = \\ = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n]^{(n)}. \tag{30}$$

Разумеется, все эти формулы получаются непосредственным вычислением после выполнения операции дифференцирования.

§ 4. Стандартизация и нормирование классических ортогональных многочленов

Формула (3.8) определяет ортогональный многочлен с точностью до коэффициента c_n. Этот коэффициент можно выбрать различными способами. Так, в конце § 3 после вычисления старшего коэффициента a_n многочлена $Q_n(x)$ мы, подчиняя выбор c_n условию $c_n a_n = 1$, получим формулу Родрига для ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом. Можно выбрать последовательность $\{c_n\}$ таким образом, чтобы получить ортонормированные многочлены. Но очень часто числа $\{c_n\}$ в формуле Родрига (3.8) выбирают так, чтобы максимально упростить основные формулы для ортогональных многочленов и, самое главное, облегчить применение их в различных практических задачах. Такой, третий, на первый взгляд искусственный способ выбора коэффициентов $\{c_n\}$ в формуле Родрига называется *стандартизацией классических ортогональных многочленов.*

Как будет ясно из дальнейшего изложения, наиболее рациональной является следующая стандартизация многочленов Чебышева–Эрмита, многочленов Чебышева–Лагерра и многочленов Якоби:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \tag{1}$$

$$L_n(x;\alpha) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)}, \tag{2}$$

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n]^{(n)}}{n!\, 2^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta}. \tag{3}$$

Именно при таком выборе коэффициентов $\{c_n\}$ в формуле Родрига (3.8) классические ортогональные многочлены наиболее удобны для изучения и применения.

Рассмотрим теперь второй способ выбора коэффициентов в формуле Родрига (3.8). Сейчас мы выберем эти коэффициенты таким образом, чтобы формула Родрига (3.8) определяла ортонормированные классические многочлены. В силу формулы (3.10) для этого необходимо подсчитать среднюю квадратическую с весом $h(x)$ норму многочлена $Q_n(x)$, определяемого равенством (3.3). Учитывая тот факт, что старший коэффициент многочлена $Q_n(x)$ есть a_n, с помощью формулы (3.3) находим

$$\|Q_n\|^2 = \int_a^b h(x)Q_n^2(x)\,dx = a_n \int_a^b x^n h(x)Q_n(x)\,dx = \\ = a_n \int_a^b x^n [h(x)D^n(x)]^{(n)}\,dx.$$

Далее применяем формулу (3.9) при $k = n$. В результате находим

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n!\, a_n \int_a^b h(x)D^n(x)\,dx. \tag{4}$$

Последний интеграл нетрудно подсчитать во всех трех частных случаях.

В случае многочленов Чебышева–Эрмита $D(x) \equiv 1$. Поэтому, учитывая (3.26), из формулы (4) получаем

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n!\, a_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = (-1)^n n!\, a_n\sqrt{\pi} = n!\, 2^n\sqrt{\pi}.$$

Следовательно, ортонормированные многочлены Чебышева–Эрмита имеют вид

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n\sqrt{\pi}}}\, e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}. \tag{5}$$

А старшие коэффициенты этих многочленов определяются формулой

$$\mu_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n\sqrt{\pi}}}(-1)^n 2^n = \sqrt{\frac{2^n}{n!\,\sqrt{\pi}}}. \tag{6}$$

Аналогично в случае многочленов Чебышева–Лагерра, для величины (4), учитывая равенство $D(x) \equiv x$ и формулы (3.21) и (3.27), находим

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n!\, a_n \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} x^n\,dx = \\ = (-1)^n n!\,(-1)^n\Gamma(\alpha+n+1) = n!\,\Gamma(\alpha+n+1).$$

Поэтому для ортонормированного многочлена Чебышева–Лагерра и его старшего коэффициента справедливы формулы

$$\widehat{L}_n(x;\alpha) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}\, x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)}, \tag{7}$$

$$\mu_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь величину (4) в случае многочленов Якоби. Поскольку в этом случае $D(x) = 1 - x^2$, то интеграл из формулы (4) приводится к виду

$$J_n = \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n\, dx = \int\limits_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\, dx.$$

После замены переменной $x = 2t - 1$ находим

$$J_n = 2\int\limits_{0}^{1} (2-2t)^{\alpha+n} (2t)^{\beta+n}\, dt = 2^{\alpha+\beta+2n+1} \int\limits_{0}^{1} t^{\beta+n} (1-t)^{\alpha+n}\, dt. \tag{9}$$

Далее используем известное представление *бета-функции Эйлера* [IV.1, IV.5] через гамма-функцию

$$B(p,q) = \int\limits_{0}^{1} (1-x)^{p-1} x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{10}$$

Учитывая формулы (9), (10) и (3.24), из (4) находим

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n!\, a_n 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} =$$

$$= n!\, 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} =$$

$$= n!\, 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Таким образом, вычислена норма многочлена $Q_n(x)$. Следовательно, ортонормированный многочлен Якоби имеет вид

$$\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{n!\, 2^{\alpha+\beta+2n+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\, (-1)^n Q_n(x). \tag{11}$$

Наконец, учитывая формулу (3.3) при условиях (3.19), получаем

$$\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta) =$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{n!\, 2^{\alpha+\beta+2n+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\, \frac{[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)}}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}. \tag{12}$$

В частности, если $\alpha = \beta = 0$, то имеем ортонормированные многочлены Лежандра

$$\widehat{P}_n(x) = \widehat{P}_n(x;0) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,[(1-x^2)^n]^{(n)}. \tag{13}$$

Далее, в случае многочленов Якоби старший коэффициент многочлена $Q_n(x)$ определяется формулой (3.24). Учитывая эту формулу, из равенства (11) находим старший коэффициент ортонормированного многочлена Якоби:

$$\mu_n(\alpha,\beta) = \\ = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{n!\,2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \\ = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{n!\,2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}. \tag{14}$$

В частности, полагая $\mu_n(\alpha) = \mu_n(\alpha,\alpha)$, имеем

$$\mu_n(0) = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2n+2)}{n!\,2\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)}} = \\ = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{(2n+1)!\,(2n)!}{2(n!)^4}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \tag{15}$$

$$\mu_n\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\Gamma(2n)\,\Gamma(2n+1)}{n!\,\Gamma^2(n+1/2)\Gamma(n)}} = \frac{(2n-1)!}{2^n\Gamma(n+1/2)}\sqrt{\frac{2n}{n!\,\Gamma(n)}}, \tag{16}$$

$$\mu_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\Gamma(2n+2)\,\Gamma(2n+3)}{n!\,2^2\Gamma^2(n+3/2)\Gamma(n+2)}} = \frac{(2n+1)!\,\sqrt{2}}{2^{n+1}\Gamma(n+3/2)n!}. \tag{17}$$

В формулах (15)–(17) указаны старшие коэффициенты соответственно ортонормированных многочленов Лежандра, многочленов Чебышева первого и второго рода.

§ 5. Производящие функции

Для системы многочленов $\{B_n(x)\}$, ортогональных на интервале (a,b) с весом $h(x)$, можно рассматривать степенной ряд и его сумму

$$F(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\,w^n, \qquad x \in (a,b). \tag{1}$$

При некоторых минимальных условиях на весовую функцию этот ряд имеет положительный радиус сходимости. Тогда функция $F(x,w)$ называется *производящей функцией* системы многочленов $\{B_n(x)\}$.

Производящие функции для классических ортогональных многочленов можно вычислить.

Рассмотрим многочлены $\{Q_n(x)\}$, определенные формулой (3.3). Эта формула справедлива в трех случаях, когда весовая функция $h(x)$ определяется равенствами (1.4), (1.7) или (1.9). В первом из них функция $h(x)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость. Если α — дробное число, то при условии (1.7) функция $h(x)$ аналитически продолжается на плоскость с разрезом по интервалу $(-\infty, 0)$. А в последнем случае функция $h(z)$ аналитическая в комплексной плоскости с разрезом по интервалам $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$. В силу теоремы единственности аналитического продолжения равенство (3.3) продолжается в каждую из указанных областей, т. е. имеем

$$Q_n(z) = \frac{1}{h(z)}[h(z)D^n(z)]^{(n)}, \tag{2}$$

где z — комплексное переменное.

Теорема 2.3. *Если z — точка аналитичности функции $h(z)$, то для производящей функции системы многочленов* (2)

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(z)}{n!}\, w^n \tag{3}$$

имеет место представление

$$F(z, w) = \frac{1}{h(z)} \frac{h(\lambda)}{1 - wD'(\lambda)}, \tag{4}$$

где $\lambda = \lambda(z, w)$ есть тот корень квадратного уравнения

$$\zeta - z - wD(\zeta) = 0, \tag{5}$$

который при малых $|w|$ расположен ближе к точке z.

Доказательство. В силу формулы (3.2) уравнение (5) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \zeta - z - w(q_0 + q_1\zeta + q_2\zeta^2) = 0, \\ q_2 w\zeta^2 + (q_1 w - 1)\zeta + (wq_0 + z) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Так как z фиксировано, то при малых по модулю w один корень λ этого уравнения близок к точке z, а второй велик по модулю, если только $q_2 \neq 0$. Проведем такой замкнутый гладкий контур Γ, который охватывает точки z и λ, но не содержит второго корня уравнения (6), причем функция $h(z)$ является аналитической внутри контура Γ и на самом контуре.

Рассмотрим функцию

$$F(z, w) = \frac{1}{h(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z - wD(\zeta)}. \tag{7}$$

Поскольку внутри контура Г знаменатель имеет единственный простой нуль в точке $\lambda = \lambda(z, w)$, то по теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z - wD(\zeta)} = \frac{h(\lambda)}{1 - wD'(\lambda)}. \tag{8}$$

Таким образом, для функции (7) представление (4) доказано.

С другой стороны, при малых по модулю w имеем

$$\left|\frac{wD(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leqslant q < 1, \qquad \zeta \in \Gamma.$$

Поэтому при таких w подынтегральное выражение (7) можно представить в виде

$$\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\frac{1}{1 - \dfrac{wD(\zeta)}{\zeta - z}} = \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{wD(\zeta)}{\zeta - z}\right]^n.$$

Полученный ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in \Gamma$. Подставляем это разложение под знак интеграла (7) и интегрируем почленно. В результате имеем

$$F(z, w) = \frac{1}{h(z)}\sum_{n=0}^{\infty} w^n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h(\zeta)D^n(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{9}$$

Так как контур Г находится в области аналитичности функции $h(z)$ и охватывает точку z, то в силу формулы Коши для производных имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h(\zeta)D^n(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{n!}\,[h(z)D^n(z)]^{(n)}.$$

Подставляя это значение в формулу (9) и учитывая равенство (2), получим разложение (3). Таким образом, теорема 2.3 доказана.

Вычислим производящую функцию для частных случаев классических ортогональных многочленов.

В случае многочленов Чебышева–Эрмита $D(x) = 1$. Поэтому уравнение (5) имеет вид $\zeta - z - w = 0$. Следовательно, $\lambda = z + w$, и из формулы (4) находим производящую функцию для многочленов Чебышева–Эрмита

$$F(z, w) = \frac{h(\lambda)}{h(z)} = e^{-\lambda^2 + z^2} = e^{-(w^2 + 2zw)}.$$

Так как для стандартизованных многочленов Чебышева–Эрмита мы приняли определение (4.1), то в силу (3) имеем формулу

$$e^{-(w^2+2zw)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{H_n(z)}{n!}\,w^n. \tag{10}$$

Заменяя здесь w на $-w$, получим

$$e^{2zw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\, w^n. \tag{11}$$

Из свойств производящей функции следует, что оба ряда, (10) и (11), сходятся при любых конечных z и w.

В случае многочленов Чебышева–Лагерра имеем $D(x) \equiv x$. Следовательно, уравнение (5) в этом случае имеет вид $\zeta - z - w\zeta = 0$. Поэтому имеем $\lambda = z/(1-w)$. При этом условии из формулы (4) находим

$$F(z,w) = \frac{\left(\dfrac{z}{1-w}\right)^{\alpha} e^{-z/(1-w)}}{z^{\alpha} e^{-z}(1-w)} = \frac{1}{(1-w)^{\alpha+1}}\, e^{-zw/(1-w)}.$$

В силу стандартизации (4.2) имеем

$$Q_n(x) = n!\, L_n(x;\alpha).$$

Поэтому из формулы (3) получаем

$$(1-w)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{zw}{1-w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z;\alpha) w^n. \tag{12}$$

Из структуры производящей функции следует, что ряд (12) сходится при условии $|w| < 1$.

Вычислим теперь производящую функцию для многочленов Лежандра. Так как в этом случае $D(x) = 1 - x^2$, то уравнение (5) имеет вид

$$\zeta - z - w(1-\zeta^2) = 0.$$

Из двух его корней выбираем тот, который при малых $|w|$ ближе к z, т. е. полагаем

$$\lambda = \lambda(z,w) = \frac{1}{2w}\left[-1 + \sqrt{1+4w(z+w)}\,\right]. \tag{13}$$

Здесь имеется в виду главное значение корня. В силу формулы (13) знаменатель в формуле (4) имеет вид

$$1 - wD'(\lambda) = 1 + 2\lambda w = \sqrt{1+4w(z+w)}. \tag{14}$$

Таким образом, для многочленов Лежандра

$$Q_n(x) = [(1-x^2)^n]^{(n)}$$

имеем производящую функцию

$$\frac{1}{\sqrt{1+4w(z+w)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(z)}{n!}\, w^n. \tag{15}$$

Для перехода к стандартизованным многочленам Лежандра

$$P_n(x) = P_n(x;0,0) = \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n}\, [(1-x^2)^n]^{(n)} \tag{16}$$

в формуле (15) заменяем w на $-w/2$. В результате имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)w^n. \tag{17}$$

Наконец, определим производящую функцию для многочленов Якоби. Поскольку в этом случае, как и для многочленов Лежандра $D(x) = 1 - x^2$, то формулы (13) и (14) сохраняются. Далее, из равенства

$$\lambda - z - w(1-\lambda^2) = 0$$

находим тождества

$$1 - z = (1-\lambda)[1 + w(1+\lambda)] = 0,$$

$$1 + z = (1+\lambda)[1 - w(1-\lambda)] = 0.$$

Поэтому функция (4) в данном случае имеет вид

$$F(z,w) = \frac{1}{h(z)}\frac{h(\lambda)}{1-wD'(\lambda)} = \frac{(1-\lambda)^\alpha(1+\lambda)^\beta}{(1-z)^\alpha(1+z)^\beta\sqrt{1+4zw+4w^2}} = \\ = \frac{1}{[1+w(1+\lambda)]^\alpha[1-w(1-\lambda)]^\beta R}, \tag{18}$$

где для краткости введено обозначение

$$R = \sqrt{1+4zw+4w^2}. \tag{19}$$

В формулах (18) и (19) имеются в виду главные значения многозначных функций. Вычисляем выражения, стоящие в квадратных скобках в знаменателе дроби (18). Учитывая формулы (13) и (19), находим

$$1 + w(1+\lambda) = 1 + w + \frac{1}{2}(-1+R) = \frac{1}{2} + w + \frac{1}{2}R,$$

$$1 - w(1-\lambda) = 1 - w + \frac{1}{2}(-1+R) = \frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}R.$$

Следовательно, из формулы (3) получаем разложение

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+w+\frac{1}{2}R\right)^\alpha\left(\frac{1}{2}-w+\frac{1}{2}R\right)^\beta R} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n(z)}{n!}w^n, \tag{20}$$

где в силу (3.3) имеем

$$Q_n(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\left[(1-z)^{\alpha+n}(1+z)^{\beta+n}\right]^{(n)}.$$

Далее, в силу стандартизации (4.3) имеем равенство

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}Q_n(x).$$

Поэтому, заменяя в разложении (20) w на $-w/2$, получим формулу

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-w+A)^{\alpha}(1+w+A)^{\beta}A} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z;\alpha,\beta)w^n, \tag{21}$$

где введено обозначение

$$A = \sqrt{1-2zw+w^2}. \tag{22}$$

В формулах (21) и (22) имеются в виду главные значения многозначных функций. А переменное w в зависимости от фиксированного z изменяется в достаточно малой окрестности начала координат.

В формулах (11), (12), (17) и (21) нетрудно перейти от стандартизованных многочленов к ортонормированным, но мы не будем этого делать, ибо разложения производящих функций большей частью применяются именно в приведенных выше формах.

§ 6. Ортогональность производных

В настоящем параграфе доказывается, что производные классических ортогональных многочленов ортогональны на том же интервале и также входят в систему классических ортогональных многочленов.

Пусть многочлены $\{F_n(x)\}$ ортогональны на интервале (a,b) с весовой функцией $h(x)$, которая удовлетворяет условию (2.1)

$$h'(x)D(x) = h(x)A(x). \tag{1}$$

Так как $A(x)$ есть многочлен нулевой или первой степени, то при любом натуральном $k < n$ имеет место равенство

$$J_{nk} = \int_a^b F_n(x)x^{k-1}A(x)h(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

В силу равенства (1) этот интеграл приводится к виду

$$J_{nk} = \int_a^b F_n(x)x^{k-1}D(x)h'(x)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям, находим

$$J_{nk} = [F_n(x)x^{k-1}D(x)h(x)]\Big|_a^b - \int_a^b [F_n(x)x^{k-1}D(x)]'h(x)\,dx.$$

Внеинтегральные члены равны нулю, ибо на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$h(a)D(a) = h(b)D(b) = 0. \tag{3}$$

Следовательно, имеем

$$J_{nk} = -\int_a^b [F_n(x)x^{k-1}D(x)]'h(x)\,dx =$$
$$= -\int_a^b F_n'(x)x^{k-1}D(x)h(x)\,dx - (k-1)\int_a^b F_n(x)x^{k-2}D(x)h(x)\,dx -$$
$$- \int_a^b F_n(x)x^{k-1}D'(x)h(x)\,dx. \quad (4)$$

Так как степень многочлена $D(x)$ не превышает двух и выполняется условие $k < n$, то второй и третий интегралы в формуле (4) равны нулю. Поэтому, учитывая равенство (2), из (4) находим

$$\int_a^b F_n'(x)x^{k-1}D(x)h(x)\,dx = 0, \qquad 0 < k < n.$$

В этом равенстве k — любое натуральное число, удовлетворяющее условию $0 < k < n$. Следовательно, многочлен $F_n'(x)$ является ортогональным с весовой функцией

$$h_1(x) = h(x)D(x), \qquad x \in (a,b). \quad (5)$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению Пирсона. В самом деле, учитывая равенство (1), находим

$$\frac{h_1'(x)}{h_1(x)} = \frac{h'(x)D(x) + h(x)D'(x)}{h(x)D(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{D'(x)}{D(x)} =$$
$$= \frac{A(x) + D'(x)}{D(x)} = \frac{A_1(x)}{D(x)}. \quad (6)$$

Далее, поскольку $D(x)$ есть многочлен не более второй степени, то многочлен $A_1(x)$ имеет степень не более единицы, и в силу формул (3) и (5) выполняются граничные условия

$$h_1(a)D(a) = h_1(b)D(b) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, система производных $\{F_n'(x)\}$ ортогональна на интервале (a,b) с весом (5), удовлетворяющим условиям (6) и (7).

Аналогичные рассуждения можно применить и к системе производных $\{F_{n+1}'(x)\}$ и убедиться в ортогональности системы вторых производных $\{F_{n+2}''(x)\}$. В самом деле, так как $A_1(x) = A(x) + D'(x)$ есть многочлен не выше первой степени, то при любом натуральном $k < n$ аналогично (2) имеем равенство

$$\int_a^b F_{n+1}'(x)x^{k-1}A_1(x)h_1(x)\,dx = 0. \quad (8)$$

Используя условия (6) и (7), этот интеграл аналогично равенству (4) приводим к виду

$$\int_a^b F'_{n+1}(x)x^{k-1}D(x)h'_1(x)\,dx =$$

$$= -\int_a^b [F'_{n+1}(x)x^{k-1}D(x)]'h_1(x)\,dx = -\int_a^b F''_{n+1}(x)x^{k-1}D(x)h_1(x)\,dx -$$

$$- (k-1)\int_a^b F'_{n+1}(x)x^{k-2}D(x)h_1(x)\,dx -$$

$$- \int_a^b F'_{n+1}(x)x^{k-1}D'(x)h_1(x)\,dx = 0.$$

Второй и третий интегралы справа равны нулю в силу ортогональности системы производных $\{F'_{n+1}(x)\}$ с весовой функцией $h_1(x)$. Следовательно, имеем

$$\int_a^b F''_{n+1}(x)x^{k-1}D(x)h_1(x)\,dx = 0, \qquad 0 < k < n.$$

Поскольку здесь k — любое натуральное число, удовлетворяющее условию $0 < k < n$, то многочлены $\{F''_{n+2}(x)\}$ ортогональны на интервале (a, b) с весовой функцией

$$h_2(x) = h_1(x)D(x) = h(x)D^2(x).$$

Эта весовая функция удовлетворяет уравнению Пирсона

$$\frac{h'_2(x)}{h_2(x)} = \frac{h'(x)D^2(x) + h(x)2D(x)D'(x)}{h(x)D^2(x)} = \frac{A(x) + 2D'(x)}{D(x)} = \frac{A_2(x)}{D(x)}.$$

Далее, методом индукции нетрудно доказать, что система производных $\{F^{(m)}_{n+m}(x)\}$ ортогональна на том же интервале (a, b) с весовой функцией

$$h_m(x) = h(x)D^m(x), \qquad x \in (a, b), \tag{9}$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{h'_m(x)}{h_m(x)} = \frac{A(x) + mD'(x)}{D(x)} = \frac{A_m(x)}{D(x)}, \tag{10}$$

а на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$h_m(a)D(a) = h_m(b)D(b) = 0. \tag{11}$$

В самом деле, будем считать выполненными равенства (9)–(11), и сделаем переход от m к $m+1$. Аналогично равенствам (2) и (8)

в силу индуктивного предположения об ортогональности системы производных $\{F_{n+m}^{(m)}(x)\}$ при $0 < k < n$ имеем

$$J_{nk}^{(m)} = \int_a^b F_{n+m}^{(m)}(x)x^{k-1}A_m(x)h_m(x)\,dx = 0.$$

Используя условия (10) и (11), находим

$$J_{nk}^{(m)} = \int_a^b F_{n+m}^{(m)}(x)x^{k-1}D(x)h'_m(x)\,dx =$$

$$= -\int_a^b F_{n+m}^{(m+1)}(x)x^{k-1}D(x)h_m(x)\,dx -$$

$$-(k-1)\int_a^b F_{n+m}^{(m)}(x)x^{k-2}D(x)h_m(x)\,dx -$$

$$-\int_a^b F_{n+m}^{(m)}(x)x^{k-1}D'(x)h_m(x)\,dx = 0.$$

Второй и третий интегралы в правой части равны нулю. Следовательно, система производных ортогональна с весом

$$h_{m+1}(x) = h_m(x)D(x) = h(x)D^{m+1}(x).$$

Далее, в силу равенства (10) имеем

$$\frac{h'_{m+1}(x)}{h_{m+1}(x)} = \frac{h'_m(x)D(x) + h_m(x)D'(x)}{h_m(x)D(x)} = \frac{h'_m(x)}{h_m(x)} + \frac{D'(x)}{D(x)} =$$

$$= \frac{A_m(x) + D'(x)}{D(x)} = \frac{A(x) + (m+1)D'(x)}{D(x)}.$$

Выполнение условия (11) для функций $h_{m+1}(x)$ очевидно. Таким образом, индукция проведена полностью.

Если $D(x) = q_0 > 0$, то функция (9) только множителем отличается от весовой функции $h(x)$. Поскольку этому случаю соответствуют обобщенные многочлены Чебышева–Эрмита, то, следовательно, эти многочлены с точностью до постоянного множителя остаются многочленами Чебышева–Эрмита и после дифференцирования.

Пусть теперь $D(x) = q_1 x$. Тогда в силу (1.7) весовая функция имеет вид

$$h(x) = c_2 x^{\alpha} e^{-\beta x}, \qquad x \in (0, \infty), \quad c_2 > 0.$$

Следовательно, в этом случае в силу формулы (9) при дифференцировании m раз обобщенных многочленов Чебышева–Лагерра снова получаются обобщенные многочлены Чебышева–Лагерра с параметром $\alpha + m$ вместо α, т. е. весовая функция после дифференцирования

многочленов имеет вид

$$h_m(x) = c_m x^{\alpha+m} e^{-\beta x}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Если интервал ортогональности (a, b) конечен, то

$$D(x) = (x - a)(b - x),$$

и весовая функция имеет вид

$$h(x) = (b - x)^{\alpha} (x - a)^{\beta}.$$

Поэтому при дифференцировании m раз обобщенных многочленов Якоби получаются также обобщенные многочлены Якоби, ортогональные с весовой функцией

$$h_m(x) = c_m (b - x)^{\alpha+m} (x - a)^{\beta+m}.$$

Конкретные формулы дифференцирования всех трех систем классических ортогональных многочленов будут рассмотрены ниже в гл. V–VII.

В настоящей главе рассмотрены общие свойства классических ортогональных многочленов как единой системы. При этом из общих формул и теорем получены некоторые простые и конкретные свойства многочленов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Чебышева, Лежандра и общих многочленов Якоби. В последующих главах эти простые свойства для каждой системы отдельно будут доказаны более элементарно.

§ 7. Некоторые дополнения и задачи

В настоящей главе изложены основные свойства классических ортогональных многочленов. Рассмотрим их в общей совокупности.

1. Весовая функция классических ортогональных многочленов удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{y'}{y} = \frac{A(x)}{D(x)}, \qquad x \in (a, b). \tag{1}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$h(x) = \frac{1}{D(x)} \exp\Big[\int \frac{A(x) + D'(x)}{D(x)}\, dx \Big]. \tag{2}$$

Это решение рассматривается только на интервале (a, b), на концах которого выполняются условия

$$\lim_{x \to a+0} h(x) D(x) = \lim_{x \to b-0} h(x) D(x) = 0. \tag{3}$$

2. Классические ортогональные многочлены являются собственными функциями линейного дифференциального уравнения второго

порядка, т. е. удовлетворяют уравнению

$$D(x)y'' + [A(x) + D'(x)]y' - \gamma_n y = 0. \tag{4}$$

3. Ортогональные многочлены представляются через весовую функцию по формуле Родрига

$$F_n(x) = \frac{c_n}{h(x)}\,[h(x)D^n(x)]^{(n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

4. Имеется простая конструктивная формула представления производящей функции ортогональных многочленов через весовую функцию

$$F(z, w) = \frac{1}{h(z)}\,\frac{h(\lambda)}{1 - wD'(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{c_n n!}\,w^n, \tag{6}$$

где $\lambda = \lambda(z, w)$ есть тот корень уравнения

$$\zeta - z - wD(\zeta) = 0, \tag{7}$$

который при малых $|w|$ расположен ближе к точке z.

5. Производные $F_n'(x)$ ортогональны на том же интервале (a, b) с весовой функцией

$$h_1(x) = h(x)D(x), \qquad x \in (a, b). \tag{8}$$

Этими свойствами обладают только классические ортогональные многочлены, т. е. многочлены Чебышева, Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общие многочлены Якоби.

Рассмотренные свойства классических ортогональных многочленов являются весьма характерными по своим формулировкам. Поэтому предпринимались многочисленные попытки введения новых систем ортогональных многочленов, которые обладают хотя бы одним из вышеуказанных свойств, разумеется, в измененном и обобщенном виде. В этом направлении работали Б.М. Гагаев, Г.И. Барков, С.Н. Андрианов, В.П. Коноплев, К.В. Лащенов и другие.

Наибольшее внимание уделялось различным обобщениям дифференциального уравнения (4) и соответствующим системам ортогональных многочленов. Отдельно рассматриваются обобщения дифференциального уравнения Пирсона (1), в которых многочлены $A(x)$ и $D(x)$ имеют более высокие степени. Значительно обобщена задача об ортогональности производных ортогональных многочленов и формула (8). Подробные формулировки результатов имеются в работах [X.1, X.3, X.6].

Рассмотрим минимальное обобщение дифференциального уравнения Пирсона

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3} = \frac{A_2(x)}{D_3(x)}. \tag{9}$$

К этому уравнению можно применить всю схему исследования, которая была изложена в первых параграфах настоящей главы.

Можно рассмотреть следующие случаи.

A. Многочлен $D_3(x)$ имеет три различных действительных нуля.

B. Многочлен $D_3(x)$ имеет один двойной и один простой нуль.

C. Многочлен $D_3(x)$ имеет два мнимых сопряженных нуля и один действительный нуль.

D. Многочлен $D_3(x)$ имеет тройной нуль.

Во всех этих случаях надо найти решение $y = h(x)$ уравнения (9), определить интервал ортогональности и проверить условия вида (3) на концах. А затем, как в § 2, надо попытаться вывести для соответствующих ортогональных многочленов дифференциальное уравнение. В результате может получиться так называемое *дифференциально-возвратное уравнение*, в котором наряду с многочленом $B_n(x)$ и его производными будет фигурировать многочлен $B_{n-1}(x)$ степени $n-1$. К этому дифференциально-возвратному уравнению можно попытаться применить метод Лиувилля–Стеклова или какие-либо новые методы исследования асимптотических свойств решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [X.6].

Далее, все вышесказанное можно повторить относительно уравнения

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_{m-1}x^{m-1}}{q_0 + q_1 x + \ldots + q_m x^m} = \frac{A_{m-1}(x)}{D_m(x)}, \qquad m > 3. \tag{10}$$

Более того, можно рассматривать уравнение

$$\frac{y'}{y} = \frac{A_p(x)}{D_m(x)}, \tag{11}$$

где p и m независимы между собой. В этом случае также, возможно, получается дифференциально-возвратное уравнение, но содержащее несколько ортогональных многочленов меньших степеней.

Среди уравнений вида (11), на наш взгляд, наиболее простым является неклассический случай $m = p = 2$.

Следует заметить, что никаких обобщений формулы Родрига (5) и формулы производящей функции (6) в случае одного интервала пока, кажется, еще не найдено.

Аналоги классических ортогональных многочленов в случае двух и более интервалов ортогональности первоначально рассматривали А.А. Марков, Н.И. Ахиезер, В.Ф. Бржечка, Я.Л. Геронимус. А дальнейшие важные результаты получили Г.И. Барков и Н.П. Фадеев. В работах Н.П. Фадеева [XI.38, XI.39], а также в других его работах подробно рассмотрены аналоги классических ортогональных многочленов в случае двух симметричных относительно начала координат интервалов ортогональности. Приведем только одну формулировку.

Пусть многочлены $\{F_n(x)\}$ ортонормированы на множестве

$$E = (-b, -a) \cup (a, b), \qquad 0 < a < b < \infty,$$

с четной весовой функцией $h(x)$, удовлетворяющей уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{A_4(x)}{D_5(x)}, \qquad x \in E, \tag{12}$$

и некоторому нулевому условию на всех четырех концах.

В отличие от формулы (1) в формуле (12) многочлены $A_4(x)$ и $D_5(x)$ имеют степени соответственно не более 4 и 5. При этих условиях четный многочлен $F_{2n}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D_5(x)y'' + \Big[A_4(x) + D_5'(x) - \frac{3}{x}\,D_5(x)\Big]y' + \gamma_n x^3 y = 0.$$

В работах Н.П. Фадеева рассмотрены операторный аналог формулы Родрига, интегральные уравнения, производящие функции, а также введены в случае двух интервалов ортогональности аналоги многочленов Чебышева, Лежандра, Гегенбауэра и многочленов Чебышева–Эрмита.

Глава III

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

§ 1. Многочлены Чебышева первого рода

Из тригонометрического тождества

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta,$$

полагая в нем $\theta = \arccos x$, для функций

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

находим рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{2}$$

Поскольку $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$, то и при любом n функция $T_n(x)$ есть алгебраический многочлен степени n. Многочлены (1) называются *многочленами Чебышева первого рода.*

С помощью рекуррентной формулы (2) эти многочлены можно вычислять последовательно. Имеем

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1,\\
&T_1(x) = x,\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1,\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x,\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,\\
&T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Докажем, что многочлены (1) ортогональны на сегменте $[-1,1]$ с весовой функцией

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1). \tag{3}$$

В самом деле, в интеграле

$$J_{nm} = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

сделаем замену переменной $x = \cos\theta$ при условии $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тогда в силу формулы (1) $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, и этот интеграл приводится

к виду

$$J_{nm} = \int\limits_{\pi}^{0} \cos n\theta \cos m\theta \, \frac{-\sin\theta}{|\sin\theta|} \, d\theta = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \\ = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi/2, & n = m > 0, \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Этим ортогональность многочленов (1) доказана.

Из (4) следует, что *ортонормированные многочлены Чебышева первого рода* представляются через многочлены (1) по формулам

$$\widehat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x), \qquad n \geqslant 1, \qquad (5)$$

$$\widehat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Далее, из рекуррентной формулы (2) следует, что старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ равен 2^{n-1}. Следовательно, *многочлены Чебышева с единичным старшим коэффициентом* имеют вид

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \qquad n \geqslant 1. \qquad (6)$$

В отличие от многочленов (5) и (6) многочлены Чебышева первого рода $\{T_n(x)\}$, определяемые формулой (1), называются *стандартизованными.*

Рассмотрим теперь *нули многочленов Чебышева первого рода.* Согласно общей теореме о нулях ортогональных многочленов (теорема 1.7) все нули многочлена $T_n(x)$ действительны, различны и расположены на интервале $(-1, 1)$. Для этих нулей введем обозначение $\{x_k^{(n)}\}$.

Так как

$$T_n(x_k^{(n)}) = \cos(n \arccos x_k^{(n)}) = 0,$$

то, следовательно, имеем

$$n \arccos x_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2}\, \pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n}\, \pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

В силу периодичности косинуса другие значения k в правой части (7) не дают новых значений в формуле (8). Из формулы (8) следует, что, в отличие от общего случая (теорема 1.7), здесь нули многочленов Чебышева занумерованы в обратном порядке, т. е. имеют место неравенства

$$-1 < x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \ldots < x_k^{(n)} < \ldots < x_2^{(n)} < x_1^{(n)} < 1.$$

Далее, формула (8) указывает геометрический способ построения нулей многочленов Чебышева первого рода. В самом деле, для построения точек $\{x_k^{(n)}\}$ надо верхнюю полуокружность единичного радиуса разделить на $2n$ равных частей, а затем спроектировать на

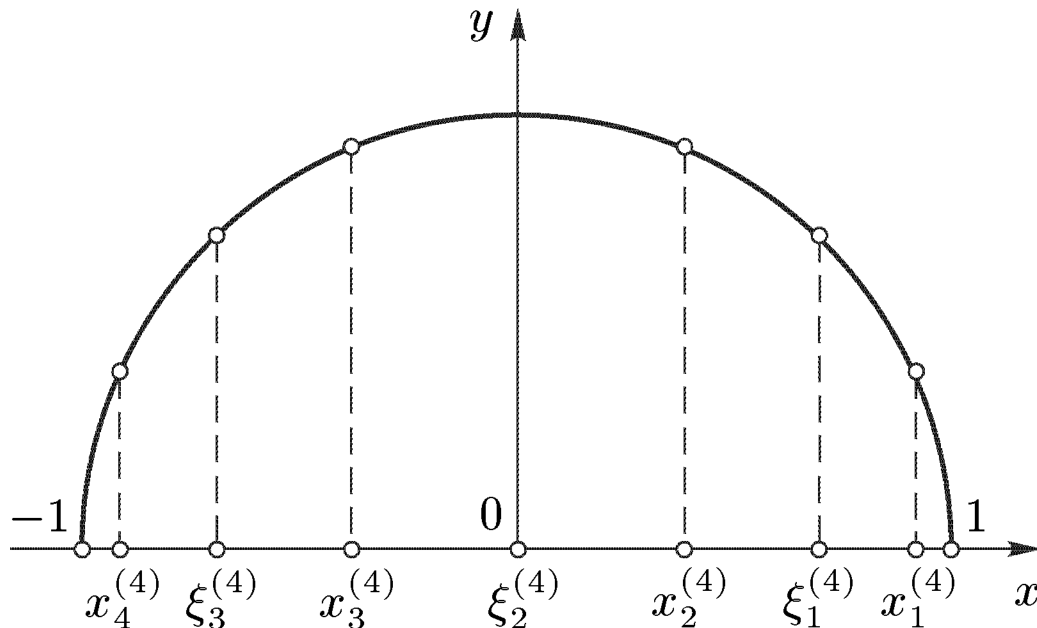


Рис. 3.1

интервал $(-1, 1)$ точки деления с нечетными номерами. В результате получим точки $\{x_k^{(n)}\}$. На рис. 3.1 изображены нули многочлена $T_4(x)$.

С помощью формулы (8) нетрудно установить взаимное разделение нулей многочленов Чебышева $T_{n-1}(x)$ и $T_n(x)$. Докажем, что между двумя соседними нулями $x_k^{(n)}$ и $x_{k+1}^{(n)}$ многочлена $T_n(x)$ есть только один нуль $x_k^{(n-1)}$ многочлена $T_{n-1}(x)$. В самом деле, так как рассматриваются нули $x_k^{(n)}$ и $x_{k+1}^{(n)}$, где $k < n$, то поэтому имеем неравенство

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2n-2} < \frac{2k+1}{2n}.$$

В силу монотонности косинуса получаем

$$x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)}.$$

Таким образом, нули многочленов $T_{n-1}(x)$ и $T_n(x)$ перемежаются.

Рассмотрим теперь экстремальные точки $\{\xi_k^{(n)}\}$ многочлена $T_n(x)$. Из формулы (1) следует, что такие точки определяются условиями

$$n \arccos \xi_k^{(n)} = k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Из этих условий находим $n+1$ различных точек

$$\xi_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Поскольку $T_n(\xi_k^{(n)}) = (-1)^k$, то знаки двух соседних экстремумов противоположны, причем оба конца сегмента ортогональности являются экстремальными точками.

Так как точек (9) всего $n+1$, то, следовательно, производная $T_n'(x)$ на интервале $(-1,1)$ имеет $n-1$ нулей. Поэтому вне сегмента $[-1,1]$ многочлен $T_n(x)$ изменяется монотонно.

Аналогично нулям многочлена $T_n(x)$ его экстремальные точки $\{\xi_k^{(n)}\}$ можно построить с помощью формулы (9). Для этого достаточно верхнюю полуокружность единичного радиуса разделить на $2n$ равных частей и спроектировать точки деления на сегмент $[-1,1]$. Такое построение можно сделать на том же чертеже, на котором изображены нули многочлена $T_n(x)$. При этом нечетные точки деления верхней полуокружности на $2n$ равных частей проектируются в нули, а четные — в экстремальные точки многочлена $T_n(x)$.

Далее, с помощью формулы (1) нетрудно определить некоторые частные значения многочленов Чебышева и их производных в отдельных точках. Имеем

$$\begin{gathered}
T_n(1)=1, \qquad T_n(-1)=(-1)^n,\\
T_{2n}(0)=(-1)^n, \qquad T_{2n+1}(0)=0,\\
T_{2n}'(0)=0, \qquad T_{2n+1}'(0)=(2n+1)(-1)^n,\\
T_n'(1)=n^2, \qquad T_n'(-1)=(-1)^{n+1}n^2.
\end{gathered} \tag{10}$$

Используя все эти данные, нетрудно построить график стандартизо-

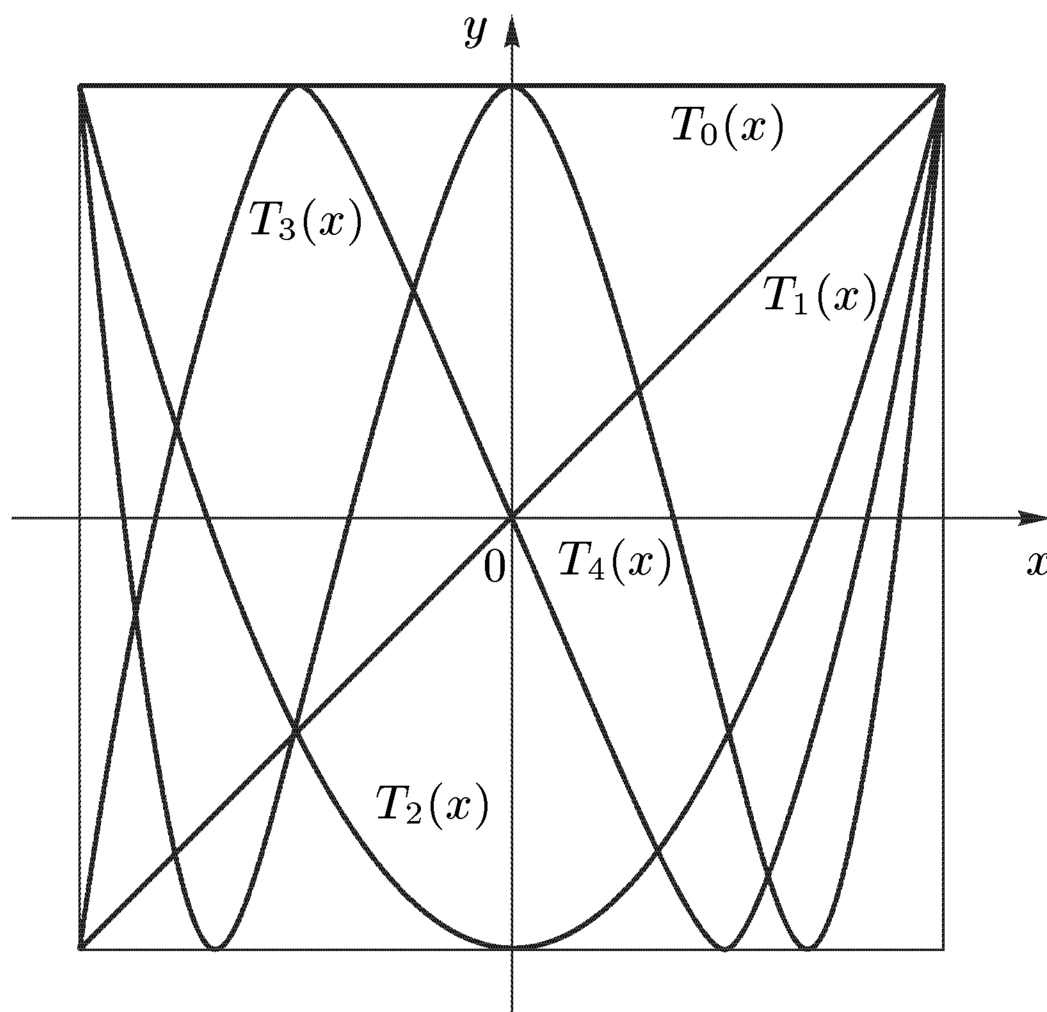


Рис. 3.2

ванного многочлена $T_n(x)$. На рис. 3.2 изображены графики нескольких многочленов Чебышева над сегментом $[-1,1]$.

Так как старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ есть 2^{n-1}, то из формулы (5) следует, что старший коэффициент ортонормированного

многочлена Чебышева $\widehat{T}_n(x)$ определяется формулой

$$\mu_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^{n-1}, \qquad n \geqslant 1. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь производящую функцию для многочленов Чебышева первого рода. При условии $0 < r < 1$ в геометрическом ряде

$$\frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

выделяем действительную и мнимую части. Так как при $0 < r < 1$ имеем формулу

$$\frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1}{1 - r\cos\theta - ir\sin\theta} = \frac{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta}{(1 - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta},$$

то, следовательно, имеем разложение

$$\frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta.$$

Полагая здесь $\cos\theta = x$, получим

$$\frac{1 - rx}{1 - 2rx + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n T_n(x), \qquad 0 < r < 1. \tag{12}$$

Далее, в силу тождества

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2rx + r^2} = 1 + 2\Big(\frac{1 - rx}{1 - 2rx + r^2} - 1\Big)$$

имеем еще одну производящую функцию для многочленов Чебышева

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2rx + r^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n T_n(x). \tag{13}$$

В обоих формулах (12) и (13) вместо r и x можно поставить комплексные переменные w и z.

Все вышеприведенное относилось к случаю ортогональности на сегменте $[-1, 1]$. Но в вычислительной практике очень часто оказывается более удобным рассматривать многочлены Чебышева, соответствующие сегменту $[0, 1]$. Такие многочлены $\{T_n^*(x)\}$ называются *смещенными многочленами Чебышева*. Они определяются формулой

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1). \tag{14}$$

Эти многочлены на сегменте $[0, 1]$ обладают теми же свойствами, что и многочлены $\{T_n(x)\}$ на сегменте $[-1, 1]$. В частности, для смещенных многочленов имеет место рекуррентная формула

$$T_{n+1}^*(x) = (4x - 2)T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x).$$

В принципе можно рассматривать смещение сегмента $[-1,1]$ на любой сегмент $[a,b]$. Так как линейное преобразование этих сегментов при $t \in [-1,1]$ и $x \in [a,b]$ происходит по формуле $2x = (b-a)t + a + b$, то соответствующие смещенные многочлены Чебышева имеют вид

$$T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right). \tag{15}$$

В заключение параграфа заметим, что стандартизация многочленов Чебышева по формуле (1) не является частным случаем стандартизации многочленов Якоби (II.4.3).

§ 2. Асимптотические свойства

Из формул (1.1), (1.5) и (1.6) следуют оценки многочленов Чебышева на сегменте ортогональности

$$|T_n(x)| \leqslant 1, \qquad x \in [-1,1], \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

$$|\widehat{T}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad x \in [-1,1], \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$

$$|\widetilde{T}_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad x \in [-1,1], \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторые неравенства и предельные соотношения, характеризующие поведение многочленов Чебышева вне сегмента ортогональности $[-1,1]$.

В тождестве

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right]$$

положим $\cos\theta = x$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тогда для многочленов Чебышева из формулы (1.1) при $|x| \leqslant 1$ находим представление

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\,\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\,\right)^n\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\, i^k \left(\sqrt{1-x^2}\,\right)^k [1 + (-1)^k]. \tag{4}$$

При нечетном k слагаемые равны нулю, а при четном корень исчезает, и правая часть является многочленом. Следовательно, формула (4) без средней части справедлива при всяком x, даже и комплексном, независимо от выбора значений квадратного корня. Следовательно, имеем равенство

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}\, i^k \left(\sqrt{1-z^2}\,\right)^k [1 + (-1)^k].$$

Пусть теперь x — действительное число, причем $|x| > 1$. Тогда при четном k имеем

$$i^k\left(\sqrt{1-x^2}\right)^k = \left(\sqrt{x^2-1}\right)^k.$$

И вместо (4) получаем формулу

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^k [1+(-1)^k] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right], \qquad |x|>1. \quad (5)$$

В этой формуле рассматриваются арифметические значения корней. Поэтому при $|x| > 1$ сумма в первых круглых скобках при возрастании n будет значительно больше, чем разность во вторых. Следовательно, формулу (5) можно представить как асимптотическую формулу в виде

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\left[1+\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^n\right], \quad (6)$$

где

$$|q| = \left|\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| < 1, \qquad x>1.$$

Таким образом, для многочленов Чебышева имеем асимптотическое представление

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n [1+q^n], \qquad x>1.$$

Отсюда следует приближенное равенство

$$T_n(x) \approx \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n, \qquad x>1, \quad n\to\infty. \quad (7)$$

Аналогично, если $x < -1$, то вместо (6) и (7) имеем

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\left[1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^n\right], \quad (8)$$

$$T_n(x) \approx \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n, \qquad x<-1, \quad n\to\infty. \quad (9)$$

Из формул (6) и (8) следует, что многочлены Чебышева при $|x| > 1$ возрастают со скоростью геометрической прогрессии.

Формулы (5)–(9) нетрудно распространить и на случай комплексных значений независимого переменного. В самом деле, пусть $z = x + iy$ есть комплексное переменное, изменяющееся вне сегмента $[-1, 1]$. Тогда из двух значений корня $\sqrt{z^2-1}$ можно зафиксировать главное значение, т. е. то, которое удовлетворяет условию

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sqrt{z^2-1} = 1. \quad (10)$$

Обозначим это значение корня через $F(z)$. Функция $(1/z)F(z)$ однозначна и аналитична в односвязном дополнении D сегмента $[-1, 1]$ до полной комплексной плоскости. Имея в виду эти значения, аналогично формуле (5) находим, что сумма

$$\frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right]=\\ =\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}\left(\sqrt{z^2-1}\right)^k\left[1+(-1)^k\right]$$

есть многочлен степени n. Но поскольку при $z = x$ этот многочлен совпадает с многочленом Чебышева $T_n(x)$, то в силу теоремы единственности для аналитических функций имеем представление

$$T_n(z)=\frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right], \qquad z \in D. \tag{11}$$

Докажем, что формула (11) справедлива и в замкнутой области $\overline{D}$. Для этого определим значения функции $F(z) = \sqrt{z^2-1}$ на верхнем и нижнем берегах разреза комплексной плоскости по интервалу $(-1, 1)$. В силу условия (10) при $x_1 > 1$ имеем $F(x_1) = \sqrt{x_1^2-1}$, ибо предел (10) мы можем вычислить и при $z = x \to +\infty$. Аналогично, при $x_2 < -1$ имеем равенство $F(x_2) = -\sqrt{x_2^2-1}$. Далее, представляя рассматриваемую функцию в виде $F(z) = \sqrt{(z-1)(z+1)}$, находим, что при непрерывном движении точки z из положения $z_1 = x_1 > 1$ против часовой стрелки на верхний берег разреза аргумент разности $z-1$ получает приращение π, а аргумент суммы $z+1$ остается без из-

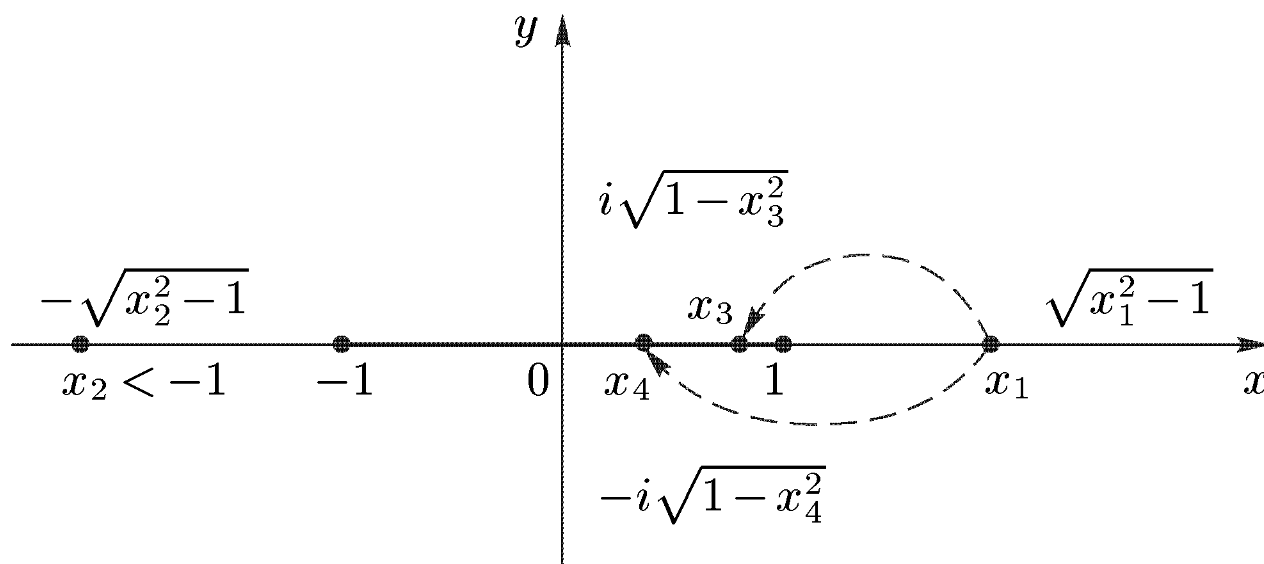


Рис. 3.3

менений. Следовательно, на верхнем берегу разреза имеем $F(x_3) = i\sqrt{1-x_3^2}$. Аналогично, на нижнем берегу разреза получим $F(x_4) = -i\sqrt{1-x_4^2}$. Заметим, что во всех четырех случаях имеются в виду арифметические значения корней (рис. 3.3).

Далее, поскольку обе части равенства (11) непрерывны сверху и снизу в точках интервала $(-1, 1)$, то, следовательно, это представ-

ление (11) справедливо во всей замкнутой области $\overline{D}$. При этом на верхнем и нижнем берегах разреза формула (11) имеет соответственно вид

$$T_n(x_3) = \frac{1}{2}\left[\left(x_3 + i\sqrt{1-x_3^2}\right)^n + \left(x_3 - i\sqrt{1-x_3^2}\right)^n\right],$$

$$T_n(x_4) = \frac{1}{2}\left[\left(x_4 - i\sqrt{1-x_4^2}\right)^n + \left(x_4 + i\sqrt{1-x_4^2}\right)^n\right].$$

Рассмотрим теперь асимптотические свойства многочленов Чебышева первого рода в области D. Из формулы (11) находим

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^n\left[1 + \left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)^n\right], \qquad z \in D. \tag{12}$$

Докажем, что сумма в первых круглых скобках по модулю больше единицы, а дробь во вторых круглых скобках по модулю меньше единицы. Для этого воспользуемся геометрическими свойствами функции Жуковского. Как известно [VIII.2], функция Жуковского

$$z = \psi(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \qquad |w| > 1, \tag{13}$$

отображает конформно и однолистно область $|w| > 1$ на область D при условиях $\psi(\infty) = \infty$ и $\psi'(\infty) > 0$. Обратная функция к функции (13) имеет вид

$$w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2-1}, \qquad z \in D, \tag{14}$$

где значение корня подчинено условию (10). Из (14) находим

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}} = z - \sqrt{z^2-1}, \qquad z \in D. \tag{15}$$

Так как $|\Phi(z)| > 1$ при $z \in D$, то второе слагаемое в квадратных скобках формулы (12) убывает со скоростью геометрической прогрессии. Поэтому имеем асимптотическое представление

$$T_n(z) \approx \frac{1}{2}\,\Phi^n(z), \qquad z \in D, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, вне сегмента $[-1, 1]$, т. е. в области D, последовательность $\{T_n(z)\}$ по модулю возрастает со скоростью геометрической прогрессии. Определим знаменатель этой прогрессии. Как известно [VIII.2], при конформном отображении с помощью функции Жуковского (13) эллипс

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1, \qquad R > 1, \tag{16}$$

который мы обозначим через Γ_R, преобразуется в окружность $|w| = R > 1$. Следовательно, если $z \in \Gamma_R$, то $|\Phi(z)| \equiv R$. Поэтому из равенства (12), учитывая (14) и (15), получим асимптотическую формулу с оценкой остаточного члена

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^n\left[1 + O\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)\right], \qquad z \in \Gamma_R. \tag{17}$$

В силу равенства (1.5) асимптотическая формула для ортонормированных многочленов Чебышева имеет вид

$$\widehat{T}_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(z + \sqrt{z^2-1}\,\right)^n\left[1 + O\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)\right], \qquad z \in \Gamma_R. \tag{18}$$

Эту формулу в силу равенств (13) и (14) можно представить в виде

$$\widehat{T}_n[\psi(w)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,w^n\left[1 + O\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)\right], \qquad |w| = R > 1. \tag{19}$$

Во всех рассмотренных формулах правую часть можно представить в виде суммы двух слагаемых. Так, например, из (11) вместо (17) имеем

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-1}\,\right)^n + O\left(\frac{1}{R^n}\right), \qquad z \in \Gamma_R. \tag{20}$$

Все вышеприведенные асимптотические формулы можно преобразовать в неравенства. Но обычно применяются оценки многочленов Чебышева только при действительных x, расположенных вне сегмента $[-1,1]$.

Приведем некоторые оценки для многочленов Чебышева при $|x| \geqslant 1$. Из формулы (5) имеем неравенство

$$|T_n(x)| \leqslant (|x| + \sqrt{x^2-1}\,)^n, \qquad |x| \geqslant 1, \tag{21}$$

ибо каждое слагаемое в квадратных скобках формулы (5) не превосходит правой части (21). Далее, из (1.5) и (1.6), учитывая (21), находим

$$|\widehat{T}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\left(|x| + \sqrt{x^2-1}\,\right)^n, \qquad |x| \geqslant 1,$$

$$|\widetilde{T}_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\,\left(|x| + \sqrt{x^2-1}\,\right)^n, \qquad |x| \geqslant 1,$$

А теперь докажем, что для производной многочлена Чебышева имеет место неравенство

$$|T_n'(x)| \leqslant n^2, \qquad x \in [-1,1]. \tag{22}$$

В самом деле, с помощью формулы для синуса суммы двух углов методом индукции нетрудно установить неравенство

$$|\sin n\theta| \leqslant n|\sin\theta|,$$

справедливое при любом θ. А теперь, дифференцируя почленно равенство (1.1), находим

$$T_n'(x) = \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

И неравенство (22) этим доказано.

Изложенные выше асимптотические формулы и неравенства достаточно полно характеризуют последовательность $\{T_n(z)\}$ в зависимости от положения точки z на комплексной плоскости.

§ 3. Экстремальные свойства

В настоящем параграфе рассматриваются очень важные экстремальные свойства многочленов Чебышева первого рода. Благодаря этим экстремальным свойствам многочлены Чебышева широко используются в различных вычислительных процессах и, в частности, в интерполяционных задачах.

В 1854 г. П.Л. Чебышев поставил и решил следующую *экстремальную задачу*: среди всех многочленов степени n, имеющих единичный старший коэффициент, определить тот, для которого величина

$$\|\widetilde{F}_n\|_C = \max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{F}_n(x)| \tag{1}$$

является наименьшей. П.Л. Чебышев доказал, что решением этой задачи является многочлен $\widetilde{T}_n(x)$. Именно поэтому многочлены Чебышева $\{T_n(x)\}$ часто называются *многочленами, наименее уклоняющимися от нуля на сегменте* $[-1,1]$.

Теорема 3.1. *Для всякого многочлена $\widetilde{F}_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом имеет место неравенство*

$$\max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{F}_n(x)| \geqslant \max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \tag{2}$$

причем знак равенства возможен только в случае $\widetilde{F}_n(x) \equiv \widetilde{T}_n(x)$.

Доказательство. Многочлен Чебышева $\widetilde{T}_n(x)$ достигает экстремума в точках (1.9), причем в силу (1.6) в этих точках он принимает значения $(-1)^k 2^{1-n}$.

Допустим противное, что нашелся некоторый многочлен $\widetilde{F}_n(x)$, который удовлетворяет неравенству

$$|\widetilde{F}_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{3}$$

Тогда многочлен $Q_{n-1}(x) = \widetilde{T}_n(x) - \widetilde{F}_n(x)$ имеет степень не более $n-1$ и принимает значения разных знаков на концах интервалов

$$(\xi_{k+1}^{(n)}, \xi_k^{(n)}), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Поэтому внутри каждого из этих интервалов многочлен $Q_{n-1}(x)$ имеет по крайней мере один нуль. Но интервалов (4) всего n. Следовательно, $Q_{n-1}(x) \equiv 0$. Таким образом, не существует многочлен $\widetilde{F}_n(x)$, удовлетворяющий условию (3).

Докажем теперь единственность многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1,1]$. Опять применяем метод от противного. Допустим, что нашелся еще один многочлен $\widetilde{R}_n(x)$ с единичным старшим коэффициентом, для которого выполняется условие

$$\max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{R}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тогда в точках $\{\xi_k^{(n)}\}$ выполняются условия

$$\widetilde{T}_n(\xi_0^{(n)}) \geqslant \widetilde{R}_n(\xi_0^{(n)}), \quad \widetilde{T}_n(\xi_1^{(n)}) \leqslant \widetilde{R}_n(\xi_1^{(n)}), \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \widetilde{T}_n(\xi_n^{(n)}) \leqslant \widetilde{R}_n(\xi_n^{(n)}) \quad [\widetilde{T}_n(\xi_n^{(n)}) \geqslant \widetilde{R}_n(\xi_n^{(n)})].$$

Многочлен $\Phi_{n-1}(x) = \widetilde{T}_n(x) - \widetilde{R}_n(x)$ имеет степень не более $n-1$. Если в каждой точке $\xi_k^{(n)}$ выполняется условие $\widetilde{T}_n(\xi_k^{(n)}) \neq \widetilde{R}_n(\xi_k^{(n)})$, то многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ имеет значения разных знаков на концах интервалов (4). И поэтому $\Phi_{n-1}(x) \equiv 0$. Если же есть одна точка $\xi_k^{(n)}$, в которой $\Phi_{n-1}(\xi_k^{(n)}) = 0$, то на концах интервала $(\xi_{k+1}^{(n)}, \xi_{k-1}^{(n)})$ многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ имеет значения одинаковых знаков. Следовательно, внутри этого интервала многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ имеет, кроме $\xi_k^{(n)}$, еще один нуль либо двойной нуль в точке $\xi_k^{(n)}$. Поэтому в целом количество нулей многочлена $\Phi_{n-1}(x)$ на сегменте $[-1,1]$ остается не менее n. Далее, таких точек $\xi_k^{(n)}$, для которых $\Phi_{n-1}(\xi_k^{(n)}) = 0$, но $\Phi_{n-1}(\xi_{k+1}^{(n)})\Phi_{n-1}(\xi_{k-1}^{(n)}) > 0$, может быть несколько, и все равно общее число нулей многочлена $\Phi_{n-1}(x)$ будет не менее n. Если же многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ обращается в нуль в концевых точках $\xi_0^{(n)}$ или $\xi_n^{(n)}$ либо еще дополнительно в нескольких соседних с ними точках, то количество интервалов, на концах которых многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ отличен от нуля, сокращается на число таких нулей. Таким образом, остается доказать, что при условиях

$$\Phi_{n-1}(\xi_k^{(n)}) = \Phi_{n-1}(\xi_{k+1}^{(n)}) = \ldots = \Phi_{n-1}(\xi_{k+p-1}^{(n)}) = 0,$$
$$\Phi_{n-1}(\xi_{k-1}^{(n)}) \neq 0, \qquad \Phi_{n-1}(\xi_{k+p}^{(n)}) \neq 0$$

многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ имеет в интервале $(\xi_{k+p}^{(n)}, \xi_{k-1}^{(n)})$, содержащем $p+1$ соседних интервалов из системы (4), не менее $p+1$ нулей.

В самом деле, геометрически очевидно, что если число p четное, то значения $\Phi_{n-1}(\xi_{k-1}^{(n)})$ и $\Phi_{n-1}(\xi_{k+p}^{(n)})$ имеют разные знаки. Следовательно, кроме p нулей $\xi_k^{(n)}, \xi_{k+1}^{(n)}, \ldots, \xi_{k+p-1}^{(n)}$ многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ должен иметь в этом интервале еще по крайней мере один нуль либо один из перечисленных нулей должен быть двойным. Если же число p нечетное, то многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ на концах интервала $(\xi_{k+p}^{(n)}, \xi_{k-1}^{(n)})$ имеет значения одинаковых знаков. Следовательно, в этом случае либо график этого многочлена должен пересекать ось x четное число раз, т. е. $p+1$ раз, либо один из вышеупомянутых нулей должен быть двойным.

Итак, в любом случае многочлен $\Phi_{n-1}(x)$ имеет не менее n нулей, а отсюда следует, что $\Phi_{n-1}(x) \equiv 0$. Этим единственность многочлена наименьшего уклонения доказана, и теорема 3.1 доказана полностью.

Таким образом, среди всех многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом многочлен Чебышева $\widetilde{T}_n(x)$ наименее уклоняется от нуля на сегменте $[-1,1]$, и никакой другой многочлен при той же нормировке таким свойством не обладает.

А сейчас покажем, что вне сегмента ортогональности многочлены Чебышева обладают в некотором смысле противоположным экстремальным свойством, а именно уклоняются от нуля максимально в каждой точке действительной оси.

Т е о р е м а 3.2. *Если $F_n(x)$ есть многочлен степени не выше n, причем*

$$\max_{x\in[-1,1]} |F_n(x)| = 1, \tag{5}$$

то при всяком действительном x_0, не принадлежащем сегменту $[-1,1]$, выполняется неравенство

$$|F_n(x_0)| \leqslant |T_n(x_0)|, \qquad |x_0| > 1. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что стандартизованный многочлен Чебышева $T_n(x)$ удовлетворяет нормировке (5) и $T_n(x_0) \neq 0$, ибо $|x_0| > 1$, а все нули многочлена $T_n(x)$ расположены в интервале $(-1,1)$. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что нашелся некоторый многочлен $F_n(x)$, удовлетворяющий нормировке (5), но не удовлетворяющий условию (6), т. е. в некоторой точке x_0 с условием $|x_0| > 1$ имеем

$$|F_n(x_0)| > |T_n(x_0)|. \tag{7}$$

Тогда рассмотрим вспомогательный многочлен

$$Q_n(x) = \frac{F_n(x_0)}{T_n(x_0)}\, T_n(x) - F_n(x). \tag{8}$$

Так как многочлен $T_n(x)$ имеет максимум модуля в точках $\{\xi_k^{(n)}\}$, определяемых формулой (1.9), причем $T_n(\xi_k^{(n)}) = (-1)^k$, то в силу (5) и (7) у разности в правой части равенства

$$Q_n(\xi_k^{(n)}) = \frac{F_n(x_0)}{T_n(x_0)}\,(-1)^k - F_n(\xi_k^{(n)})$$

модуль уменьшаемого больше модуля вычитаемого. Поэтому многочлен $Q_n(x)$, определяемый формулой (8), имеет значения разных знаков на концах интервалов (4). Но поскольку таких интервалов всего n, и, кроме того, еще $Q_n(x_0) = 0$, то получается, что многочлен $Q_n(x)$, степень которого не более n, имеет не менее $n+1$ нулей. А это возможно только при условии, что $Q_n(x) \equiv 0$. Тогда из формулы (8) находим

$$F_n(1) = \frac{F_n(x_0)}{T_n(x_0)}\, T_n(1) = \frac{F_n(x_0)}{T_n(x_0)}.$$

Далее учитываем формулу (5) и получаем

$$|F_n(x_0)| \leqslant |T_n(x_0)|.$$

Но это неравенство противоречит предположению (7). Этим теорема 3.2 доказана.

Главный смысл этой теоремы заключается в том, что два многочлена, $F_n(x)$ и $T_n(x)$, имея одинаковые максимумы модулей на сегменте $[-1, 1]$, в любой точке x_0, не принадлежащей этому сегменту, удовлетворяют неравенству (6), т. е. многочлен Чебышева $T_n(x)$ при условии (5) в любой точке вне сегмента $[-1, 1]$ уклоняется от нуля максимально по сравнению со всеми многочленами, удовлетворяющими нормировке (5).

В силу оценки (2.21) неравенство (6) можно представить в виде

$$|F_n(x_0)| \leqslant |T_n(x_0)| \leqslant \left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)^n, \qquad |x_0| > 1. \tag{9}$$

Можно рассмотреть общий случай, когда условие (5) не выполняется. В самом деле, пусть $\Phi_n(x)$ — произвольный многочлен степени не более n. Введем обозначение

$$M = \max_{x \in [-1,1]} |\Phi_n(x)|. \tag{10}$$

Тогда, полагая $F_n(x) = \dfrac{1}{M}\,\Phi_n(x)$, вместо (9) получим неравенство

$$|\Phi_n(x_0)| \leqslant M|T_n(x_0)| \leqslant M\left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)^n, \qquad |x_0| > 1. \tag{11}$$

Таким образом, с помощью многочленов Чебышева первого рода $T_n(x)$ можно оценить многочлен $\Phi_n(x)$ в любой точке вне сегмента $[-1, 1]$ через максимум абсолютного значения этого многочлена на сегменте $[-1, 1]$.

§ 4. Ряды Фурье по многочленам Чебышева

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[-1, 1]$ и интегрируема на этом сегменте с весом (1.3). Тогда можно определить ее коэффициенты Фурье–Чебышева по формуле

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\widehat{T}_n(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

В результате данной функции $f(x)$ ставится в соответствие ряд Фурье по многочленам Чебышева первого рода

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{T}_n(x). \tag{2}$$

По поводу рядов (2) можно повторить все, что сказано в § 4 гл. I относительно общих рядов Фурье по ортогональным многочленам.

Но, используя тригонометрическое представление многочленов Чебышева по формуле (1.5), можно получить гораздо более общие и более законченные результаты.

В интеграле (1) произведем замену $t = \cos\tau$. Используя (1.5), находим

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(\cos\tau)\cos n\tau\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau)\cos n\tau\, d\tau, \qquad n \geqslant 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f(\cos\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

С другой стороны, введем четную функцию $F(\theta) = f(\cos\theta)$ и рассмотрим ее ряд Фурье по косинусам

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что ряды (2) и (4) при условии $x = \cos\theta$ почленно тождественны. В самом деле, учитывая формулы (1.5) и (3), при $x = \cos\theta$ находим

$$a_n \widehat{T}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau)\cos n\tau\, d\tau \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\theta = \alpha_n \cos n\theta, \qquad n \geqslant 1,$$

$$a_0 \widehat{T}_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau)\, d\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Следовательно, при $x = \cos\theta$ справедливо равенство

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{T}_k(x) = F(\theta) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos k\theta. \tag{5}$$

Таким образом, вопрос о представлении функции $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ рядом (2) сходится к вопросу о сходимости ряда (4) для четной функции $F(\theta) = f(\cos\theta)$. Но, как известно, условия сходимости тригонометрических рядов Фурье исследованы очень подробно [III.2].

В силу формулы (5) почти все результаты о рядах (4) переносятся на ряды Фурье по многочленам Чебышева (2). Рассмотрим простейшие случаи такого переноса.

Пусть модуль непрерывности

$$\omega(\delta, F) = \sup_{|\theta-\tau|\leqslant\delta} |F(\theta) - F(\tau)|$$

функции $F(\theta)$ удовлетворяет *условию Дини*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, F) \ln\frac{1}{\delta} = 0. \tag{6}$$

Тогда эта функция разлагается в ряд Фурье по косинусам:

$$F(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta, \tag{7}$$

причем этот ряд сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Теорема 3.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$ и ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ на этом сегменте удовлетворяет условию Дини*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = 0, \tag{8}$$

то эта функция разлагается в ряд Фурье по многочленам Чебышева:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \widehat{T}_k(x), \qquad x \in [-1, 1], \tag{9}$$

сходящийся равномерно на всем сегменте $[-1, 1]$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ фиксировано и $|\theta - \tau| \leqslant \delta$. Тогда для $x = \cos\theta$ и $t = \cos\tau$ имеем

$$|x - t| = |\cos\theta - \cos\tau| \leqslant |\theta - \tau| \leqslant \delta.$$

Далее, при тех же условиях находим

$$|F(\theta) - F(\tau)| = |f(\cos\theta) - f(\cos\tau)| = |f(x) - f(t)| \leqslant \omega(\delta, f).$$

Следовательно, между модулями непрерывности функций $F(\theta)$ и $f(x)$ имеет место неравенство

$$\omega(\delta, F) \leqslant \omega(\delta, f).$$

Поэтому из условия (8) следует условие (6), которое достаточно для равномерной сходимости ряда (7) и почленно тождественного ему при условии $x = \cos\theta$ ряда (2). Таким образом, теорема 3.3 доказана.

В силу почленного тождества рядов (2) и (4) аналогично теореме 3.3 можно рассматривать условия абсолютной сходимости ряда (2), условия сходимости в отдельной точке и многие другие вопросы. Но такой перенос результатов с рядов (7) на ряды (2) в большинстве случаев не представляет интереса ввиду аналогии в поведении этих двух рядов, которая следует из формулы (5).

Рассмотрим теперь *неравенство Лебега для рядов Фурье–Чебышева.* В силу формулы (1.5) функция Лебега здесь имеет вид

$$L_n(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{T}_k(x)\widehat{T}_k(t) \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \cos k\tau \right| d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \cos k\tau \right| d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|1+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\theta-\tau)+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\theta+\tau)\right|d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(\theta-\tau)+D_n(\theta+\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(\tau)|\,d\tau \approx \frac{4}{\pi^2}\ln n.$$

Здесь через $D_n(\tau)$ обозначено ядро Дирихле, а в конце соотношения указана известная асимптотика интеграла от этого ядра [III.2].

Таким образом, постоянные Лебега для рядов Фурье–Чебышева возрастают со скоростью $\ln n$. Поэтому неравенство Лебега для этих рядов имеет вид

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{T}_k(x)\right| \leqslant c_1E_n(f)[1+\ln n], \qquad x\in[-1,1]. \tag{10}$$

Из этого неравенства следует, что чем лучше функция $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$, т. е. чем быстрее убывает к нулю последовательность ее наилучших приближений, тем быстрее сходится к этой функции и ряд Фурье–Чебышева. Конкретно, если, например, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$, причем $f^{(p)}(x)\in \operatorname{Lip}\alpha$, то в силу неравенства (1.5.8) имеем оценку

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{T}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_2\ln n}{n^{p+\alpha}}, \qquad x\in[-1,1]. \tag{11}$$

Теорема 3.3 и неравенства (10) и (11) свидетельствуют о том, что ряды Фурье по многочленам Чебышева в смысле условий сходимости и скорости сходимости на сегменте $[-1,1]$ полностью аналогичны тригонометрическим рядам Фурье.

Рассмотрим теперь свойства рядов Фурье–Чебышева (2) вне сегмента $[-1,1]$. Обозначим через G_R внутренность эллипса Γ_R, определенного уравнением (2.16). Эту область G_R назовем *канонической областью для сегмента* $[-1,1]$.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G_R. Тогда имеет место интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad z\in G_\rho, \quad 1<\rho<R. \tag{12}$$

Эта формула справедлива, ибо функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой области $\overline{G}_\rho$. Формулу (12) можно использовать для получения разложения функции $f(z)$ в ряд Фурье–Чебышева в области G_R.

В интеграле Коши (12) сделаем замену переменной по формуле $\zeta=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$. Тогда контур Γ_ρ в силу формулы (2.16) преобразу-

ется в окружность $|w| = \rho$. В результате имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{f\Big[\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big)\Big]\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{w^2}\Big)}{\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big)-z}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho} f\Big[\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big)\Big]\frac{1-\frac{1}{w^2}}{1+\frac{1}{w^2}-2z\frac{1}{w}}\,\frac{dw}{w}, \qquad z \in G_\rho. \quad (13)$$

С другой стороны, в формуле (1.13) вместо r и x полагаем $1/w^2$ и z. В результате получаем разложение

$$\frac{1-\frac{1}{w^2}}{1-2z\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}} = T_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(z)\frac{1}{w^n}, \qquad |w| > 1. \quad (14)$$

Так как $z \in G_\rho$, то можно считать, что $z \in G_r$, где $1 < r < \rho < R$. Поэтому в силу формулы (2.20) имеем

$$|T_n(z)| = \frac{1}{2}\, r^n + O\Big(\frac{1}{r^n}\Big), \qquad z \in \Gamma_r.$$

Следовательно, ряд (14) сходится равномерно при $z \in \overline{G}_r$ и $|w| = \rho$, если $1 < r < \rho < R$. Подставляя разложение (14) в интеграл (13) и интегрируя почленно, получим разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{T}_n(z), \qquad z \in \overline{G}_r. \quad (15)$$

Коэффициенты этого разложения определяются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|w|=\rho} f\Big[\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big)\Big]\frac{dw}{w^{n+1}}, \qquad n \geqslant 1, \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho} f\Big[\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big)\Big]\frac{dw}{w}.$$

Ряд (15) сходится равномерно при $z \in G_r$. Но так как $r < R$ было произвольным, то, следовательно, ряд (15) сходится во всей области G_R. При этом ряд (15) сходится равномерно на всяком замкнутом множестве F, целиком расположенном в области G_R. В этом случае коротко говорят, что *ряд сходится равномерно внутри области* G_R.

Можно рассматривать случай, когда функция $f(z)$ является аналитической в области G_R и непрерывной в замкнутой области $\overline{G}_R$. Тогда в формулах (12) и (16) в качестве линий интегрирования можно взять Γ_R и $|w| = R$ соответственно. При этом нетрудно доказать, что если функция $f(z)$ дополнительно в замкнутой области $\overline{G}_R$

удовлетворяет условию Дини, аналогичному (6), то ряд (15) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}_R$. Более того, в этом случае имеет место неравенство Лебега, аналогичное неравенству (10), из которого, в частности, следует, что если функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема p раз в замкнутой области $\overline{G}_R$, причем производная $f^{(p)}(z)$ в замкнутой области $\overline{G}_R$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, то, аналогично (11), имеет место неравенство

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(z)\right| \leqslant \frac{c_3 \ln n}{n^{p+\alpha}}, \qquad z \in \overline{G}_R. \tag{17}$$

Разумеется, в формулах (15) и (17) можно перейти к ортонормированным многочленам Чебышева $\{\widehat{T}_n(z)\}$, но при изучении аналитических функций в канонических областях в этом нет необходимости.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях сходимости общих рядов по многочленам Чебышева. В этом случае произвольной последовательности комплексных чисел $\{b_n\}$ ставится в соответствие ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(z). \tag{18}$$

Предположим, что для последовательности коэффициентов выполняется условие

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R}, \qquad R > 1. \tag{19}$$

Тогда в силу формулы (2.20) ряд (18) сходится абсолютно и равномерно внутри канонической области G_R, и его сумма $f(z)$ является аналитической функцией в этой области.

Если же в формуле (19) $R = 1$, то ряд (18) может сходиться только на сегменте $[-1, 1]$, причем для установления факта сходимости в этом случае о последовательности $\{b_n\}$ необходимо знать несколько более, чем выполнение условия (19) при $R = 1$, ибо в этом случае ряд (18) фактически является рядом по косинусам, и поэтому необходимо применять признаки сходимости рядов по косинусам.

Из последних результатов следует, что ряды по многочленам Чебышева первого рода в комплексной плоскости по своим свойствам аналогичны степенным рядам, но только здесь роль окружностей играют эллипсы Γ_R, определяемые формулой (2.16).

А на сегменте $[-1, 1]$ ряды Фурье–Чебышева обладают некоторыми преимуществами по сравнению с рядами Тейлора. В самом деле, для представления функции $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ степенным рядом необходимо, чтобы эта функция была аналитической в открытом круге $|z| < 1$, т. е., в частности, имела производные любых порядков на интервале $(-1, 1)$. А для разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье–

Чебышева достаточно, чтобы модуль непрерывности этой функции удовлетворял условию Дини. Кроме того, при разложении многих элементарных функций оказывается, что ряды Фурье–Чебышева на сегменте $[-1,1]$ сходятся гораздо быстрее, чем ряды Тейлора. Это объясняется тем, что на скорость сходимости рядов Тейлора на сегменте $[-1,1]$ влияют особые точки функции, расположенные на единичной окружности, а скорость сходимости рядов Фурье–Чебышева зависит только от свойств функции $f(x)$ на единичном сегменте. Из формулы (5) следует, что свойства рядов Фурье–Чебышева на сегменте $[-1,1]$ аналогичны свойствам тригонометрических рядов Фурье.

§ 5. Примеры разложения функций в ряды Фурье–Чебышева

Как установлено в предыдущем параграфе, для разложения некоторой функции $f(x)$ в ряд Фурье–Чебышева достаточно разложить четную функцию $F(\theta) = f(\cos\theta)$ в ряд Фурье по косинусам. Поэтому прежде всего можно воспользоваться разложениями четных функций в ряды Фурье по косинусам с тем, чтобы получить из них соответствующие разложения Фурье–Чебышева.

Из разложения

$$\ln\Bigl(2\cos\frac{\theta}{2}\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

полагая в нем $\theta = \arccos x$, находим

$$\ln(1+x) = -\ln 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}T_n(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Аналогичным образом из равенства

$$\frac{\pi^2 - 2\pi\theta}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

имеем разложение

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Далее, из формулы

$$\arcsin(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}$$

той же подстановкой $\cos\theta = x$ получаем

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

И еще одно разложение четной функции

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{4n^2-1}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

приводит к формуле

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{2n}(x)}{4n^2-1}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Наконец, из разложения

$$\frac{1}{2}\ln\Bigl(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\theta}{2n-1}, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

после несложных тригонометрических преобразований имеем

$$\frac{1}{4}\ln\Bigl(\frac{1+x}{1-x}\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}, \qquad -1 < x < 1.$$

Аналогичным способом можно получить и некоторые другие разложения в ряды Фурье–Чебышева. Следует только первоначально заданную четную функцию рассматривать на интервале $(0,\pi)$, быть может, с включением одного или обоих концов, а затем после преобразования $\theta = \arccos x$ полученная функция будет определена на интервале $(-1,1)$.

Для получения разложений Фурье–Чебышева можно применять различные искусственные приемы аналогично тому, как это делается при рассмотрении тригонометрических и степенных рядов [III.2, VIII.2]. Так, например, разложение производящей функции для многочленов Чебышева

$$\frac{1-rx}{1-2rx+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n T_n(x), \qquad 0 \leqslant r < 1,$$

можно представить в виде

$$\frac{\frac{1}{r}-x}{1-2rx+r^2} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}T_n(x).$$

После очевидных преобразований имеем

$$\frac{2x-2r}{1-2rx+r^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}T_n(x).$$

Интегрируя это тождество по r в пределах от 0 до r, получим разложение

$$\ln(1-2rx+r^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\,T_n(x).$$

Это разложение сходится при условиях $|r|<1$ и $x\in[-1,1]$. Если в этой формуле вместо r поставить $-r$, то получим

$$\ln(1+2rx+r^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\,T_n(x).$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, найдем важное разложение

$$\ln\frac{1+2rx+r^2}{1-2rx+r^2} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+1}}{2k+1}\,T_{2k+1}(x), \qquad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

которое применяется при вычислении логарифмической функции [VI.5]. В этом разложении параметр r может быть и комплексным. Полагая $r=ip$, находим

$$\ln\frac{1-p^2+2ipx}{1-p^2-2ipx} = 4i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k+1}}{2k+1}\,T_{2k+1}(x). \tag{1}$$

С другой стороны, в теории функций комплексного переменного известна формула связи логарифмической функции с арктангенсом

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}, \qquad |x|<1. \tag{2}$$

Эта формула получается из известных разложений

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z|<1,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|\leqslant 1,$$

если в первом из них вместо z поставить ix. А теперь предположим, что параметр p в формуле (1) удовлетворяет условию $2p=1-p^2$, т. е. $p=\sqrt{2}-1$. Тогда левую часть (1) можно представить в виде

$$\ln\frac{1-p^2+2ipx}{1-p^2-2ipx} = \ln\frac{1+\dfrac{2p}{1-p^2}\,ix}{1-\dfrac{2p}{1-p^2}\,ix} = \ln\frac{1+ix}{1-ix}. \tag{3}$$

А теперь из формул (2) и (3), учитывая (1), получаем разложение арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{p^{2k+1}}{2k+1}\,T_{2k+1}(x), \qquad x\in(-1,1),$$

где $p=\sqrt{2}-1$.

Далее, для разложения функции e^{ax} в ряд Фурье–Чебышева необходимо разложить в ряд Фурье по косинусам четную функцию $e^{a\cos\theta}$. Пользуясь разложением экспоненты и формулой бинома Ньютона, находим

$$e^{a\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m \cos^m\theta}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!\,2^m}\,(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^m =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k e^{(m-k)i\theta}e^{-ki\theta} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!}\,e^{(m-2k)i\theta}.$$

Аналогично, переставляя слагаемые в первых круглых скобках, получим

$$e^{a\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!}\,e^{-(m-2k)i\theta}.$$

Беря среднее арифметическое этих двух равенств, имеем

$$e^{a\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{\cos(m-2k)\theta}{k!\,(m-k)!}. \tag{4}$$

Для определения коэффициента при каждом $\cos n\theta$, рассмотрим внутреннюю сумму

$$\frac{\cos m\theta}{m!} + \frac{\cos(m-2)\theta}{1!\,(m-1)!} + \frac{\cos(m-4)\theta}{2!\,(m-2)!} + \ldots + \frac{\cos(m-2)\theta}{(m-1)!\,1!} + \frac{\cos m\theta}{m!}. \tag{5}$$

В сумму, составляющую нулевой коэффициент в разложении функции (4), будут входить слагаемые из сумм (5) при $m = 0, 2, 4, \ldots$ Следовательно, получим

$$\frac{\alpha_0}{2} = 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} + \ldots + \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} + \ldots \tag{6}$$

Если же $n > 0$, то в сумму, составляющую коэффициент при $\cos n\theta$, будут входить слагаемые из суммы (5) при $m = n,\ n+2,\ n+4,\ \ldots$, причем из каждой суммы слагаемых получается по два. Поэтому имеем

$$\alpha_n = 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2} \frac{1}{(n+1)!\,1!} + \ldots + \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{(n+k)!\,k!} + \ldots\right]. \tag{7}$$

Сумма, стоящая в квадратных скобках, имеет специальное обозначение

$$I_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!\,k!} \tag{8}$$

и называется *функцией Бесселя мнимого аргумента порядка* n [IV.2, IV.5, IV.6]. Эти трансцендентные функции изучены очень подробно, ряд (8) сходится быстро, а для вычисления значений этих функций составлены таблицы. С помощью обозначения (8), учитывая равенства (6) и (7), вместо (4) находим разложение

$$e^{a\cos\theta} = I_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(a)\cos n\theta.$$

Далее, подстановкой $\cos\theta = x$, находим

$$e^{ax} = I_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(a)T_n(x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{9}$$

В частности, при $a = 1$ имеем разложение экспоненты

$$e^{x} = I_0(1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(1)T_n(x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{10}$$

С помощью формулы (8) нетрудно показать, что ряд (10) сходится при $x \in [-1, 1]$ гораздо быстрее экспоненциального ряда, ибо его коэффициенты убывают быстрее.

Далее, чтобы разложить в ряды Фурье–Чебышева функции $\cos ax$ и $\sin ax$, мы используем хорошо известную функцию Бесселя первого рода порядка n [IV.2, IV.5, IV.6]

$$J_n(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}. \tag{11}$$

Эта функция связана с функцией (8) формулой

$$I_n(ia) = i^n J_n(a). \tag{12}$$

В силу (9) и (12) имеем

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax = J_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (i)^n J_n(a)T_n(x).$$

Разделяя в этом равенстве действительные и мнимые части, находим

$$\cos ax = J_0(a) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(a)T_{2m}(x), \tag{13}$$

$$\sin ax = 2\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(a)T_{2m+1}(x). \tag{14}$$

С помощью определения (11) нетрудно доказать, что остаточные члены рядов (13) и (14) убывают очень быстро.

Разложения (9), (13) и (14) получены только при $x \in [-1,1]$. Но вариацией параметра a значения этих трех функций можно вычислять фактически при любых значениях x.

§ 6. Многочлены Чебышева второго рода

При $x \in [-1,1]$ из формулы (1.1) имеем равенство

$$T'_{n+1}(x) = (n+1)\sin[(n+1)\arccos x]\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (1)$$

Следовательно, при любом n функции

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (2)$$

являются многочленами. Они называются *многочленами Чебышева второго рода.*

Докажем, что многочлены (2) ортогональны на сегменте $[-1,1]$ с весом

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1]. \qquad (3)$$

В самом деле, производя замену $x = \cos\theta$, находим

$$J_{nm} = \int\limits_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\;dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \sin[(n+1)\arccos x]\sin[(m+1)\arccos x]\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \sin(n+1)\theta\;\sin(m+1)\theta\,d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi/2, & n = m. \end{cases}$$

Следовательно, для ортонормированных многочленов Чебышева второго рода имеем формулу

$$\widehat{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad n = 0,1,\ldots \qquad (4)$$

Далее, в силу (1) имеем формулу

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\,T'_{n+1}(x). \qquad (5)$$

Из этой формулы следует, что нулями многочлена $U_n(x)$ являются экстремальные точки многочлена $T_{n+1}(x)$, расположенные внутри интервала $(-1,1)$. Эти точки определяются формулой (1.9) с заменой n на $n+1$. Таким образом, нули многочлена $U_n(x)$ имеют вид

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 1,2,\ldots,n. \qquad (6)$$

А на концах сегмента $[-1, 1]$ многочлен $T_{n+1}(x)$ имеет краевые экстремумы, и его производная в нуль там не обращается.

Из тригонометрического тождества

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta\cos\theta,$$

полагая в нем $\theta = \arccos x$ и разделив его почленно на $\sqrt{1-x^2}$, получаем рекуррентную формулу для многочленов Чебышева второго рода

$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x). \tag{7}$$

Эта формула совпадает с рекуррентной формулой (1.2) для многочленов Чебышева первого рода. Из равенства (2) находим $U_0(x) = 1$ и $U_1(x) = 2x$. Далее, применяя рекуррентную формулу (7), находим последовательно

$$\begin{aligned}
&U_0(x) = 1,\\
&U_1(x) = 2x,\\
&U_2(x) = 4x^2 - 1,\\
&U_3(x) = 8x^3 - 4x,\\
&U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,\\
&U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Из рекуррентной формулы (7) следует, что старший коэффициент многочлена $U_n(x)$ есть 2^n. Следовательно, имеем равенство

$$\widetilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n}\,U_n(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь оценки многочленов Чебышева второго рода. Прежде всего, из формул (2) и (4) следуют оценки внутри интервала ортогональности

$$|U_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1), \tag{9}$$

$$|\widehat{U}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1). \tag{10}$$

Далее, так как в силу неравенства (2.22) при $x \in [-1, 1]$ справедлива оценка $|T'_{n+1}(x)| \leqslant (n+1)^2$, то, следовательно, из формул (4) и (5) находим неравенства

$$|U_n(x)| \leqslant (n+1), \qquad x \in [-1, 1], \tag{11}$$

$$|\widehat{U}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(n+1), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что неравенства (11) и (12) являются точными, а именно равенства в них достигаются на концах сегмента ортогональности. В самом деле, в формуле (2) положим $x = \cos\theta$. В результате

получим

$$U_n(\cos\theta) = (n+1)\,\frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\theta}\,\frac{\theta}{\sin\theta}.$$

При фиксированном n, устремляя θ к нулю, находим

$$U_n(1) = n+1. \tag{13}$$

С другой стороны, поскольку каждый многочлен $U_n(x)$ содержит степени x только одной четности, то его значение в точке $x=-1$ может только знаком отличаться от значения в точке $x=1$. Следовательно, имеем

$$U_n(-1) = (-1)^n(n+1). \tag{14}$$

Соответствующие формулы для ортонормированных многочленов имеют вид

$$\widehat{U}_n(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(n+1), \qquad \widehat{U}_n(-1) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(n+1). \tag{15}$$

Таким образом, ортонормированные многочлены Чебышева второго рода на концах сегмента ортогональности по абсолютному значению возрастают со скоростью n. А во внутренних точках интервала $(-1,1)$ эти многочлены ограничены.

Отметим одно очевидное следствие неравенств (10) и (12), которое характеризует поведение последовательности $\{\widehat{U}_n(x)\}$ внутри интервала $(-1,1)$ и на всем сегменте ортогональности $[-1,1]$. Неравенства (10) и (12) представим в виде

$$\sqrt{1-x^2}\,|\widehat{U}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad \frac{1}{n+1}\,|\widehat{U}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Складывая почленно, находим неравенство

$$|\widehat{U}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2}{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{n+1}}, \qquad x\in[-1,1]. \tag{16}$$

Из этого неравенства следует, каким образом оценка внутри интервала переходит в оценку на его концах.

Рассмотрим теперь важное экстремальное свойство многочленов Чебышева второго рода, которое впервые установили А.Н. Коркин и Е.И. Золотарев [III.8].

Лемма 3.1. *Если m есть одно из чисел $0,1,2,\ldots,n-1$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_{-1}^{1} x^m\,\operatorname{sign}[U_n(x)]\,dx = 0, \tag{17}$$

а при $m = n$ *имеем*

$$\int_{-1}^{1} x^n \operatorname{sign} U_n(x)\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{18}$$

Доказательство. Здесь, как обычно, знак sign означает

$$\operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0, \\ 0, & f(x) = 0, \\ -1, & f(x) < 0. \end{cases}$$

Заменой $x = \cos\theta$ интеграл (17) приводится к виду

$$J_{mn} = \int_{0}^{\pi} \cos^m\theta \ \operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta) \sin\theta\, d\theta. \tag{19}$$

В силу четности подынтегральной функции сегмент $[0,\pi]$ можно заменить сегментом $[-\pi,\pi]$, вводя множитель $1/2$ перед интегралом.

С другой стороны, из известного разложения

$$\operatorname{sign}(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

полагая в нем $x = (n+1)\theta$, получаем

$$\operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)(n+1)\theta}{2k+1}. \tag{20}$$

Далее, используя представление произведения косинуса на синус через разность синусов, при условии $0 \leqslant m \leqslant n-1$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin\theta \ \operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+1)\theta - \sin(m-1)\theta] \operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta)\, d\theta = 0, \tag{21}$$

ибо в разложении (20) наименьшая кратная дуга получается при значении $k = 0$, и эта дуга равна $(n+1)\theta$.

А теперь заметим, что, как известно [III.2, III.8], степень косинуса выражается через косинусы кратных дуг линейно:

$$\cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}\cos m\theta + \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} \cos k\theta. \tag{22}$$

Это тождество следует даже из свойств многочленов Чебышева первого рода, а именно, полагая $\cos\theta = x$, получим разложение степени x^m по многочленам Чебышева первого рода.

Сопоставляя (21) и (22), находим, что интеграл (17) при условии $0 \leqslant m \leqslant n-1$ равен нулю.

Если же $m = n$, то в силу (20) вместо (21) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \sin\theta \, \operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(n+1)\theta\, d\theta = 2.$$

Поэтому для интеграла (19) при $m = n$, учитывая (21) и (22), находим

$$J_{nn} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n\theta \sin\theta \, \operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \sin\theta \, \operatorname{sign}(\sin(n+1)\theta)\, d\theta = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, равенство (18) также установлено, и лемма 3.1 доказана полностью.

Теорема 3.4 (А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев). *На множестве $\widetilde{W}_n$ всех многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом минимум интеграла*

$$J(\widetilde{Q}_n) = \int_{-1}^{1} |\widetilde{Q}_n(x)|\, dx \tag{23}$$

достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{Q}_n(x) \equiv \widetilde{U}_n(x)$, причем этот минимум равен 2^{1-n}, т. е.

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int_{-1}^{1} |\widetilde{U}_n(x)|\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} |\widetilde{Q}_n(x)|\, dx. \tag{24}$$

Доказательство. Так как старший коэффициент многочлена $\widetilde{Q}_n(x)$ равен единице, то в силу (17) и (18) имеем равенство

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{Q}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{U}_n(x)\, dx = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \int_{-1}^{1} |\widetilde{Q}_n(x)|\, dx.$$

А для многочлена Чебышева имеем

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{U}_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} |\widetilde{U}_n(x)|\, dx. \tag{25}$$

Таким образом, многочлены Чебышева $\widetilde{U}_n(x)$ действительно минимизируют интеграл (23).

Докажем, что при каждом n минимизирующий многочлен единственен. Допустим противное: нашелся еще один многочлен $\widetilde{R}_n(x)$, для которого в формуле (24) имеет место знак равенства. Тогда для этого многочлена, аналогично (25), получим

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int\limits_{-1}^{1} \widetilde{R}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{U}_n(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} |\widetilde{R}_n(x)|\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \widetilde{R}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{R}_n(x)\, dx.$$

Составим разность между третьим и первым интегралами. Имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \widetilde{R}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{R}_n(x)[1 - \operatorname{sign} \widetilde{R}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{U}_n(x)]\, dx = 0.$$

Поскольку произведение первых двух сомножителей под знаком интеграла есть $|\widetilde{R}_n(x)|$, то разность в квадратных скобках равна нулю всюду на сегменте $[-1, 1]$, кроме, быть может, $2n$ точек, т. е. имеем

$$\operatorname{sign} \widetilde{R}_n(x) \operatorname{sign} \widetilde{U}_n(x) \equiv 1.$$

Следовательно, многочлен $\widetilde{R}_n(x)$ меняет знак в нулях многочлена $\widetilde{U}_n(x)$, а так как старшие коэффициенты многочленов $\widetilde{R}_n(x)$ и $\widetilde{U}_n(x)$ одинаковые, то эти многочлены тождественны. Таким образом, теорема 3.4 доказана.

Переходим к рассмотрению вопроса об условиях сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева второго рода.

Пусть на сегменте $[-1, 1]$ задана функция $f(x)$, интегрируемая с весом (3). Тогда коэффициенты Фурье можно вычислить по формуле

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{U}_n(t)\sqrt{1-t^2}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-1}^{1} f(t) \sin[(n+1)\arccos t]\, dt =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\pi} f(\cos\tau) \sin(n+1)\tau \sin\tau\, d\tau, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (26)$$

В результате функции $f(x)$ ставится в соответствие ее ряд Фурье по многочленам Чебышева второго рода

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{U}_n(x). \quad (27)$$

Т е о р е м а 3.5. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$ и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию*

Дини (4.8), *то ряд* (27) *сходится к функции* $f(x)$ *во всех точках интервала* $(-1,1)$, *причем сходимость равномерная на сегменте* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$, *и, кроме того, имеет место равенство*

$$\sqrt{1-x^2}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{U}_k(x)\right| \leqslant c_1 E_n(f)(1+\ln n), \qquad x \in [-1,1], \tag{28}$$

где постоянная c_1 *не зависит от* n *и* x.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\theta) = \sin\theta f(\cos\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

В силу неравенства

$$|\Phi(\theta) - \Phi(\tau)| \leqslant |\sin\theta - \sin\tau||f(\cos\theta)| + |\sin\tau||f(\cos\theta) - f(\cos\tau)|$$

модуль непрерывности функции $\Phi(\theta)$ удовлетворяет условию Дини. Поэтому, учитывая нечетность этой функции, имеем равномерно сходящееся разложение

$$\Phi(\theta) = \sin\theta f(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\theta, \tag{29}$$

где

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\tau f(\cos\tau)\sin k\tau\, d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{30}$$

Далее, при условии $0 < \theta < \pi$ из (29) находим

$$f(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi. \tag{31}$$

Полученный ряд сходится равномерно на всяком сегменте $[\delta, \pi-\delta]$ при фиксированном $\delta > 0$.

Нетрудно видеть, что ряды (27) и (31) почленно тождественны при условии $x = \cos\theta$. В самом деле, в силу формул (4), (26) и (30) имеем

$$a_k \widehat{U}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} f(\cos\tau)\sin(k+1)\tau\sin\tau\, d\tau \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin[(k+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= b_{k+1}\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, ряд (27) сходится равномерно на всяком сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ при фиксированном $\varepsilon > 0$.

Для доказательства оценки (28) сначала заметим, что в силу известного неравенства Лебега для тригонометрических рядов Фурье при $\theta \in [0, \pi]$ имеем

$$\left|\Phi(\theta) - \sum_{k=1}^{n+1} b_k \sin k\theta\right| \leqslant c_2 E_{n+1}(\Phi; 2\pi)[1 + \ln(n+1)]; \tag{32}$$

здесь $E_{n+1}(\Phi; 2\pi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $\Phi(\theta)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n+1$ [III.1, III.2, III.8].

С другой стороны, пусть $Q_n(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$, т. е.

$$E_n(f) = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - Q_n(x)|.$$

Разложим $Q_n(x)$ по многочленам Чебышева второго рода:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x).$$

Тогда в силу нечетности функции $\Phi(x)$ имеем

$$E_{n+1}(\Phi; 2\pi) \leqslant \max_{\theta\in[-\pi,\pi]} \left|\Phi(\theta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \sin(k+1)\theta\right| =$$
$$= \max_{\theta\in[-\pi,\pi]} |\sin\theta| \left|f(\cos\theta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}\right| \leqslant E_n(f).$$

Теперь неравенство (32) приводится к виду

$$|\sin\theta| \left|f(\cos\theta) - \sum_{k=1}^{n+1} b_k \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\right| \leqslant c_3 E_n(f)(1+\ln n).$$

Полагая здесь $x = \cos\theta$, получим неравенство (28). Этим теорема 3.5 доказана.

Приведем теперь одно простое условие, достаточное для равномерной сходимости ряда (27) к функции $f(x)$ на всем сегменте ортогональности $[-1,1]$.

Теорема 3.6. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1,1]$, причем $f'(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, где $\alpha > 1/2$, то ряд Фурье по многочленам Чебышева второго рода сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[-1,1]$, и имеет место неравенство*

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{U}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_4}{n^{\alpha-1/2}}, \qquad x\in[-1,1]. \tag{33}$$

Доказательство. Аналогично общей формуле (I.5.18) здесь имеем неравенство Лебега

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{U}_k(x)\right| \leqslant c_5 E_n(f)[1 + L_n(x)], \qquad x\in[-1,1]. \tag{34}$$

В силу неравенства (I.5.8) при условии $f'(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$ имеем оценку

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_5}{n^{1+\alpha}}. \tag{35}$$

Оценим теперь функцию Лебега для многочленов Чебышева второго рода:

$$L_n(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{U}_k(x)\widehat{U}_k(t) \right| \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Применяя неравенство Буняковского–Шварца, в силу (12) находим

$$L_n^2(x) \leqslant \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{U}_k(x)\widehat{U}_k(t) \right|^2 \sqrt{1-t^2}\, dt \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |\widehat{U}_k(x)|^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt \leqslant c_7 \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \leqslant c_8 n^3, \qquad x \in [-1,1]. \tag{36}$$

Следовательно, постоянные Лебега для рядов Фурье по многочленам Чебышева второго рода возрастают не быстрее $n^{3/2}$. Поэтому из неравенства (34), учитывая (35) и (36), получаем

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{U}_k(x) \right| \leqslant \frac{c_9}{n^{1+\alpha}} (1 + c_{10} n^{3/2}) \leqslant \frac{c_{11}}{n^{\alpha - 1/2}}, \qquad x \in [-1,1].$$

Этим теорема 3.6 доказана.

Аналогично, если $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ непрерывно дифференцируема p раз, причем $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, то вместо (33) получается неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{U}_k(x) \right| \leqslant \frac{c_{12}}{n^{p+\alpha-1/2}}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{37}$$

Таким образом, условия сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева второго рода во внутренних точках сегмента ортогональности примерно те же самые, что и для тригонометрических рядов Фурье, а сходимость в концевых точках имеет место при гораздо больших ограничениях на функцию $f(x)$ на всем сегменте $[-1,1]$, ибо концевые точки $x = \pm 1$ являются особыми точками весовой функции, т. е. ее нулями, и поэтому в этих точках многочлены Чебышева второго рода не ограничены.

Неравенства (33) и (37) получены здесь с помощью весьма простой оценки (36). В гл. VII будут сформулированы более точные результаты, относящиеся к общему случаю многочленов Якоби.

§ 7. Некоторые дополнения и задачи

Из всех систем ортогональных многочленов с различными весовыми функциями и интервалами ортогональности многочлены Чебышева первого рода являются наиболее простыми, наиболее характерны-

ми и в то же время наиболее важными как в теоретическом плане, так и, особенно, в смысле приложений в вычислительной математике. Поскольку для многочленов Чебышева справедлива формула (1.1), то в этом случае отпадает сложный и важный в других случаях вопрос об асимптотических свойствах ортогональных многочленов, который необходимо рассматривать при исследовании рядов Фурье по этим многочленам. Далее, в приложениях наиболее важны два экстремальных свойства многочленов Чебышева: наименьшее уклонение от нуля на сегменте ортогональности и наибольшее уклонение вне этого сегмента. Но самое главное заключается в том, что теория многочленов Чебышева и рядов Фурье по ним фактически не зависит от общей теории ортогональных многочленов. И можно изучать и применять многочлены Чебышева и ряды Фурье–Чебышева без знания общей теории ортогональных многочленов. Именно поэтому ряды Фурье–Чебышева изучаются и широко применяются в теории приближения функций [III.8, III.12] и в вычислительной математике [II.2, II.5, IV.1, IV.2, IV.4]. Наиболее полно свойства многочленов Чебышева, рядов Фурье–Чебышева и их применения в численных методах изложены в монографии С. Пашковского [II.5]. В ней подробно изложены различные алгоритмы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений с помощью многочленов Чебышева.

Рассмотрим одну простую, но характерную схему применения многочленов Чебышева первого и второго рода к решению дифференциальных уравнений.

В вычислительной практике применяются различные тождества для многочленов Чебышева первого и второго рода. С помощью основных формул

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \tag{1}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)} = \frac{1}{n+1}\, T'_{n+1}(x), \tag{2}$$

используя свойства тригонометрических функций, нетрудно получить тождества

$$T_{-n}(x) = T_n(x), \qquad U_n(x) = -\,U_{-(n+2)}(x), \tag{3}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\,[U_n(x) - U_{n-2}(x)] = U_n(x) - xU_{n-1}(x), \tag{4}$$

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}\,[T_{m-n}(x) + T_{m+n}(x)], \tag{5}$$

$$U_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}\,[U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x)]. \tag{6}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varphi(x)y' + \psi(x)y = f(x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{7}$$

Будем считать, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируемы на сегменте $[-1,1]$; решение ищем на этом же сегменте. Вводим разложения

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \qquad x \in [-1,1], \tag{8}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x), \qquad x \in [-1,1], \tag{9}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k U_k(x), \qquad x \in [-1,1], \tag{10}$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m U_m(x), \qquad x \in [-1,1]. \tag{11}$$

Считаем, что все эти разложения сходятся равномерно, а разложение (8) можно дифференцировать почленно. Из формулы (2) находим

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n U_{n-1}(x). \tag{12}$$

Все разложения (8)–(12) подставляем в уравнение (7). В результате получаем

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n U_{n-1}(x)\right] + \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k U_k(x)\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} f_m U_m(x).$$

Поскольку все ряды сходятся равномерно, это равенство можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_k n a_n T_k(x) U_{n-1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_k a_n U_k(x) T_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m U_m(x). \tag{13}$$

А теперь воспользуемся формулой (6). В результате имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_k n a_n \frac{1}{2}\left[U_{n-1-k}(x) + U_{n-1+k}(x)\right] + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_k a_n \frac{1}{2}\left[U_{k-n}(x) + U_{k+n}(x)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} f_m U_m(x). \tag{14}$$

Это тождество представляем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_k n a_n \frac{1}{2} U_{n-1-k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_k n a_n \frac{1}{2} U_{n-1+k}(x) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_k a_n \frac{1}{2} U_{k-n}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_k a_n \frac{1}{2} U_{k+n}(x) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} f_m U_m(x). \quad (15)$$

В этом тождестве коэффициенты $\{a_n\}$ неизвестны. Для их определения сравниваем коэффициенты при $U_m(x)$ слева и справа. В результате получаем бесконечную систему линейных неоднородных уравнений. Было бы желательно исследовать эту систему и определить условия существования решения. Заметим, что в случае отрицательности чисел $n-k-1$ и $k-n$ следует воспользоваться второй из формул (3).

Рассмотрим теперь максимальную сходимость рядов Фурье по многочленам Чебышева. Этот вид сходимости в общем виде впервые подробно определен и изучен в монографии Д.Л. Уолша [III.14]. *Максимальная сходимость* некоторых рядов или приближающих многочленов на некотором множестве рассматривается при условии, что приближаемая функция аналитическая на более широкой области. В монографии [III.11] изложены некоторые результаты о максимальной сходимости рядов по многочленам Фабера. Но поскольку многочлены Чебышева являются многочленами Фабера для сегмента $[-1,1]$, то в монографии [III.11] приведены краткие формулировки результатов о максимальной сходимости рядов Фурье–Чебышева. В настоящем параграфе вопрос о максимальной сходимости рядов Фурье–Чебышева рассматривается более подробно.

Снова рассмотрим случай, когда функция $f(z)$ аналитическая в канонической области G_R и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}_R$ (см. § 4). Тогда для этой функции справедливы формулы (4.13), (4.15) и (4.16). Следовательно, при $x \in [-1,1]$ имеем равенство

$$f(x) - S_n(x;f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R} f\left[\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{T_k(x)}{w^{k+1}}\right]dw. \quad (16)$$

Поскольку $x \in [-1,1]$, то, полагая, как обычно, $\cos\theta = x$, находим формулу

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos kx}{w^{k+1}} = \frac{1}{2w}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{w^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{e^{-ik\theta}}{w^k}\right] = \\ = \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2w^{n+1}}\,\frac{1}{w-e^{i\theta}} + \frac{e^{-i(n+1)\theta}}{2w^{n+1}}\,\frac{1}{w-e^{-i\theta}}. \quad (17)$$

Подставляя правую часть этого равенства под знак интеграла в равенстве (16) и переходя к оценкам, получаем

$$|f(x) - S_n(x;f)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4\pi R^{n+1}} \int\limits_{|w|=R} \left| f\left[\frac{1}{2}\Big(w + \frac{1}{w}\Big)\right]\right| \left[\frac{1}{|w - e^{i\theta}|} + \frac{1}{|w - e^{-i\theta}|}\right] |dw| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi R^n} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left[\frac{1}{2}\Big(Re^{it} + \frac{1}{Re^{it}}\Big)\right]\right| \frac{dt}{|Re^{it} - e^{i\theta}|}. \quad (18)$$

С другой стороны, имеем оценку [III.11]

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it} - \rho|} \leqslant \frac{1}{\rho} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \qquad \rho = \frac{1}{R}. \quad (19)$$

Допустим теперь, что функция $f(z)$ аналитическая в канонической области G_R и ограниченная по модулю равномерно, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M, \qquad z \in \overline{G}_R. \quad (20)$$

Тогда из неравенств (18) и (19) получаем оценку

$$|f(x) - S_n(x;f)| \leqslant \frac{M}{R^n} \ln \frac{R+1}{R-1}, \qquad R > 1. \quad (21)$$

А если функция $f(z)$ аналитическая в области G_R и только интегрируема на контуре Γ_R, то, вводя обозначение

$$M_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left[\frac{1}{2}\Big(Re^{it} + \frac{1}{Re^{it}}\Big)\right]\right| dt, \quad (22)$$

из формул (17) и (18) получаем неравенство

$$|f(x) - S_n(x;f)| \leqslant \frac{M_1}{R^{n+1}(R-1)}, \qquad R > 1. \quad (23)$$

Как и в случае максимальной сходимости рядов по многочленам Фабера [III.11], здесь можно ввести многочлены наилучшего равномерного приближения $Q_n(\zeta)$ функции $f(\zeta)$ в области $\overline{G}_R$, где $\zeta = \frac{1}{2}\Big(w + \frac{1}{w}\Big)$. В самом деле, из формулы (16) получаем равенство

$$f(x) - S_n(x;f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} [f(\zeta) - Q_n(\zeta)] \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{T_k(x)}{w^{k+1}}\right] dw. \quad (24)$$

Вводим обозначение

$$E_n(f, \overline{G}_R) = \max_{\zeta \in \overline{G}_R} |f(\zeta) - Q_n(\zeta)|. \quad (25)$$

Тогда из формулы (24) аналогично (21) имеем неравенство

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{1}{R^n} E_n(f, \overline{G}_R) \ln \frac{R+1}{R-1}. \tag{26}$$

Можно привести и другие формулировки условий максимальной сходимости аналогично результатам из работы [III.11].

Основные неравенства (21), (23) и (26) наверняка могут быть усилены как в смысле значений постоянных, так и в смысле зависимости от R.

В работе Р.В. Арутюняна [XI.6] рассмотрена максимальная сходимость рядов Фурье по многочленам Чебышева второго рода.

Глава IV

МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА

§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства

Как уже было отмечено в гл. I, многочлены $\{P_n(x)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с единичным весом $h(x) \equiv 1$, называются многочленами Лежандра. В настоящей главе в качестве исходного определения принимаются стандартизованные многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\,[(x^2-1)^n]^{(n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Эта формула называется *формулой Родрига* для многочленов Лежандра. Выполняя дифференцирование, находим

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1,\\
&P_1(x) = x,\\
&P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2-1),\\
&P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3-3x),\\
&P_4(x) = \frac{1}{8}\,(35x^4-30x^2+3),\\
&P_5(x) = \frac{1}{8}\,(63x^5-70x^3+15x),\\
&P_6(x) = \frac{1}{16}\,(231x^6-315x^4+105x^2-5),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Докажем ортогональность многочленов (1) с весом $h(x) \equiv 1$ на сегменте $[-1, 1]$. При $m < n$, интегрируя по частям, имеем

$$A_{mn} = \int\limits_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx = \frac{1}{n!\,2^n}\int\limits_{-1}^{1} x^m[(x^2-1)^n]^{(n)}\,dx =$$

$$= \frac{x^m}{n!\,2^n}\,[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} - \frac{m}{n!\,2^n}\int\limits_{-1}^{1} x^{m-1}[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\,dx. \tag{2}$$

Так как многочлен $(x^2-1)^n$ имеет в точках $x = \pm 1$ нули кратности n, то все его производные до порядка $n-1$ включительно имеют нули в этих двух точках. Следовательно, внеинтегральные члены в формуле (2) равны нулю. Аналогично, интегрируя (2) по частям еще $m-1$

раз, при $m < n$ получим

$$A_{mn} = \frac{(-1)^m m!}{n!\,2^n} \int\limits_{-1}^{1} [(x^2-1)^n]^{(n-m)}\,dx = \\ = \frac{(-1)^m m!}{n!\,2^n} [(x^2-1)^n]^{(n-m-1)}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Это равенство справедливо при фиксированном многочлене $P_n(x)$ для любых $m < n$. Следовательно, из равенства (2) находим

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x)\,dx = 0,$$

где $Q_m(x)$ — произвольный многочлен степени $m < n$. А тогда по первому критерию ортогональности (теорема 1.2) многочлен $P_n(x)$ является ортогональным многочленом с весом $h(x) \equiv 1$ на сегменте $[-1, 1]$.

Таким образом, ортогональность многочленов Лежандра (1) доказана.

Непосредственно из формулы (1) следует, что старший коэффициент многочлена $P_n(x)$ равен

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!\,2^n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}. \tag{3}$$

Поэтому *многочлен Лежандра с единичным старшим коэффициентом* определяется равенством

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} [(x^2-1)^n]^{(n)}. \tag{4}$$

Вычислим теперь норму многочлена $P_n(x)$. Используя ортогональность этого многочлена и интегрируя по частям аналогично формуле (2), находим

$$||P_n||^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \int\limits_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx = \\ = \frac{(2n)!}{(n!)^3 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{1} x^n [(x^2-1)^n]^{(n)}\,dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx. \tag{5}$$

Последний интеграл также вычисляется интегрированием по частям. Имеем последовательно

$$\int\limits_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n\,dx = (x+1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1} - \\ - \frac{n}{n+1} \int\limits_{-1}^{1} (x+1)^{n-1} (x-1)^{n+1}\,dx = \ldots \\ \ldots = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int\limits_{-1}^{1} (x-1)^{2n}\,dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Подставляя этот результат в формулу (5), находим

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{6}$$

Следовательно, *ортонормированный многочлен Лежандра* имеет вид

$$\widehat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x). \tag{7}$$

Из формул (3) и (7) находим старший коэффициент ортонормированного многочлена Лежандра:

$$\mu_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}. \tag{8}$$

Переходим теперь к выводу производящей функции для многочленов Лежандра. При фиксированном $x \in (-1,1)$ рассмотрим функцию

$$F(x,w) = \frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}}, \qquad x \in (-1,1). \tag{9}$$

Подкоренное выражение обращается в нуль только в точках $w = x \pm \pm\sqrt{x^2-1}$. Поэтому в единичном круге $|w|<1$ существует регулярная однозначная ветвь функции (9), удовлетворяющая условию $F(x,0) = = 1$. Будем считать, что функция (9) есть именно эта ветвь. Коэффициенты Тейлора этой функции определяются по формуле

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}}\,\frac{dw}{w^{n+1}}, \tag{10}$$

где Γ есть окружность $|w| = \rho < 1$. В интеграле (10) заменим переменное интегрирования по формулам

$$\sqrt{1-2xw+w^2} = 1 - wt, \qquad w = \frac{2(t-x)}{t^2-1}.$$

Если точка w описывает контур Γ в положительном направлении, то соответствующая точка t описывает один раз и тоже в положительном направлении некоторый контур C, охватывающий точку x. В самом деле, имеем очевидное равенство

$$t = \frac{1}{w}\left[1 - \sqrt{1-2xw+w^2}\,\right] = \frac{1}{w}\left[-\frac{1}{2}(-2xw+w^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}(-2xw+w^2)^2 + \ldots\right] = x + w\left[\frac{1}{2}(x^2-1) + O(\rho)\right].$$

При достаточно малых ρ изменение аргумента суммы, стоящей в последних квадратных скобках, равно нулю. Поэтому при обходе точкой w контура Γ аргумент разности $t - x$ изменяется на такую же

величину, что и аргумент w, т. е. на 2π. Следовательно, в интеграле (10) можно произвести указанную замену. В результате получим

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^{n+2}(2tx-t^2-1)\,dt}{2^n(t-x)^{n+1}(2tx-t^2-1)(t^2-1)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-x)^{n+1}}.$$

Используя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции, получаем значение для последнего интеграла:

$$a_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = P_n(x).$$

Следовательно, функция (9) в силу формулы (10) является производящей функцией для многочленов Лежандра, т. е. имеем разложение

$$F(x,w) = \frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)w^n. \tag{11}$$

Такова *производящая функция для стандартизованных многочленов Лежандра.* Еще раз заметим, что разложение (11) справедливо при $x \in (-1,1)$ и $|w| < \rho$. Эта функция аналитическая не только по w, но и по переменному x.

Далее, из формулы (1) нетрудно получить прямое разложение стандартизованных многочленов Лежандра по степеням независимого переменного. В самом деле, дифференцируя n раз тождество

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x^2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-k)!}\, x^{2n-2k},$$

получаем

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\, x^{n-2k}, \tag{12}$$

где, как обычно, $[n/2]$ означает целую часть числа $n/2$. В частности, отдельно для четных и нечетных номеров имеем

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(4n-2k)!}{k!\,(2n-k)!\,(2n-2k)!}\, x^{2n-2k}, \tag{13}$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(4n+2-2k)!}{k!\,(2n+1-k)!\,(2n+1-2k)!}\, x^{2n-2k+1}. \tag{14}$$

Из этих равенств находим значения стандартизованных многочленов Лежандра в начале координат:

$$P_{2n+1}(0) = 0, \qquad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\,2^n}. \tag{15}$$

Вычислим теперь значения многочленов Лежандра на концах сегмента ортогональности. Используя формулу Лейбница для производной от произведения двух функций, находим

$$[(x^2-1)^n]^{(n)} = [(x+1)^n(x-1)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [(x+1)^n]^{(n-k)}[(x-1)^n]^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n(n-1)\ldots(k+1)(x+1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-1)^{n-k}. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что правая часть равенства (16) при $x=1$ равна $n!\,2^n$, а при $x=-1$ имеем $(-1)^n n!\,2^n$. Следовательно, стандартизованные многочлены Лежандра на концах сегмента ортогональности имеют значения

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{17}$$

А теперь подсчитаем коэффициенты $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ в общей рекуррентной формуле (I.2.4) конкретно для многочленов Лежандра. Из формулы (1) следует, что любой многочлен Лежандра $P_n(x)$ содержит степени x только той же четности, что и его номер n. Это следует также из формул (13) и (14). Поэтому в рекуррентных формулах (I.2.1) и (I.2.4) для многочленов Лежандра необходимо имеем $\alpha_n \equiv 0$. А для второго коэффициента общей рекуррентной формулы в силу (I.2.5) здесь, учитывая равенство (8), находим

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\,\frac{[(n+1)!]^2 2^{n+1}}{(2n+2)!} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}\,\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}. \tag{18}$$

Следовательно, рекуррентная формула (I.2.4) для ортонормированных многочленов Лежандра имеет вид

$$\frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\,\widehat{P}_{n+1}(x) = x\widehat{P}_n(x) - \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\,\widehat{P}_{n-1}(x). \tag{19}$$

Подставляя сюда значение ортонормированного многочлена Лежандра из формулы (7), получим рекуррентную формулу для стандартизованных многочленов Лежандра

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \tag{20}$$

Рассмотрим теперь формулу Кристоффеля–Дарбу для многочленов Лежандра. Из общей формулы (I.2.10) в силу равенства (18) находим

$$\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t) = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\,\frac{\widehat{P}_{n+1}(x)\widehat{P}_n(t) - \widehat{P}_n(x)\widehat{P}_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{21}$$

Переходя к стандартизованным многочленам Лежандра, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} P_k(x)P_k(t) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{22}$$

Сравнение последних четырех формул показывает, что для стандартизованных многочленов Лежандра все формулы имеют более простой вид. В этом, в частности, и заключается значение стандартизации ортогональных многочленов.

Рассмотрим теперь более подробно производящую функцию многочленов Лежандра (11). При фиксированном x разложение (11) сходится, если w удовлетворяет условию

$$|2xw - w^2| < 1, \tag{23}$$

ибо при этом условии функция $F(x, w)$ является аналитической по переменному w. Дифференцируя разложение (11) по x почленно, получаем

$$F'_x(x, w) = w(1 - 2xw + w^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)w^n. \tag{24}$$

При условии (23) функция $F'_x(x, w)$ аналитична по переменному w, и разложение (24) сходится. Поэтому почленное дифференцирование возможно.

С другой стороны, дифференцируя разложение (11) по w, имеем

$$F'_w(x, w) = (x - w)(1 - 2xw + w^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)w^{n-1}. \tag{25}$$

Разделим теперь равенство (24) на w и подставим полученное разложение в среднюю часть равенства (25). В результате находим

$$(x - w)\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)w^{n-1}.$$

Представляем левую часть в виде разности двух рядов. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} xP'_n(x)w^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)w^n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)w^{n-1}.$$

А теперь, сравнивая коэффициенты при w^{n-1} слева и справа, получаем равенство

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x). \tag{26}$$

Далее, представляя равенство (24) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xw + w^2}} = (1 - 2xw + w^2)\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)w^{n-1},$$

в силу (11) имеем тождество

$$(1-2xw+w^2)\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)w^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)w^n.$$

Сравнивая коэффициенты, находим

$$P_n'(x)-2xP_{n-1}'(x)+P_{n-2}'(x)=P_{n-1}(x).$$

Подставляя вместо n номер $n+1$, получаем

$$P_{n+1}'(x)-2xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=P_n(x). \tag{27}$$

С другой стороны, дифференцируя рекуррентное соотношение (20), имеем

$$(n+1)P_{n+1}'(x)=(2n+1)P_n(x)+(2n+1)xP_n'(x)-nP_{n-1}'(x). \tag{28}$$

Исключая производную $P_{n-1}'(x)$ из формул (27) и (28), получим еще одно тождество

$$P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=(n+1)P_n(x). \tag{29}$$

Заменив в этом тождестве n на $n-1$, получим

$$P_n'(x)-xP_{n-1}'(x)=nP_{n-1}(x). \tag{30}$$

А теперь исключим $P_{n-1}'(x)$ из тождеств (26) и (30). В результате находим

$$(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x). \tag{31}$$

Наконец, складывая (26) и (29), находим еще одно тождество

$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x). \tag{32}$$

Таковы рекуррентные соотношения, связывающие производные многочленов Лежандра и получающиеся с помощью производящей функции (11). Из этих рекуррентных соотношений нетрудно получить дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра.

В самом деле, дифференцируя равенство (31), получим

$$-2xP_n'(x)+(1-x^2)P_n''(x)=nP_{n-1}'(x)-nP_n(x)-nxP_n'(x).$$

Подставляем вместо производной $P_{n-1}'(x)$ ее значение из формулы (26). В результате приходим к тождеству

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)\equiv 0. \tag{33}$$

Следовательно, многочлен Лежандра $P_n(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \tag{34}$$

Подсчитаем теперь значения производных многочленов Лежандра в начале координат. Из формулы (24), полагая в ней $x=0$, находим

$$(1+w^2)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(0)w^{n-1}.$$

Используя известные формулы для коэффициентов биномиального ряда, получаем

$$P'_{2n}(0) = 0, \qquad P'_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{n!\, 2^n}. \tag{35}$$

Здесь, как обычно, символом $m!!$ обозначается произведение всех чисел, не превосходящих m и имеющих ту же четность, что и m. Аналогичным образом из формул (11) и (24) нетрудно получить значения многочленов Лежандра и их производных на концах сегмента ортогональности.

Выведем еще одну формулу для многочленов Лежандра. Если $x \in [-1, 1]$, то, полагая $x = \cos\theta$, из формулы (11) находим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2w\cos\theta + w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) w^n, \qquad |w| < 1. \tag{36}$$

Подкоренное выражение можно представить в виде

$$1 - w(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + w^2 = (1 - we^{i\theta})(1 - we^{-i\theta}).$$

Подставляя это выражение в левую часть (36), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - we^{i\theta}}} \frac{1}{\sqrt{1 - we^{-i\theta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) w^n, \qquad |w| < 1. \tag{37}$$

С другой стороны, имеем известные разложения

$$\frac{1}{\sqrt{1 - we^{i\theta}}} = 1 + \frac{1}{2} we^{i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} w^2 e^{2i\theta} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} w^n e^{ni\theta} + \ldots, \tag{38}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - we^{-i\theta}}} = 1 + \frac{1}{2} we^{-i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} w^2 e^{-2i\theta} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} w^n e^{-ni\theta} + \ldots \tag{39}$$

Подставляем разложения (38) и (39) в левую часть равенства (37) и сравниваем коэффициенты при w^n. В результате получаем формулу

$$P_n(\cos\theta) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{2} [e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta}] + \\ + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} [e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta}] + \ldots \tag{40}$$

Переходя к косинусам, находим

$$P_n(\cos\theta) = 2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cos n\theta + 2 \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{2} \cos(n-2)\theta + \\ + 2 \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos(n-4)\theta + \ldots \tag{41}$$

Так как все коэффициенты в правой части (41) положительны, то, следовательно, максимум правой части (41) достигается при $\theta = 0$. Таким образом, из формулы (41) следует, что многочлен Лежандра $P_n(x)$ имеет максимум в точке $x = 1$.

А в точке $x = -1$ имеется максимум по абсолютному значению. Учитывая формулы (17) и (35), нетрудно построить графики нескольких первых многочленов Лежандра (рис. 4.1.).

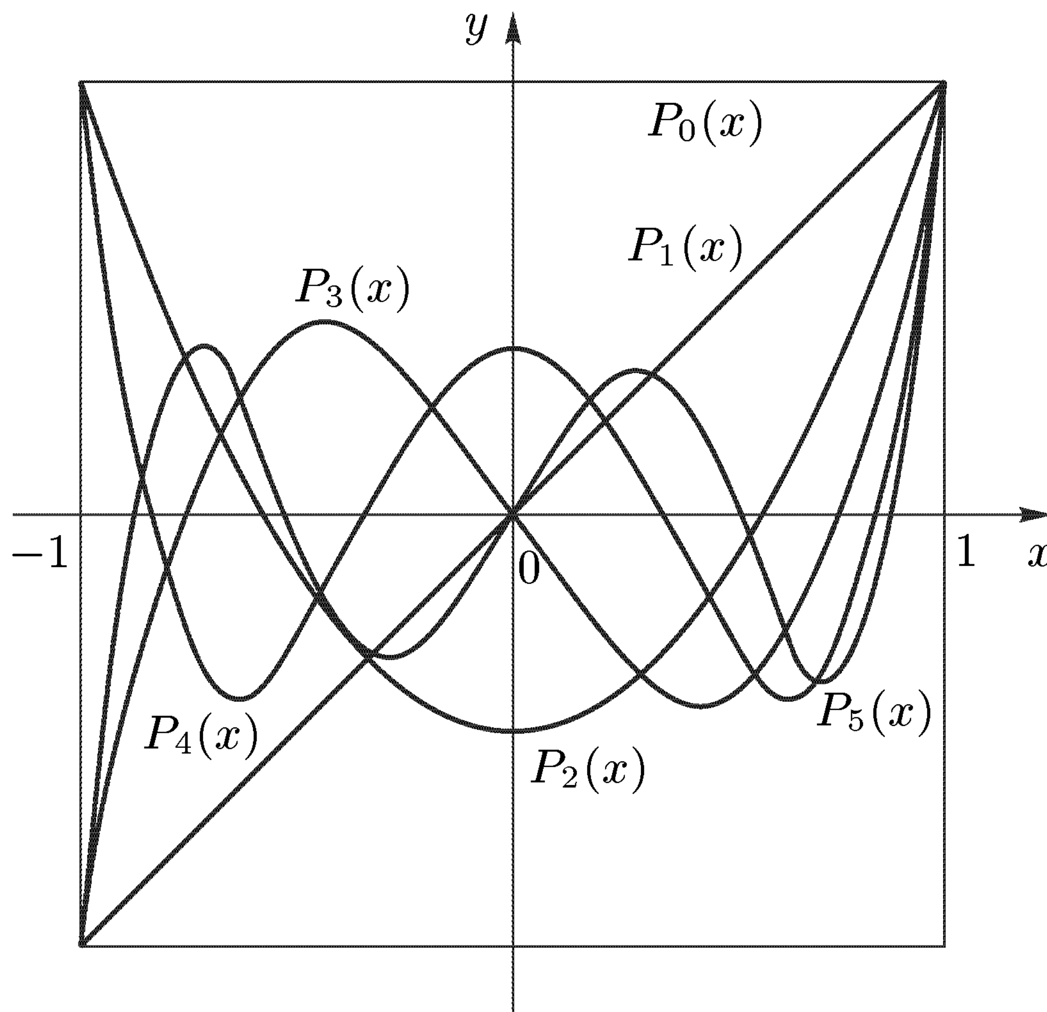


Рис. 4.1

В формулах (40) и (41) число слагаемых равно $[(n+1)/2]$. В частности, для четного многочлена Лежандра имеем формулу

$$P_{2n}(\cos\theta) = 2\,\frac{(4n-1)!!}{(4n)!!}\cos 2n\theta + 2\,\frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!}\,\frac{1}{2}\cos(2n-2)\theta + \\ + 2\,\frac{(4n-5)!!}{(4n-4)!!}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos(2n-4)\theta + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (42)$$

причем коэффициента 2 нет только у последнего слагаемого.

§ 2. Интегральные представления и равномерная оценка

Прежде всего докажем для многочленов Лежандра формулу Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\,d\theta, \qquad |x| \leqslant 1. \quad (1)$$

По интегральной формуле Коши для производных аналитической функции и в силу формулы Родрига (1.1) имеем

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n \frac{dt}{(t-x)^{n+1}}, \qquad x \in (-1,1), \quad (2)$$

где контур Γ есть окружность $|t-x|=\rho<1$. При фиксированном $x\in(-1,1)$ положим $x=\cos\varphi$, $\rho=\sin\varphi$, где $\varphi\in(0,\pi)$. Тогда справедливы равенства

$$t=\cos\varphi+\sin\varphi e^{i\theta},\qquad dt=i\sin\varphi e^{i\theta}\,d\theta,$$

$$t^2-1=\cos^2\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi e^{i\theta}+\sin^2\varphi e^{2i\theta}-1=$$
$$=\sin^2\varphi(e^{2i\theta}-1)+2\cos\varphi\sin\varphi e^{i\theta}=2\sin\varphi e^{i\theta}(\cos\varphi+i\sin\varphi\sin\theta).$$

Подставляя эти значения в интеграл (2), находим

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta)^n\,d\theta,\qquad x\in(-1,1).\tag{3}$$

С другой стороны, при любом натуральном k геометрически очевидны равенства

$$\int_0^{\pi}(\cos\theta)^k\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^k\,d\theta.$$

Следовательно, правые части (1) и (3) совпадают при $x\in(-1,1)$. Этим равенство (1) доказано при $x\in(-1,1)$. Но по непрерывности обе формулы (1) и (3) распространяются с интервала на весь сегмент.

Таким образом, формула Лапласа (1) доказана.

Теорема 4.1. *Для ортонормированных многочленов Лежандра имеет место равномерная оценка на всем сегменте ортогональности*

$$|\widehat{P}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2n+1}{2}},\qquad x\in[-1,1].\tag{4}$$

Доказательство. В самом деле, из формулы (1) при $|x|\leqslant 1$ находим

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n\,d\theta=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x^2+(1-x^2)\cos^2\theta]^{n/2}\,d\theta\leqslant 1,\tag{5}$$

ибо максимум подкоренного выражения достигается при $\theta=0$. Далее, из формулы (1.7), учитывая оценку (5), получаем неравенство (4). Теорема 4.1 доказана.

Равномерная оценка (4) является точной. В самом деле, из формул (1.7) и (1.17) имеем равенства

$$\widehat{P}_n(1)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}},\qquad \widehat{P}_n(-1)=(-1)^n\sqrt{\frac{2n+1}{2}}.\tag{6}$$

Таким образом, в формуле (4) имеет место знак равенства при $x=\pm1$. И, следовательно, оценка (4) не может быть усилена для всего сегмента ортогональности.

Выведем еще одно важное интегральное представление для многочленов Лежандра. Из формулы Лапласа (1) при условии $x \in (-1, 1)$, полагая $x = \cos\varphi$, где $\varphi \in (0, \pi)$, находим

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\theta)^n\,d\theta. \tag{7}$$

А теперь введем комплексное переменное

$$w = \cos\varphi + i\sin\varphi\cos\theta. \tag{8}$$

Так как в интеграле (7) переменное θ изменяется от 0 до π, то, следовательно, комплексное переменное w изменяется по вертикальному отрезку от точки A с координатами $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ до точки B с координатами $\cos\varphi$ и $-\sin\varphi$.

Перейдем в интеграле (7) к комплексному переменному w. Из равенства (8) следует

$$dw = -i\sin\varphi\sin\theta\,d\theta. \tag{9}$$

Вычислим произведение синусов. Используя формулу (8), получаем

$$\begin{aligned} 1 - 2w\cos\varphi + w^2 &= 1 - 2\cos^2\varphi - 2i\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta + \\ &+ \cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi\cos^2\theta = \\ &= 1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\theta = \sin^2\varphi\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (9) можно представить в виде

$$d\theta = \frac{-\,dw}{i\sqrt{1 - 2w\cos\varphi + w^2}}.$$

А теперь переходим в интеграле (7) к комплексному переменному (8). В результате имеем

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\pi i}\int_B^A \frac{w^n\,dw}{\sqrt{1 - 2w\cos\varphi + w^2}}. \tag{10}$$

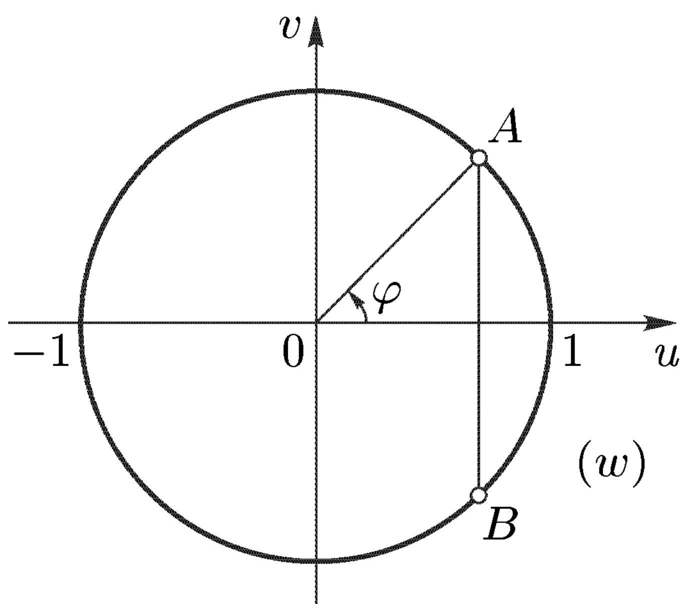


Рис. 4.2

Подкоренное выражение в формуле (10) обращается в нуль в точках A и B. Следовательно, в дополнении вертикального сегмента $[B, A]$ из двух значений корня можно выбрать ту однозначную ветвь, которая на линии разреза (B, A) справа принимает положительные значения. Имея в виду эту однозначную ветвь, можно в интеграле (10) вместо сегмента $[B, A]$ в качестве линии интегрирования взять дугу окружности, соединяющую точки B и A (рис. 4.2.).

Следовательно, интеграл (10) приводится к виду

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{in\tau}e^{i\tau}i\,d\tau}{\sqrt{1-2e^{i\tau}\cos\varphi+e^{i2\tau}}}. \tag{11}$$

Далее, поскольку фиксированная ветвь корня на действительной оси справа от сегмента $[B, A]$ имеет положительные значения, то в равенстве

$$\sqrt{1-2e^{i\tau}\cos\varphi+e^{i2\tau}} = \pm e^{i\tau/2}\sqrt{2(\cos\tau-\cos\varphi)}$$

необходимо выбрать знак плюс, если слева иметь в виду рассматриваемую ветвь корня. Поэтому из равенства (11) находим

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{i(n+1/2)\tau}\,d\tau}{\sqrt{2(\cos\tau-\cos\varphi)}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\varphi}^{\varphi} \frac{\cos(n+1/2)\tau\,d\tau}{\sqrt{2(\cos\tau-\cos\varphi)}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{\varphi} \frac{\cos(n+1/2)\tau\,d\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos\varphi}}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{\varphi} \frac{\cos(n+1/2)\tau\,d\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos\varphi}}, \qquad \varphi\in(0,\pi). \tag{12}$$

Эта формула называется *формулой Дирихле–Мелера.*

§ 3. Теорема Сонина и весовая оценка для многочленов Лежандра

При исследовании ортогональных многочленов часто применяются методы теории дифференциальных уравнений.

Теорема 4.2 (Н.Я. Сонин). *Если функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяет уравнению*

$$u'' + \varphi(t)u = 0, \tag{1}$$

где функция $\varphi(t)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, положительна и непрерывно дифференцируема в интервале (a, b), причем ее производная $\varphi'(t)$ положительна (отрицательна), то относительные максимумы величины $|u(t)|$ убывают (возрастают) при возрастании t от a до b.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(t) = u^2(t) + \frac{1}{\varphi(t)}\,[u'(t)]^2. \tag{2}$$

В экстремальных точках функции $u(t)$ выполняется условие

$$v(t) = u^2(t). \tag{3}$$

Далее, учитывая уравнение (1), из формулы (2) получаем равенство

$$v'(t) = 2u(t)u'(t) + \frac{2u'(t)u''(t)}{\varphi(t)} - \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}\,[u'(t)]^2 = -\varphi'(t)\left[\frac{u'(t)}{\varphi(t)}\right]^2.$$

Если производная $\varphi'(t)$ положительна, то функция $v(t)$ монотонно убывает при возрастании t от a до b. Но поскольку в точках экстремума функции $u(t)$ выполняется условие (3), то, следовательно, максимумы величины $|u(t)|$ монотонно убывают на (a, b).

Аналогично, если производная $\varphi'(t)$ отрицательна, то функция $v(t)$ возрастает на $[a, b]$ и таким же свойством в силу формулы (3) обладают относительные максимумы величины $|u(t)|$. Таким образом, теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3 (Т. Стилтьес, С.Н. Бернштейн). *Для ортонормированных многочленов Лежандра справедливо весовое неравенство*

$$(1-x^2)^{1/4}|\widehat{P}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{\pi n}}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{4}$$

Доказательство. С целью применения теоремы Сонина рассмотрим функцию

$$u(\theta) = (\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{5}$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''(\theta) + \varphi(\theta)u(\theta) = 0, \tag{6}$$

где

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{(2\sin\theta)^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Вычислим левую часть уравнения (6). Используя формулы (5) и (7), находим

$$\begin{gathered}
u'' + \varphi(\theta)u = -\frac{1}{4}\,(\sin\theta)^{-3/2}\cos^2\theta\,P_n(\cos\theta) - \frac{1}{2}\,(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta) - \\
-\frac{1}{2}\,(\sin\theta)^{1/2}\cos\theta\,P_n'(\cos\theta) - \frac{3}{2}\,(\sin\theta)^{1/2}\cos\theta P_n'(\cos\theta) + \\
+ (\sin\theta)^{5/2}P_n''(\cos\theta) + \left[\frac{1}{(2\sin\theta)^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right](\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta) = \\
= (\sin\theta)^{1/2}\left\{\left[-\frac{1}{4}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\sin\theta)^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]P_n(\cos\theta) + \right. \\
\left. + \left[-\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right]P_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta\,P_n''(\cos\theta)\right\} = \\
= (\sin\theta)^{1/2}\left[\sin^2\theta\,P_n''(\cos\theta) - 2\cos\theta\,P_n'(\cos\theta) + n(n+1)P_n(\cos\theta)\right] \equiv 0.
\end{gathered}$$

Сумма в квадратных скобках при замене $x = \cos\theta$ тождественно равна нулю в силу (1.33). Таким образом, функция (5) является решением уравнения (6) при условии (7).

Далее, функция $\varphi(\theta)$, определяемая равенством (7), удовлетворяет условиям теоремы Сонина. Эта функция монотонно убывает в интервале $(0, \pi/2)$. Поэтому относительные максимумы величины $|u(\theta)|$ монотонно возрастают на сегменте $[0, \pi/2]$.

С другой стороны, из формул (1.15) и (1.35) имеем равенства

$$P_{2m+1}(0) = 0, \qquad P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \tag{8}$$

$$P'_{2m}(0) = 0, \qquad P'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}. \tag{9}$$

Дроби в правых частях можно оценить с помощью известного неравенства [IV.1]

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi m}}. \tag{10}$$

Из равенства

$$u'(\theta) = \frac{1}{2}(\sin\theta)^{-1/2}\cos\theta P_n(\cos\theta) - (\sin\theta)^{3/2}P'_n(\cos\theta) \tag{11}$$

следует, что при $n = 2m$ в точке $\theta = \pi/2$ имеем $u'\Big(\pi/2\Big) = 0$. Таким образом, функция $|u(\theta)|$ имеет в точке $\theta = \pi/2$ относительный максимум. Следовательно, учитывая (5), находим неравенство

$$(\sin\theta)^{1/2}|P_n(\cos\theta)| \leqslant |P_n(0)|, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad n = 2m. \tag{12}$$

Так как многочлен $P_{2m}(\cos\theta)$ содержит только четные степени $\cos\theta$, то неравенство (12) распространяется на весь сегмент $[0, \pi]$.

Далее, если n нечетное, т. е. $n = 2m+1$, то точка $\theta = \pi/2$ не является экстремальной для функции $u(\theta)$. Но нетрудно видеть, что вспомогательная функция $v(t)$, определенная равенством (2), здесь при условии (7) все равно имеет максимум в точке $\theta = \pi/2$. Поэтому в силу (3) в точках экстремума функции $u(\theta)$ имеем

$$(\sin\theta)^{1/2}|P_n(\cos\theta)| = [v(\theta)]^{1/2} \leqslant \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}[v(\theta)]^{1/2} = \\ = \Big[v\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big]^{1/2} = \Big\{u^2\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{\varphi(\pi/2)}\Big[u'\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big]^2\Big\}^{1/2} = \\ = \Big[\frac{1}{4} + \Big(n + \frac{1}{2}\Big)^2\Big]^{-1/2}|P'_n(0)|. \tag{13}$$

Это неравенство, справедливое при $n = 2m+1$, с экстремальных точек распространяется на весь сегмент $[0, \pi/2]$ и далее на сегмент $[0, \pi]$, так как многочлен $P_n(x)$ при нечетном n содержит только нечетные степени x.

Если n четное, то в силу (8) и (10) имеем

$$|P_n(0)| < \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{14}$$

А если n нечетное, то, полагая $n-1=2m$, в силу (9) и (10) находим

$$|P_n'(0)| = \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} = (n+1)\,\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} <$$
$$< (n+1)\,\frac{1}{\sqrt{\pi(m+1)}} = \sqrt{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{n(n+1)}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{15}$$

А теперь, учитывая неравенство

$$\sqrt{n(n+1)} < \sqrt{\frac{1}{4}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

из формулы (13) с помощью (15) получаем оценку

$$(\sin\theta)^{1/2}|P_n(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{16}$$

Формулы (15)и (16) выводились при условии $n=2m+1$. А для четных n неравенство (16) следует из формул (12) и (14).

Заменой $\cos\theta = x$ неравенство (16) приводится к виду

$$(1-x^2)^{1/4}|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{17}$$

Наконец, учитывая формулу (1.7), из неравенства (17) находим неравенство (4), и теорема 4.3 доказана.

§ 4. Метод Лиувилля–Стеклова в применении к многочленам Лежандра

В отличие от многочленов Чебышева, для многочленов Лежандра нет такой простой формулы, с помощью которой можно было бы переносить свойства рядов Фурье по тригонометрической системе на ряды Фурье–Лежандра. Поэтому естественно возникает задача об изучении асимптотических свойств многочленов Лежандра. В настоящем параграфе мы рассмотрим асимптотическую формулу Лапласа для многочленов Лежандра. Для вывода этой формулы мы используем метод Лиувилля–Стеклова. Этот метод первоначально был введен Лиувиллем для изучения свойств решений некоторых дифференциальных уравнений. А затем В.А. Стеклов усовершенствовал его и применил к исследованию асимптотических свойств ортогональных многочленов.

Сначала рассмотрим две простейшие формулы Лиувилля. Пусть функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ суть линейно независимые решения однородного уравнения

$$A(\theta)u'' + B(\theta)u' + C(\theta)u = 0. \tag{1}$$

Тогда неоднородное уравнение

$$A(\theta)u'' + B(\theta)u' + C(\theta)u = D(\theta) \tag{2}$$

имеет общее решение в виде

$$u(\theta) = c_1 u_1(\theta) + c_2 u_2(\theta) + \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{u_1(\theta)u_2(t) - u_2(\theta)u_1(t)}{u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)} \frac{D(t)}{A(t)}\, dt, \tag{3}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а θ_0 — фиксированная точка. Этот факт легко проверяется подстановкой правой части равенства (3) в уравнение (2).

Далее, из уравнения (1) имеем тождество

$$A(\theta)(u_1''u_2 - u_2''u_1) + B(\theta)(u_1'u_2 - u_2'u_1) = 0.$$

Здесь разность в первых скобках есть производная от разности во вторых скобках. Поэтому имеем равенство

$$u_1'(\theta)u_2(\theta) - u_2'(\theta)u_1(\theta) = c_3 \exp\left[-\int\limits_{\theta_1}^{\theta} \frac{B(t)}{A(t)}\, dt\right]. \tag{4}$$

Здесь постоянные c_3 и θ_1 определяются в зависимости от выбора линейно независимых решений $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ уравнения (1).

Формулы (3) и (4) часто используются при исследовании асимптотических свойств ортогональных многочленов.

Теорема 4.4. *Многочлены Лежандра при* $0 < \theta < \pi$ *удовлетворяют интегральному уравнению Вольтерра второго рода*

$$(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \\ + \frac{1}{n + 1/2} \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin[(n + 1/2)(t - \theta)]}{4\sin^2 t} (\sin t)^{1/2} P_n(\cos t)\, dt, \tag{5}$$

где

$$\lambda_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \qquad \lambda_{2m+1} = \frac{2m+1}{2m+3/2} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}. \tag{6}$$

Доказательство. В § 3 было установлено, что функция (3.5)

$$u(\theta) = (\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{7}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'' + \frac{1}{4\sin^2\theta}\, u + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 u = 0.$$

Представим это уравнение в виде

$$[(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta)]'' + \Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2[(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta)] = \\ = -\frac{1}{4\sin^2\theta}(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta), \qquad 0<\theta<\pi, \quad (8)$$

и будем условно рассматривать его как неоднородное с правой частью. Соответствующее однородное уравнение

$$u'' + \Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2 u = 0$$

имеет линейно независимые решения

$$u_1(\theta) = \cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta, \qquad u_2(\theta) = \sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta. \quad (9)$$

Вычислим разности, стоящие в числителе и в знаменателе дроби под знаком интеграла в формуле (3). Вводя для краткости обозначение $N = n + 1/2$, находим

$$u_1(\theta)u_2(t) - u_2(\theta)u_1(t) = \cos N\theta\sin Nt - \sin N\theta\cos Nt = \sin N(t-\theta),$$

$$u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t) = -\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = -N.$$

Следовательно, формула (3) для уравнения (8) имеет вид

$$(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta) = c_1\cos N\theta + c_2\sin N\theta + \\ + \frac{1}{N}\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sin N(t-\theta)}{4\sin^2 t}(\sin t)^{1/2}P_n(\cos t)\,dt, \qquad 0<\theta<\pi. \quad (10)$$

Пусть $\theta_0 = \pi/2$. Тогда сам интеграл (10) и его производная обращаются в нуль при $\theta = \pi/2$. Следовательно, для определения неизвестных постоянных c_1 и c_2 имеем систему уравнений

$$P_n(0) = c_1\cos\frac{N\pi}{2} + c_2\sin\frac{N\pi}{2}, \qquad N = n+\frac{1}{2}, \\ -P_n'(0) = -c_1N\sin\frac{N\pi}{2} + c_2N\cos\frac{N\pi}{2}. \quad (11)$$

Если n четное, т. е. $n = 2m$, то в силу (3.8) и (3.9) имеем

$$(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = c_1\cos\frac{N\pi}{2} + c_2\sin\frac{N\pi}{2},$$

$$0 = -c_1\sin\frac{N\pi}{2} + c_2\cos\frac{N\pi}{2}, \qquad N = n+\frac{1}{2}.$$

Из этих двух уравнений, учитывая обозначения (6), находим

$$c_1 = (-1)^m\lambda_{2m}\cos\frac{\pi N}{2}, \qquad c_2 = (-1)^m\lambda_{2m}\sin\frac{\pi N}{2}. \quad (12)$$

Поэтому внеинтегральная сумма в (10) имеет вид

$$c_1 \cos N\theta + c_2 \sin N\theta =$$
$$= (-1)^m \lambda_{2m} \Big[\cos N\theta \cos \frac{\pi N}{2} + \sin N\theta \sin \frac{\pi N}{2}\Big] =$$
$$= (-1)^m \lambda_{2m} \cos\Big(N\theta - \frac{N\pi}{2}\Big) = \lambda_{2m} \cos\Big(N\theta - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Аналогично, если n нечетное, т. е. $n = 2m + 1$, то из формулы (11), учитывая (3.8) и (3.9), получим систему

$$0 = c_1 \cos \frac{\pi N}{2} + c_2 \sin \frac{\pi N}{2},$$
$$(-1)^m (2m+1)\, \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = c_1 N \sin \frac{\pi N}{2} - c_2 N \cos \frac{\pi N}{2}.$$

Учитывая обозначения (6), здесь вместо (12) находим

$$c_1 = (-1)^m \lambda_{2m+1} \sin \frac{\pi N}{2}, \qquad c_2 = (-1)^{m+1} \lambda_{2m+1} \cos \frac{\pi N}{2}.$$

А тогда внеинтегральная сумма в правой части (10) при $n = 2m + 1$ имеет вид

$$c_1 \cos N\theta + c_2 \sin N\theta =$$
$$= (-1)^m \lambda_{2m+1} \Big[\cos N\theta \sin \frac{\pi N}{2} - \sin N\theta \cos \frac{\pi N}{2}\Big] =$$
$$= (-1)^m \lambda_{2m+1} \sin\Big(\frac{\pi N}{2} - N\theta\Big) = \lambda_{2m+1} \cos\Big(N\theta - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Таким образом, формула (5) установлена и для нечетных n. Этим теорема 4.4 доказана.

С помощью интегрального уравнения Вольтерра (5) можно получить *асимптотическую формулу для многочленов Лежандра.* Для этого достаточно оценить интеграл, стоящий в правой части этого уравнения, а также определить асимптотику коэффициента λ_n.

Теорема 4.5. *Для многочленов Лежандра при* $0 < \theta < \pi$ *имеет место асимптотическая формула*

$$(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\Big[\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big] + R_n(\theta), \tag{13}$$

в которой остаточный член допускает оценки

$$\Big|R_n(\theta)\Big| \leqslant \frac{c_4}{\theta n^{3/2}} \Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big), \qquad 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

$$\Big|R_n(\theta)\Big| \leqslant \frac{c_5}{(\pi - \theta) n^{3/2}} \Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big), \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi, \tag{15}$$

где постоянные c_4 *и* c_5 *не зависят от* n *и* θ.

Доказательство. Учитывая неравенство (3.16), при условии $0 < \theta \leqslant \pi/2$ для второго слагаемого в правой части формулы (5) имеем

$$|R_n(\theta)| \leqslant \frac{1}{4n+2}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\int\limits_\theta^{\pi/2}\frac{dt}{\sin^2 t} \leqslant \frac{1}{4n+2}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2\int\limits_\theta^{\pi/2}\frac{dt}{t^2} =$$
$$= \frac{1}{4n+2}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2\Big(\frac{1}{\theta}-\frac{2}{\pi}\Big) \leqslant \frac{c_4}{\theta n^{3/2}}\Big(\frac{\pi}{2}-\theta\Big). \quad (16)$$

Если же $\pi/2 < \theta < \pi$, то, производя замену переменной интегрирования по формуле $t = \pi - \tau$, находим

$$|R_n(\theta)| \leqslant \frac{1}{4n+2}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4n+2}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\int\limits_{\pi-\theta}^{\pi/2}\frac{d\tau}{\sin^2\tau}.$$

А теперь в формуле (16) вместо θ надо поставить $\pi - \theta$. В результате получим неравенство (15). Этим теорема 4.5 доказана.

Лемма 4.1. *Для коэффициента* λ_n *в формулах* (5) *и* (13) *имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\Big[1 - \frac{1}{4n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big], \qquad n\to\infty. \quad (17)$$

Доказательство. Прежде всего из хорошо известной формулы удвоения для гамма-функции [IV.1, IV.5, IV.6]

$$\Gamma(a)\,\Gamma\Big(a+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a) \quad (18)$$

имеем равенство

$$\Gamma\Big(m+\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2^m}. \quad (19)$$

С помощью этого равенства коэффициенты (6) представляются в виде

$$\lambda_{2m} = \frac{2^m\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\,m!\,2^m} = \frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)} = \frac{\Gamma(n/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2+1)}, \quad (20)$$

$$\lambda_{2m+1} = \frac{2(m+1/2)\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\,(2m+3/2)\Gamma(m+1)} = \frac{2\,\Gamma(m+3/2)}{\sqrt{\pi}\,(2m+3/2)\,\Gamma(m+1)} =$$
$$= \frac{2\Gamma(n/2+1)}{\sqrt{\pi}\,(n+1/2)\,\Gamma(n/2+1/2)}. \quad (21)$$

Заметим, что в формуле (20) число n четное, а в формуле (21) нечетное. Далее воспользуемся формулой Стирлинга с остаточным

членом

$$\ln\Gamma(a)=\ln\sqrt{2\pi}+\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\ln a-a+\frac{B_1}{2a}-\frac{\theta B_2}{12a^3},\tag{22}$$

где $0<\theta<1$, а $B_1=1/6$ и $B_2=1/30$ суть числа Бернулли [II.2, IV.1]. С помощью этой формулы находим

$$\ln\frac{\Gamma(n/2+1/2)}{\Gamma(n/2+1)}=\Big[\ln\sqrt{2\pi}+\frac{n}{2}\ln\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{n+1}-O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-$$
$$-\Big[\ln\sqrt{2\pi}+\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big)\ln\frac{n+2}{2}-\frac{n}{2}-1+\frac{B_1}{n+2}-O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]=$$
$$=\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big)\ln\frac{n}{2}\Big(1+\frac{2}{n}\Big)+\frac{1}{2}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=$$
$$=\frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}-\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{2}{n}\Big)+\frac{1}{2}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=$$
$$=\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\Big)-\frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\Big(\frac{2}{n}-\frac{2^2}{2n^2}\Big)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{n}-\frac{1}{4n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\tag{23}$$

Следовательно, из формулы (20) имеем

$$\sqrt{\pi}\lambda_{2m}=\sqrt{\frac{2}{n}}\exp\Big[-\frac{1}{4n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big]=\sqrt{\frac{2}{n}}\Big[1-\frac{1}{4n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big].$$

Этим формула (17) доказана для четных n. А для нечетных n из равенства (21), используя (23), находим

$$\ln(\lambda_{2m+1}\sqrt{\pi}\,)=\ln 2-\ln\Big(n+\frac{1}{2}\Big)-\ln\frac{\Gamma(n/2+1/2)}{\Gamma(n/2+1)}=$$
$$=\ln 2-\ln n-\ln\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)+\frac{1}{4n}-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=$$
$$=\ln\frac{2}{n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{n}-\frac{1}{4n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Таким образом, лемма 4.1 доказана.

С помощью равенства (17) и оценок (14) и (15) формула (13) приводится к виду

$$(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta-\frac{\pi}{4}\Big]+F_n(\theta),\tag{24}$$

где остаточный член допускает оценку

$$|F_n(\theta)|\leqslant\frac{c_6}{\varepsilon n^{3/2}},\qquad \theta\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon].\tag{25}$$

Далее, из равенства (24) находим

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big] + \Phi_n(\theta), \tag{26}$$

$$|\Phi_n(\theta)| \leqslant \frac{c_7}{(\varepsilon n)^{3/2}}, \qquad \theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]. \tag{27}$$

Наконец, во всех формулах в правой части вместо косинуса можно поставить синус. Тогда, например, вместо (26) получим формулу

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\sin\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta + \frac{\pi}{4}\Big] + \Phi_n(\theta), \tag{28}$$

в которой остаточный член допускает ту же оценку (27).

Лемма 4.2. *Производная остаточного члена в формуле* (13) *допускает оценки*

$$|R_n'(\theta)| \leqslant \frac{c_8}{\theta\sqrt{n}}\Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big), \qquad 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{29}$$

$$|R_n'(\theta)| \leqslant \frac{c_9}{(\pi-\theta)\sqrt{n}}\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big), \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi, \tag{30}$$

в которых постоянные c_8 и c_9 не зависят от n и θ.

Доказательство. В самом деле, поскольку через $R_n(\theta)$ в формуле (5) обозначен интеграл (с множителем), то, дифференцируя этот интеграл, получим

$$R_n'(\theta) = -\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos[(n+1/2)(t-\theta)]}{4\sin^2 t}\,(\sin t)^{1/2} P_n(\cos t)\,dt.$$

А остальная часть рассуждений проводится, как и при доказательстве неравенств (14) и (15).

С помощью леммы 4.2 можно, так сказать, «продифференцировать» почленно асимптотическое равенство (13) и полученные из него формулы (24), (26) и (28). Например, из (13) следует формула

$$\frac{d}{d\theta}\,P_n(\cos\theta) = -\lambda_n\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,\frac{\sin[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{(\sin\theta)^{1/2}} + \frac{\Psi_n(\theta)}{(\sin\theta)^{1/2}}, \tag{31}$$

где функция $\Psi_n(\theta)$ удовлетворяет неравенствам (29) и (30).

Далее, асимптотическое разложение многочленов Лежандра можно продолжить, т. е. можно выделить второй член в асимптотических формулах (5), (24) и (26). В результате остаточный член получается более высокого порядка малости. Для этого надо вместо двух последних сомножителей под знаком интеграла (5) поставить всю правую часть этого равенства. В результате получим формулу

$$(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \lambda_n\Big[\cos\Big(N\theta - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{\varphi_n(\theta)}{N}\Big] + K_n(\theta), \tag{32}$$

в которой введены обозначения

$$\varphi_n(\theta) = \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin N(t-\theta)\cos(Nt-\pi/4)}{4\sin^2 t}\,dt, \tag{33}$$

$$K_n(\theta) = \frac{1}{N^2}\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin N(t-\theta)}{4\sin^2 t}\left[\int\limits_{\pi/2}^{t} \frac{\sin N(\tau-t)}{4\sin^2\tau}\,(\sin\tau)^{1/2}P_n(\cos\tau)\,d\tau\right]dt. \tag{34}$$

В силу неравенства (3.16) остаточный член (34) удовлетворяет условиям

$$|K_n(\theta)| \leqslant \frac{c_9}{\varepsilon^2 n^{5/2}}, \qquad \theta\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon], \tag{35}$$

$$|K'_n(\theta)| \leqslant \frac{c_{10}}{\varepsilon^2 n^{3/2}}, \qquad \theta\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon], \tag{36}$$

В этих неравенствах постоянные не зависят от n и ε. Далее, для функции (33) имеем представление

$$\varphi_n(\theta) = \cos N\theta \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin Nt\cos(Nt-\pi/4)}{4\sin^2 t}\,dt - {}$$

$$- \sin N\theta \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos Nt\cos(Nt-\pi/4)}{4\sin^2 t}\,dt = $$

$$= \frac{1}{8}\cos N\theta\left\{\sin\frac{\pi}{4}\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{dt}{\sin^2 t} + \int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{\sin[(2n+1)t-\pi/4]}{\sin^2 t}\,dt\right\} - $$

$$- \frac{1}{8}\sin N\theta\left\{\cos\frac{\pi}{4}\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{dt}{\sin^2 t} + \int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{\cos[(2n+1)t-\pi/4]}{\sin^2 t}\,dt\right\}. \tag{37}$$

Первые интегралы в фигурных скобках легко вычисляются, а вторые интегралы обозначим через $C_n(\theta)$ и $D_n(\theta)$ соответственно. Тогда из формулы (37) получаем

$$\varphi_n(\theta) = \frac{\cos\theta}{8\sin\theta}\sin\Big(N\theta-\frac{\pi}{4}\Big) + \frac{1}{8}\cos N\theta\, C_n(\theta) - \frac{1}{8}\sin N\theta\, D_n(\theta).$$

А теперь введем обозначение

$$H_n(\theta) = \frac{\lambda_n}{8N}\,[C_n(\theta)\cos N\theta - D_n(\theta)\sin N\theta] + K_n(\theta). \tag{38}$$

Тогда из (32) получаем асимптотическую формулу

$$(\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta) = \lambda_n\Big[\cos\Big(N\theta-\frac{\pi}{4}\Big) + \frac{\cos\theta}{8N\sin\theta}\sin\Big(N\theta-\frac{\pi}{4}\Big)\Big] + H_n(\theta). \tag{39}$$

Оценим остаточный член формулы (39). Непосредственно из определений функций $C_n(\theta)$ и $D_n(\theta)$ аналогично (16) имеем неравенства

$$|C_n'(\theta)| \leqslant \frac{c_{11}}{\varepsilon^2}, \quad |D_n'(\theta)| \leqslant \frac{c_{12}}{\varepsilon^2}, \qquad \theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon].$$

Далее, интегрируя по частям интегралы, определяющие эти функции, и переходя к оценкам, находим

$$|C_n(\theta)| \leqslant \frac{c_{13}}{n\varepsilon^2}, \quad |D_n(\theta)| \leqslant \frac{c_{14}}{n\varepsilon^2}, \qquad \theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon].$$

Поэтому, учитывая (17), (35) и (36), из формулы (38) получаем оценки

$$|H_n(\theta)| \leqslant \frac{c_{15}}{\varepsilon^2 n^{5/2}}, \qquad \theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon], \tag{40}$$

$$|H_n'(\theta)| \leqslant \frac{c_{16}}{\varepsilon^2 n^{3/2}}, \qquad \theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]. \tag{41}$$

Из доказательства этих оценок ясно, что на самом деле имеют место поточечные оценки, аналогичные неравенствам (14), (15), (29) и (30).

Для упрощения формулы (39) можно воспользоваться формулой (17) для λ_n. Далее, нетрудно видеть, что первое и второе слагаемые в правой части (39) представляются через косинус и синус аргумента $N\theta = (n + 1/2)\theta$ с некоторыми коэффициентами, зависящими от θ. Аналогичный результат получается и в том случае, если сделать следующий шаг в методе Лиувилля–Стеклова, т. е. правую часть (39) подставить под знак интеграла (34). Более того, этот метод подстановки после конечного числа p шагов приводит к формуле

$$(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \\ = \cos N\theta \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{A_k(\theta)}{n^{k+1/2}}\right] + \sin N\theta \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{B_k(\theta)}{n^{k+1/2}}\right] + O\Big(\frac{1}{n^{p+1/2}}\Big), \\ \theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]. \tag{42}$$

Эта формула доказывается методом индукции [I.6]. А функции $A_k(\theta)$ и $B_k(\theta)$ не зависят от n и p и являются аналитическими на интервале $(0, \pi)$.

Фактически мы рассмотрели формулу (42) при условии $p = 2$, но зато установили более содержательные оценки (40) и (41) для остаточного члена.

Наряду с формулой (42) для многочленов Лежандра установлены и другие асимптотические формулы [I.6], причем в некоторых случаях доказательства основываются на интегральных представлениях для многочленов Лежандра. Например, имеет место очень важная *асимптотическая формула Стилтьеса*

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k(n)\,\frac{\cos[(n+k+1/2)\theta - (k+1/2)\pi/2]}{(2\sin\theta)^{k+1/2}} + R_n(\theta, p), \\ 0 < \theta < \pi, \tag{43}$$

в которой p — любое фиксированное натуральное число, а коэффициенты определяются равенствами

$$A_0(n) = \frac{4\,[(2n)!!]}{\pi\,[(2n+1)!!]},$$

$$A_k(n) = \frac{8\,[(2n)!!]\,[(2k-1)!!]^2}{\pi\,[(2k)!!]\,[(2n+2k+1)!!]}, \qquad k \geqslant 1.$$

Остаточный член формулы (43) допускает оценку

$$|R_n(\theta, p)| \leqslant \frac{B_p}{(n\sin\theta)^{p+1/2}}, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

где постоянная B_p не зависит от θ и n. Доказательство формулы Стилтьеса (43) излагается в монографиях [I.6, IV.4].

§ 5. Ряды Фурье по многочленам Лежандра

Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-1, 1]$, то можно определить ее коэффициенты Фурье по многочленам Лежандра

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\widehat{P}_n(t)\,dt, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Таким образом, получаем ряд Фурье–Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x). \tag{2}$$

Рассмотрим сначала условия сходимости этого ряда во внутренних точках сегмента ортогональности.

Теорема 4.6. *Если функция $f(t)$ интегрируема с квадратом на сегменте $[-1, 1]$, т. е. $f(t) \in L_2[-1, 1]$, а для некоторой фиксированной точки $x \in (-1, 1)$ выполняется условие*

$$\int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\right]^2 dt < \infty, \tag{3}$$

то в этой точке x ряд (2) сходится к функции $f(x)$, т. е. имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x). \tag{4}$$

Доказательство. Так как $|x| < 1$, то из неравенства (3.4) следует, что последовательность ортонормированных многочленов Лежандра $\{\widehat{P}_n(x)\}$ ограничена. Поэтому можно применить общую теорему 1.11 об условиях сходимости ряда Фурье по ортогональным многочленам в отдельной точке. Этим теорема 4.6 доказана.

Условие (3) выполняется, если в данной точке x функция $f(t)$ имеет производную либо существует такая окрестность точки x, в которой функция $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, т. е. выполняется неравенство

$$|f(t) - f(x)| < M|t - x|^{\alpha}, \qquad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Теорема 4.7. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$, причем ее модуль непрерывности на всем сегменте удовлетворяет условию Дини, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \ln n = 0, \tag{5}$$

то ряд Фурье–Лежандра (2) сходится к функции $f(x)$ во всех точках интервала $(-1, 1)$, причем сходимость равномерная на всяком сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$, то можно применить неравенство Лебега (I.5.18)

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x) \right| \leqslant [1 + L_n(x)]\, E_n(f), \tag{6}$$

где

$$L_n(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(t) \widehat{P}_k(x) \right| dt. \tag{7}$$

Оценим интеграл (7) при фиксированном x из интервала $(-1, 1)$. Для этого разобьем сегмент $[-1, 1]$ на пять сегментов:

$$\begin{gathered} \Delta_1 = \left[-1,\, -1 + \frac{\varepsilon}{2}\right], \qquad \Delta_2 = \left[-1 + \frac{\varepsilon}{2},\, x - \frac{1}{n}\right], \\ \Delta_3 = \left[x - \frac{1}{n},\, x + \frac{1}{n}\right], \quad \Delta_4 = \left[x + \frac{1}{n},\, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right], \quad \Delta_5 = \left[1 - \frac{\varepsilon}{2},\, 1\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Считаем, что $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Оценим интеграл (7) по первому сегменту Δ_1. Применяя формулу Кристоффеля–Дарбу (1.21), для интеграла по первому сегменту находим

$$\begin{aligned} A_1(x) = \int_{\Delta_1} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x) \widehat{P}_k(t) \right| dt \leqslant \\ \leqslant c_1 \int_{\Delta_1} \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}(x)\widehat{P}_n(t) - \widehat{P}_n(x)\widehat{P}_{n+1}(t)}{x - t} \right| dt \leqslant \\ \leqslant c_1 |\widehat{P}_{n+1}(x)| \int_{\Delta_1} \frac{|\widehat{P}_n(t)|}{|x - t|}\, dt + c_1 |\widehat{P}_n(x)| \int_{\Delta_1} \frac{|\widehat{P}_{n+1}(t)|}{|x - t|}\, dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Применяя неравенство Буняковского–Шварца, находим

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{|\widehat{P}_n(t)|}{|x-t|}\,dt \leqslant \left[\,\int\limits_{\Delta_1} \frac{dt}{|x-t|^2}\right]^{1/2} \left[\,\int\limits_{\Delta_1} |\widehat{P}_n(t)|^2\,dt\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Если $t \in \Delta_1 = [-1, -1+\varepsilon/2]$, то $|x-t| \geqslant \varepsilon/2$. Следовательно, имеем

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dt}{|x-t|^2} \leqslant c_2 \int\limits_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{c_2}{\varepsilon}.$$

Поэтому правая часть неравенства (10) не превосходит величины $c_3\varepsilon^{-1/2}$. Аналогично оценивается второй интеграл в правой части неравенства (9). Поэтому, применяя оценку (3.4), из (9) находим неравенство

$$A_1(x) \leqslant \frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon}\,(1-x^2)^{1/4}} \leqslant \frac{c_5}{\varepsilon^{3/4}}.$$

Здесь постоянная c_5 не зависит от ε и n. Аналогичную оценку допускает интеграл (7) по сегменту Δ_5 из системы (8).

Далее, для интеграла по второму сегменту Δ_2 из системы (8), снова используя неравенство (3.4), находим

$$A_2(x) \leqslant \frac{c_6}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_{\Delta_2} \frac{dt}{x-t} \leqslant \frac{c_7}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_{1/n}^{1} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{c_7}{\sqrt{\varepsilon}} \ln n.$$

Аналогично оценивается интеграл по сегменту Δ_4.

Наконец, оценим интеграл по третьему сегменту Δ_3 из системы (8). В силу неравенства (3.4) получаем

$$A_3(x) = \int\limits_{\Delta_3} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t) \right| dt \leqslant \frac{c_8(n+1)}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_{\Delta_3} dt \leqslant \frac{c_9}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Учитывая пять оценок, находим неравенство

$$L_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t) \right| dt \leqslant \frac{c_{10}\ln n}{\varepsilon^{3/4}}, \qquad x \in [-1+\varepsilon,\, 1-\varepsilon]. \tag{11}$$

С другой стороны, как уже было отмечено в предыдущих главах, из условия (5) следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)\ln n = 0.$$

А теперь, учитывая неравенство (11), находим, что правая часть (6) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно

$$x \in [-1+\varepsilon,\, 1-\varepsilon].$$

Этим теорема 4.7 доказана.

Рассмотрим теперь условия равномерной сходимости ряда Фурье–Лежандра (2) на всем сегменте ортогональности $[-1,1]$. Для этого введем постоянные Лебега

$$L_n = \max_{x\in[-1,1]} L_n(x). \tag{12}$$

Прежде всего отметим один простой результат, который является следствием неравенства (2.4).

Теорема 4.8. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1,1]$, то она разлагается в ряд Фурье–Лежандра (2), сходящийся равномерно на этом сегменте.*

Доказательство. В самом деле, применяя неравенство Буняковского–Шварца, в силу (2.4) при $x\in[-1,1]$ имеем

$$L_n^2(x) \leqslant 2\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=0}^{n}\widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right|^2 dt = 2\sum_{k=0}^{n}|\widehat{P}_k(x)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}(2k+1) \leqslant c_{11}n^2. \tag{13}$$

С другой стороны, поскольку функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, то в силу известной в теории приближений теоремы Джексона (теорема 12.10 при $p=1$) справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n\,E_n(f) = 0. \tag{14}$$

Следовательно, правая часть (6) убывает к нулю. И теорема 4.8 доказана.

Установленная теорема не является точной, ибо условие непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$ можно заменить более общим условием. Для получения более общего результата вместо соотношения (14) можно воспользоваться некоторым усилением теоремы Джексона, в котором приближение функции многочленами оценивается в зависимости от положения точки на сегменте $[-1,1]$. Это усиление изложено в теореме 12.12 и состоит в следующем. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$, причем $f^{(p)}(x)\in \operatorname{Lip}\alpha$, то существует такая последовательность многочленов $\{Q_n(x)\}$, что при $n\geqslant p$ выполняется неравенство

$$|f(x)-Q_n(x)| \leqslant \frac{c_{12}}{n^{p+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{p+\alpha}, \qquad x\in[-1,1]. \tag{15}$$

Теорема 4.9. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет на сегменте $[-1,1]$ условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, то она разлагается в ряд Фурье–Лежандра, сходящийся равномерно на этом сегменте, причем имеет место неравенство*

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{P}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_{13}(\alpha)}{n^{\alpha-1/2}}, \qquad x\in[-1,1]. \tag{16}$$

Доказательство. Как и при выводе неравенства Лебега, имеем

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x)\right| \leqslant |f(x) - Q_n(x)| + \\ + \int_{-1}^{1} |Q_n(t) - f(t)| \left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right| dt, \qquad x \in [-1,1]. \quad (17)$$

Будем считать, что многочлены $\{Q_n(x)\}$ выбраны таким образом, что выполняется условие (15) при $p = 0$. Тогда, учитывая известное неравенство [III.1, III.2, III.12]

$$|a+b|^\alpha \leqslant c_{14}(\alpha)\,[|a|^\alpha + |b|^\alpha], \qquad \alpha > 0, \quad (18)$$

из (15) получаем

$$|f(t) - Q_n(t)| \leqslant \frac{c_{15}}{n^\alpha}\left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{16}(\alpha)}{n^\alpha}\left[\frac{1}{n^\alpha} + (1-t^2)^{\alpha/2}\right], \qquad t \in [-1,1]. \quad (19)$$

Первая разность в правой части (17) в силу (19) убывает со скоростью $1/n^\alpha$. А для интеграла (17) в силу (13) и (19) имеем оценку

$$\int_{-1}^{1} |Q_n(t) - f(t)| \left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right| dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{16}(\alpha)}{n^\alpha}\left[\frac{1}{n^\alpha}\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right| dt + \right. \\ \left. + \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha/2}\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right| dt\right] \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{17}}{n^{2\alpha-1}} + \frac{c_{16}(\alpha)}{n^\alpha}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha/2}\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right| dt. \quad (20)$$

Таким образом, остается оценить интеграл

$$A_n(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha/2}\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t)\right| dt. \quad (21)$$

Пусть x — произвольная фиксированная точка из сегмента $[-1,1]$. Обозначим через $\Delta_n(x)$ ту часть сегмента $[-1,1]$, где выполняется неравенство $|x-t| \leqslant 1/n$, и пусть $\sigma_n(x)$ — остальная часть этого сегмента. Тогда, учитывая оценки (2.4) и (3.4), а также условие $\alpha > 1/2$,

находим

$$\int\limits_{\Delta_n(x)} (1-t^2)^{\alpha/2} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{18}}{n} \sum_{k=0}^{n} |\widehat{P}_k(x)| \leqslant \frac{c_{19}}{n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} \leqslant c_{20}\sqrt{n}. \quad (22)$$

Эта оценка не зависит от положения точки x на сегменте ортогональности $[-1,1]$.

Для оценки интеграла (21) на множестве $\sigma_n(x)$ используем формулу Кристоффеля–Дарбу (1.21). В результате получаем

$$\int\limits_{\sigma_n(x)} (1-t^2)^{\alpha/2} \left| \frac{\widehat{P}_{n+1}(x)\widehat{P}_n(t) - \widehat{P}_n(x)\widehat{P}_{n+1}(t)}{x-t} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant |\widehat{P}_{n+1}(x)| \int\limits_{\sigma_n(x)} (1-t^2)^{\alpha/2} |\widehat{P}_n(t)| \frac{dt}{|x-t|} +$$

$$+ |\widehat{P}_n(x)| \int\limits_{\sigma_n(x)} (1-t^2)^{\alpha/2} |\widehat{P}_{n+1}(t)| \frac{dt}{|x-t|}. \quad (23)$$

Далее с помощью аналогичного (18) неравенства

$$(1-t^2)^{\alpha/2} \leqslant c_{21}(\alpha)\,[(1-x^2)^{\alpha/2} + |x^2-t^2|^{\alpha/2}], \quad (24)$$

используя (2.4), находим

$$|\widehat{P}_{n+1}(x)| \int\limits_{\sigma_n(x)} (1-t^2)^{\alpha/2} |\widehat{P}_n(t)| \frac{dt}{|x-t|} \leqslant$$

$$\leqslant c_{22}\,|1-x^2|^{\alpha/2}\,|\widehat{P}_{n+1}(x)| \int\limits_{\sigma_n(x)} \frac{|\widehat{P}_n(t)|}{|x-t|}\,dt +$$

$$+ c_{23}\sqrt{n} \int\limits_{\sigma_n(x)} |\widehat{P}_n(t)| \frac{dt}{|x-t|^{1-\alpha/2}}. \quad (25)$$

Произведение перед первым интегралом в правой части (25) ограничено в силу (3.4). А для самого интеграла имеем оценку

$$\int\limits_{\sigma_n(x)} \frac{|\widehat{P}_n(t)|}{|x-t|}\,dt \leqslant c_{24} \left[\int\limits_{\sigma_n(x)} |\widehat{P}_n(t)|^2\,dt \right]^{1/2} \left[\int\limits_{\sigma_n(x)} \frac{dt}{|x-t|^2} \right]^{1/2} \leqslant c_{25}\sqrt{n}.$$

Эта оценка выполняется при любом положении точки x на сегменте $[-1,1]$.

Для оценки второго интеграла в правой части (25) воспользуемся известным неравенством Гёльдера [III.1, III.2]

$$\int_a^b |f(t)\varphi(t)|\,dt \leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\left[\int_a^b |\varphi(t)|^q\,dt\right]^{1/q}. \tag{26}$$

Здесь p и q суть положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{27}$$

В результате применения этого неравенства, учитывая (3.4), находим

$$\int\limits_{\sigma_n(x)} |\widehat{P}_n(t)|\,\frac{dt}{|x-t|^{1-\alpha/2}} = \int\limits_{\sigma_n(x)} \frac{(1-t^2)^{1/4}|\widehat{P}_n(t)|}{(1-t^2)^{1/4}|x-t|^{1-\alpha/2}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{26}\left[\int\limits_{\sigma_n(x)} \frac{dt}{(1-t^2)^{p/4}}\right]^{1/p}\left[\int\limits_{\sigma_n(x)} \frac{dt}{|x-t|^{(1-\alpha/2)q}}\right]^{1/q}. \tag{28}$$

Так как $\alpha > 1/2$, то p и q, удовлетворяющие условиям (27), можно выбрать так, чтобы оба интеграла в правой части (28) существовали как несобственные, даже если в них вместо $\sigma_n(x)$ поставить в качестве множества интегрирования весь сегмент $[-1,1]$. В самом деле, для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства $p < 4$ и $1-\alpha/2 < 1-1/p$, т. е. надо, чтобы было $2/\alpha < p < 4$, а это возможно, ибо $\alpha > 1/2$.

Итак, правая часть неравенства (28) ограничена равномерно при всех $x \in [-1,1]$. Поэтому первое слагаемое в правой части (23) возрастает не быстрее $\sqrt{n}$. Аналогично оценивается и второе слагаемое в правой части (23). Следовательно, интеграл (21) возрастает не быстрее $\sqrt{n}$, причем оценка равномерная относительно $x \in [-1,1]$. Учитывая эту оценку, из формулы (20) находим, что интеграл из формулы (17) убывает со скоростью $n^{1/2-\alpha}$. Этим неравенство (16) установлено, и теорема 4.9 доказана.

Теорема 4.10. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$ и $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, где $p+\alpha > 1/2$, то имеет место неравенство*

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\widehat{P}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_{27}}{n^{p+\alpha-1/2}}, \qquad x \in [-1,1], \tag{29}$$

где постоянная c_{27} не зависит от n и x.

Доказательство. Здесь снова применяем неравенство (15). В результате придем к необходимости оценить некоторый аналог интеграла (21), в котором вместо α поставлено $p+\alpha$. При этом условии некоторые оценки из доказательства теоремы 4.9 упрощаются. Но в целом интеграл (21) и в этом случае возрастает не быстрее $\sqrt{n}$.

Из неравенства (29) следует, что чем лучше функция $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$, т. е. чем больше она имеет на этом сегменте производных, тем быстрее сходится ее ряд Фурье–Лежандра.

§ 6. Теорема о равносходимости для рядов Фурье–Лежандра

Можно рассматривать более общие условия сходимости рядов Фурье по многочленам Лежандра внутри сегмента ортогональности. В настоящем параграфе показывается, как этот вопрос сводится к вопросу об условиях сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе некоторой вспомогательной функции.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-1,1]$. Кроме того, произведение $f(x)(1-x^2)^{-1/4}$ тоже интегрируемо на этом сегменте, т. е.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/4}|f(x)|\,dx = \int_{0}^{\pi}(\sin\theta)^{1/2}|f(\cos\theta)|\,d\theta < \infty. \tag{1}$$

Частичную сумму ряда Фурье–Лежандра (5.2) функции $f(x)$ в силу формул (1.7) и (1.22) можно представить в виде

$$S_n(x;f) = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\frac{P_{n+1}(x)P_n(t)-P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}\,dt. \tag{2}$$

Как обычно, будем считать $x=\cos\theta$ при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. И рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(\theta) = (\sin\theta)^{1/2}f(\cos\theta), \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{3}$$

Распространим эту функцию на весь сегмент $[-\pi,\pi]$ по закону четности. Обозначим через $s_n(\theta;F)$ частичную сумму ряда Фурье этой функции по тригонометрической системе.

Т е о р е м а 4.11. *Для всякого x из интервала* $(-1,1)$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(x;f)-(1-x^2)^{-1/4}s_n(\arccos x;F)] = 0, \tag{4}$$

причем сходимость равномерная на всяком сегменте $[-1+\alpha,\ 1-\alpha]$, *где* $\alpha>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Удобнее будет доказывать эквивалентное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(\cos\theta;f)-(\sin\theta)^{-1/2}s_n(\theta;F)] = 0 \tag{5}$$

при условии $\theta\in[\alpha,\ \pi-\alpha]$, где $\alpha>0$.

В интеграле (2) положим $t = \cos\tau$. В результате получим

$$S_n(\cos\theta; f) = \\ = \frac{n+1}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\cos\tau)\,\frac{P_{n+1}(\cos\theta)P_n(\cos\tau) - P_n(\cos\theta)P_{n+1}(\cos\tau)}{\cos\theta - \cos\tau}\,\sin\tau\,d\tau. \tag{6}$$

Пусть $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ фиксированы, причем $\delta \leqslant \alpha/2$, а σ удовлетворяет условию $0 < \sigma < \delta$. Тогда имеем неравенство

$$0 < \sigma < \delta < \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha < \pi - \delta < \pi - \sigma < \pi. \tag{7}$$

В формуле (6) сегмент интегрирования $[0, \pi]$ разобьем на пять сегментов:

$$[0, \sigma], \quad [\sigma, \theta - \delta], \quad [\theta - \delta, \theta + \delta], \quad [\theta + \delta, \pi - \sigma], \quad [\pi - \sigma, \pi]. \tag{8}$$

Будем рассматривать интегралы (с множителем $(n+1)/2$) по каждому из этих сегментов. Тогда из (6) находим

$$S_n(\cos\theta; f) = J_n(0, \sigma) + J_n(\sigma, \theta - \delta) + \\ + J_n(\theta - \delta, \theta + \delta) + J_n(\theta + \delta, \pi - \sigma) + J_n(\pi - \sigma, \pi). \tag{9}$$

Докажем, что при фиксированном α первый, второй, четвертый и пятый интегралы в сумме могут быть сколь угодно малыми, если n достаточно велико. Следовательно, в сумме (9) главное значение имеет третий интеграл $J_n(\theta - \delta, \theta + \delta)$.

Прежде всего докажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma > 0$, что равномерно относительно $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$ выполняется неравенство

$$|J_n(0, \sigma) + J_n(\pi - \sigma, \pi)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

В самом деле, учитывая оценку (3.16), а также отграниченность от нуля знаменателя подынтегрального выражения в (6), находим

$$|J_n(0, \sigma)| \leqslant c_1\sqrt{n}\left[\int\limits_0^{\sigma} |f(\cos\tau)|\sin\tau\,|P_n(\cos\tau)|\,d\tau + \right. \\ \left. + \int\limits_0^{\sigma} |f(\cos\tau)|\sin\tau\,|P_{n+1}(\cos\tau)|\,d\tau\right] \leqslant c_2\int\limits_0^{\sigma} |f(\cos\tau)|(\sin\tau)^{1/2}\,d\tau < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это неравенство выполняется при достаточно малом σ в силу сходимости интеграла (1). Аналогично оценивается интеграл $J_n(\pi - \sigma, \pi)$. При этом неравенство (10) выполняется равномерно относительно $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$, ибо $\sigma < \alpha$ и знаменатель в (6) отграничен равномерно от нуля. Таким образом, неравенство (10) доказано.

Рассмотрим теперь сегмент $[\sigma, \theta - \delta]$. На этом сегменте знаменатель подынтегрального выражения в (6) также отграничен от нуля

равномерно в силу того, что δ фиксировано и выполняются условия (7). Далее, на множестве $\Delta = [\sigma, \theta - \delta]$ многочлены Лежандра имеют равномерное асимптотическое представление (4.26). Поэтому произведение

$$\sqrt{n} \int\limits_{\sigma}^{\theta-\delta} \frac{f(\cos\tau)\sin\tau}{\cos\theta - \cos\tau} P_n(\cos\tau)\, d\tau \tag{11}$$

убывает к нулю с возрастанием номера n на основании леммы Римана о коэффициентах Фурье суммируемых функций [III.1, III.2]. Но в силу формулы (6) величина $J_n(\sigma, \theta - \delta)$ выражается линейно через интегралы вида (11). Следовательно, при фиксированных σ и δ интеграл $J_n(\sigma, \theta - \delta)$ убывает к нулю равномерно относительно $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$. Аналогичное утверждение справедливо и для интеграла $J_n(\theta + \delta, \pi - \sigma)$.

Таким образом, существование и величина предела частичной суммы (6) зависит только от поведения интеграла

$$J_n(\theta - \delta, \theta + \delta) = \\ = \frac{n+1}{2} \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} f(\cos\tau) \left[\frac{P_{n+1}(\cos\theta)P_n(\cos\tau) - P_n(\cos\theta)P_{n+1}(\cos\tau)}{\cos\theta - \cos\tau} \right] \sin\tau\, d\tau. \tag{12}$$

Здесь $\delta > 0$ и, кроме того, δ фиксировано произвольно малым. Представим этот интеграл в виде

$$J_n(\theta - \delta,\, \theta + \delta) = \frac{n+1}{2\sqrt{\sin\theta}} \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} f(\cos\tau)\sqrt{\sin\tau}\, \frac{\varphi_n(\theta,\tau)}{\cos\theta - \cos\tau}\, d\tau, \tag{13}$$

где введено обозначение

$$\varphi_n(\theta,\tau) = \sqrt{\sin\theta}\sqrt{\sin\tau}\,[P_{n+1}(\cos\theta)P_n(\cos\tau) - P_n(\cos\theta)P_{n+1}(\cos\tau)].$$

Используя асимптотическую формулу (4.13), последнее равенство представляем в виде

$$\varphi_n(\theta,\tau) = \lambda_n\lambda_{n+1}\Big\{\cos\Big[\Big(n+\frac{3}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big]\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\tau - \frac{\pi}{4}\Big] - \\ - \cos\Big[\Big(n+\frac{3}{2}\Big)\tau - \frac{\pi}{4}\Big]\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big]\Big\} + \\ + \lambda_{n+1}\Big\{\cos\Big[\Big(n+\frac{3}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big]R_n(\tau) - \cos\Big[\Big(n+\frac{3}{2}\Big)\tau - \frac{\pi}{4}\Big]R_n(\theta)\Big\} + \\ + \lambda_n\Big\{\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\tau - \frac{\pi}{4}\Big]R_{n+1}(\theta) - \cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big]R_{n+1}(\tau)\Big\} + \\ + \{R_{n+1}(\theta)R_n(\tau) - R_{n+1}(\tau)R_n(\theta)\}. \tag{14}$$

В результате применения формулы (14) интеграл (13) представляется в виде суммы четырех интегралов

$$J_n(\theta-\delta,\,\theta+\delta) = A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + A_n^{(3)} + A_n^{(4)}. \tag{15}$$

Докажем, что при возрастании n второй, третий и четвертый интегралы стремятся к нулю. Начнем с четвертого. Выражение в последних фигурных скобках (14) приводится к сумме

$$R_n(\tau)[R_{n+1}(\theta) - R_{n+1}(\tau)] + R_{n+1}(\tau)[R_n(\tau) - R_n(\theta)].$$

Поэтому в силу (4.14), (4.15), (4.29) и (4.30) имеем

$$|A_n^{(4)}| \leqslant \frac{c_3}{n\alpha^{5/2}}.$$

Далее, для оценки третьего интеграла в равенстве (15) сначала заметим, что в силу абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma > 0$, что при любом θ выполняется условие

$$\int\limits_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} |F(\tau)|\,d\tau = \int\limits_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} |f(\cos\tau)|\sqrt{\sin\tau}\,d\tau < \varepsilon. \tag{16}$$

А теперь выражение в третьих фигурных скобках в (14) представляем в виде

$$\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\tau - \frac{\pi}{4}\Big]\Big[R_{n+1}(\theta) - R_{n+1}(\tau)\Big] + \\ + R_{n+1}(\tau)\Big\{\cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\tau - \frac{\pi}{4}\Big] - \cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\theta - \frac{\pi}{4}\Big]\Big\}.$$

Поэтому для третьего интеграла в сумме (15) с другими пределами имеем неравенство

$$|A_n^{(3)}(\theta-\sigma,\,\theta+\sigma)| \leqslant \\ \leqslant c_4\sqrt{n}\int\limits_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} |F(\tau)|\Big|\frac{R_{n+1}(\theta) - R_{n+1}(\tau)}{\theta-\tau}\Big|\,d\tau + c_5\sqrt{n}\int\limits_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} |F(\tau)||R_{n+1}(\tau)| \times \\ \times \Big|\frac{\cos[(n+1/2)\tau - \pi/4] - \cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\tau-\theta}\Big|\,d\tau \leqslant c_6\varepsilon.$$

Здесь мы использовали тот факт, что в силу неравенств (4.29) и (4.30) разностное отношение в первом интеграле убывает со скоростью $n^{-1/2}$, а во втором возрастает не быстрее n. Поскольку на остальной части сегмента $[\theta-\delta, \theta+\delta]$ знаменатель отграничен от нуля, то третий интеграл по этой части можно сделать малым за счет увеличения n.

Таким образом, третий интеграл в сумме (15) достаточно мал при возрастании номера n. Аналогичные рассуждения применяются и ко второму интегралу в сумме (15). Заметим, что все интегралы рассматриваются с множителем $(n+1)/2$. А при их оценке используется асимптотическая формула (4.17).

Итак, в сумме (15) главное значение имеет первый интеграл. Простыми преобразованиями разность в первых фигурных скобках приводится к алгебраической сумме

$$\cos[(n+1)(\theta+\tau)]\sin\frac{\theta-\tau}{2} - \cos\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(\theta-\tau)\Big]\sin\frac{\theta-\tau}{2}\sin\frac{\theta+\tau}{2} + \\ + 2\sin\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(\theta-\tau)\Big]\sin^2\frac{\theta-\tau}{4}\sin\frac{\theta+\tau}{2} - \\ - \sin\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(\theta-\tau)\Big]\sin\frac{\theta+\tau}{2}.$$

Следовательно, первый интеграл в сумме (15) можно представить в виде

$$A_n^{(1)}(\theta-\delta,\theta+\delta) = \frac{\lambda_n\lambda_{n+1}(n+1)}{2\sqrt{\sin\theta}}\Bigg[-\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(\tau)\frac{\cos(n+1)(\theta+\tau)}{2\sin\dfrac{\theta+\tau}{2}}\,d\tau - \\ - \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(\tau)\frac{\sin\Big[\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)(\theta-\tau)\Big]\sin^2\dfrac{\theta-\tau}{4}}{\sin\dfrac{\theta-\tau}{2}}\,d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(\tau)\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(\theta-\tau)\,d\tau + \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(\tau)\frac{\sin\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)(\tau-\theta)}{2\sin\dfrac{\tau-\theta}{2}}\,d\tau\Bigg]. \tag{17}$$

Первые три интеграла в квадратных скобках стремятся к нулю при $n\to\infty$ в силу леммы Римана. А четвертый интеграл лишь множителем отличается от главной части сингулярного интеграла Дирихле, который представляет частичную сумму тригонометрического ряда Фурье и имеет вид

$$s_n(\theta;F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\tau)\frac{\sin\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)(\tau-\theta)}{2\sin\dfrac{\tau-\theta}{2}}\,d\tau = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(\tau)\frac{\sin\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)(\tau-\theta)}{2\sin\dfrac{\tau-\theta}{2}}\,d\tau + B_n(\theta,\delta), \tag{18}$$

где величина $B_n(\theta,\delta)$ стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно относительно $\theta\in[\alpha,\pi-\alpha]$ в силу леммы Римана.

С другой стороны, в силу формулы (4.17) имеем

$$\frac{1}{2}\,\lambda_n\lambda_{n+1}(n+1) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left[1-\frac{1}{4n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right]\left[1-\frac{1}{4n+4}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right] = \\ = \frac{1}{\pi}\left[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right].$$

Частичная сумма $s_n(\theta; F)$ при любых условиях может возрастать не быстрее, чем n. Поэтому, учитывая (18), из формулы (17) находим

$$A_n^{(1)}(\theta-\delta,\,\theta+\delta) = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,s_n(\theta; F) + \gamma_n(\theta,\delta),$$

где $\gamma_n(\theta,\delta)$ стремится к нулю равномерно относительно $\theta \in [\alpha,\,\pi-\alpha]$. Аналогичное соотношение справедливо и для всего интеграла (15). Поэтому из формулы (9) получаем равенство

$$S_n(\cos\theta; f) = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,s_n(\theta; F) + \Psi_n(\theta),$$

где величина $\Psi_n(\theta)$ стремится к нулю равномерно относительно $\theta \in [\alpha,\,\pi-\alpha]$.

Таким образом, предельное соотношение (5) установлено. И теорема 4.11, наконец, доказана.

Эта теорема о равносходимости решает вопрос об условиях сходимости ряда Фурье–Лежандра внутри сегмента ортогональности. Из этой теоремы следует, что ряд Фурье–Лежандра функции $f(t)$ в точке $x \in (-1,1)$ сходится тогда и только тогда, когда в соответствующей точке $\theta = \arccos x$ сходится ряд Фурье по косинусам вспомогательной функции $F(\tau) = \sqrt{\sin\tau}\,f(\cos\tau)$. При этом ряд Фурье–Лежандра сходится равномерно на сегменте $[a,b]$, где $-1 < a < b < 1$, если вышеупомянутый ряд Фурье по косинусам сходится равномерно на соответствующем сегменте $[A,B]$, где $A = \arccos b$ и $B = \arccos a$.

Конкретно, если, например, функция $f(t)$ в некоторой точке $x \in (-1,1)$ удовлетворяет условию Липшица, то в этой точке имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x), \qquad x \in (-1,1). \tag{19}$$

Разложение (19) имеет место и в том случае, когда функция $f(t)$ непрерывна в точке x и имеет в окрестности этой точки ограниченную вариацию. А в точке разрыва первого рода при условии ограниченности вариации в ее окрестности имеем равенство

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x). \tag{20}$$

В заключение параграфа заметим, что из теоремы о равносходимости не следует никаких выводов о поведении ряда Фурье–Лежандра на концах сегмента ортогональности.

§ 7. Примеры разложения функций в ряды Фурье–Лежандра

Обычно рассматривают разложения функций в ряды по стандартизованным многочленам Лежандра. Для этих многочленов выполняются равенства

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Поэтому коэффициенты разложения определяются по формуле

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t)\,dt. \tag{1}$$

Прежде всего отметим примеры разложений, которые получаются из производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \tag{2}$$

В этой формуле t можно считать параметром. Введем новый параметр p по формулам

$$p = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \frac{1}{p} - \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1}, \qquad 0 < p < 1. \tag{3}$$

Тогда подкоренное выражение в формуле (2) можно представить в виде

$$1 - 2xt + t^2 = (1 + t^2) - 2xt = (1 + t^2)(1 - px).$$

Следовательно, вместо (2) имеем разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - px}} = \sqrt{1 + t^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{4}$$

Далее, проинтегрируем это разложение почленно по x от -1 до x. В результате получим

$$\int_{-1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - px}} = \sqrt{1 + t^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{x} P_n(x)\,dx. \tag{5}$$

Интеграл от многочлена Лежандра вычисляем с помощью формулы (1.32) и равенств (1.17). Имеем

$$\int_{-1}^{x} P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} \left[\int_{-1}^{x} P'_{n+1}(x)\,dx - \int_{-1}^{x} P'_{n-1}(x)\,dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left[P_{n+1}(x) - P_{n+1}(-1) - P_{n-1}(x) + P_{n-1}(-1) \right] =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \right].$$

Следовательно, из (5) имеем равенство

$$\frac{2}{p}\,[\sqrt{1+p}-\sqrt{1-px}\,] = \\ = \sqrt{1+t^2}\left\{P_1(x)+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}\,[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]\right\}.$$

Отсюда следует разложение

$$\sqrt{1-px}=\sqrt{1+p}+ \\ +\frac{p}{2}\sqrt{1+t^2}\left[\frac{t}{3}\,P_0(x)-1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^{n-1}}{2n-1}-\frac{t^{n+1}}{2n+3}\right)P_n(x)\right]. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что если $x\in(-1,1)$, то это разложение сходится и при $p=t=1$. Следовательно, имеем еще один ряд Фурье по многочленам Лежандра

$$\sqrt{1-x}=\frac{4}{3\sqrt{2}}\,P_0(x)-\frac{4}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}. \quad (7)$$

Из этой формулы можно получить другие разложения. Например, вместо x поставим $-x$. Учитывая равенство $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$, получим

$$\sqrt{1+x}=\frac{4}{3\sqrt{2}}\,P_0(x)-\frac{4}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nP_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}. \quad (8)$$

Далее, дифференцируя разложение (7) почленно и учитывая равенство (1.31), получаем равенство

$$\frac{1-x^2}{2\sqrt{1-x}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nP_{n-1}(x)}{(2n-1)(2n+3)}-\frac{4x}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nP_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}.$$

Аналогичное преобразование можно применить и к разложениям (4) и (8).

Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий поведение ряда Фурье–Лежандра в точке разрыва функции. Пусть число a удовлетворяет условию $-1<a<1$. Для функции

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,a),\\ 1, & x\in(a,1),\end{cases} \quad (9)$$

вычислим коэффициенты Фурье–Лежандра. Используя формулу (1.32), находим

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_a^1 P_n(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_a^1 P'_{n+1}(x)\,dx-\int_a^1 P'_{n-1}(x)\,dx\right]= \\ =\frac{1}{2}\,[P_{n-1}(a)-P_{n+1}(a)], \qquad a_0=\frac{1}{2}\,(1-a).$$

Таким образом, имеем разложение

$$F(x) = \frac{1}{2}(1-a) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(a) - P_{n+1}(a)]\,P_n(x). \tag{10}$$

В точке разрыва $x = a$ частичная сумма ряда (10) имеет вид

$$S_n(a;F) = \frac{1}{2}(1-a) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[P_{k-1}(a) - P_{k+1}(a)]\,P_k(a) = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,P_{n+1}(a)P_n(a).$$

Так как $P_n(a) \to 0$ при $n \to \infty$, то, следовательно, ряд (10) в точке a сходится к среднему арифметическому значений функции (9) в этой точке слева и справа.

Переходим к рассмотрению следующего примера. Для четной функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1), \tag{11}$$

коэффициенты Фурье–Лежандра с нечетными номерами все равны нулю. А для четных в силу формулы (1.42) имеем

$$a_{2n} = \frac{4n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_{2n}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4n+1}{2}\int_{0}^{\pi} P_{2n}(\cos\theta)\,d\theta = \\ = \frac{4n+1}{2}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\pi = \frac{4n+1}{2}\left[\frac{(2n-1)!!}{n!\,2^n}\right]^2\pi.$$

Следовательно, для функции (11) имеем разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!\,2^n}\right]^2 P_{2n}(x). \tag{12}$$

Здесь условно считается $(-1)!! = 1$, ибо нулевой коэффициент есть 1. Интегрируя это разложение почленно и учитывая формулу (1.32), находим равенство

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{n!\,2^n}\right]^2[P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)], \qquad x \in (-1,1).$$

Рассмотрим теперь весьма характерный пример поведения ряда Фурье–Лежандра на концах сегмента ортогональности в зависимости от свойств функции во внутренней точке.

Пусть задана четная функция

$$f(x,p) = \frac{1}{|x|^p}, \qquad 0 < p < 1, \quad x \in [-1,1], \tag{13}$$

зависящая от параметра p. Коэффициенты Фурье–Лежандра с нечетными номерами все равны нулю. А для четных многочленов введем обозначение

$$P_{2n}(x) = b_0 + b_1 t^2 + \ldots + b_n t^{2n}.$$

В результате для четных коэффициентов Фурье–Лежандра в силу формулы (1) имеем

$$a_{2n}(p) = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_{2n}(t) \frac{dt}{|t|^p} = (4n+1) \int_0^1 P_{2n}(t) \frac{dt}{t^p} =$$
$$= (4n+1) \sum_{k=0}^{n} b_k \int_0^1 t^{2k-p}\, dt = (4n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{1+2k-p} =$$
$$= \frac{(4n+1)Q_n(p)}{(1-p)(3-p)\ldots(2n+1-p)}. \qquad (14)$$

Здесь $Q_n(p)$ есть некоторый многочлен от p степени не более n. Формулу (14) можно рассматривать при любом $p < 1$. В частности, если параметру p придавать значения

$$0,\ -2,\ -4,\ \ldots,\ -2n+2, \qquad (15)$$

то в силу ортогональности многочлена $P_{2n}(x)$ коэффициенты (14) при этих значениях (15) равны нулю. Следовательно, многочлен $Q_n(p)$ имеет своими нулями числа (15), т. е. имеет место равенство

$$Q_n(p) = p(p+2)(p+4)\ldots(p+2n-2)A_n. \qquad (16)$$

Для определения коэффициента A_n в формуле (14) положим $p = -2n$. Тогда в силу равенства (1.4), используя ортогональность многочлена $P_{2n}(t)$, находим

$$a_{2n}(-2n) = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_{2n}(t) t^{2n}\, dt =$$
$$= \frac{4n+1}{2} \frac{[(2n)!]^2\, 2^{2n}}{(4n)!} \int_{-1}^{1} P_{2n}(t) \frac{(4n)!\, t^{2n}}{[(2n)!]^2\, 2^{2n}}\, dt =$$
$$= \frac{4n+1}{2} \frac{[(2n)!]^2\, 2^{2n}}{(4n)!} \int_{-1}^{1} P_{2n}^2(t)\, dt = \frac{[(2n)!]^2}{(4n)!}\, 2^{2n}.$$

Этому выражению равна правая часть (14) при $p = -2n$. Следовательно, используя (16), получим равенство

$$(4n+1) \frac{(-2n)(-2n+2)\ldots(-2)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n+1)} A_n = \frac{[(2n)!]^2\, 2^{2n}}{(4n)!}.$$

Из этого равенства находим $A_n = (-1)^n$. Следовательно, четный коэффициент Фурье–Лежандра функции (13) имеет вид

$$a_{2n}(p) = (-1)^n(4n+1)\,\frac{p(p+2)(p+4)\ldots(p+2n-2)}{(1-p)(3-p)\ldots(2n+1-p)} =$$

$$= (-1)^n\Big(\frac{4n+1}{2}\Big)\frac{\frac{p}{2}\Big(\frac{p}{2}+1\Big)\Big(\frac{p}{2}+2\Big)\ldots\Big(\frac{p}{2}+n-1\Big)}{\Big(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\Big)\Big(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\Big)\ldots\Big(\frac{2n+1}{2}-\frac{p}{2}\Big)} =$$

$$= (-1)^n\Big(\frac{4n+1}{2}\Big)\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{p}{2}+n\Big)}{\Gamma\Big(\frac{p}{2}\Big)\Gamma\Big(n+\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\Big)}. \quad (17)$$

Для определения асимптотики правой части (17) докажем простую лемму, которая часто будет применяться и в дальнейшем изложении.

Л е м м а 4.3. *При фиксированном p имеет место формула*

$$\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)} = n^p\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big], \qquad n\to\infty. \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим левую часть (18) через $\Gamma_n(p)$. Применяя формулу Стирлинга (4.22), находим

$$\ln\Gamma_n(p) = \ln\Gamma(n+p) - \ln\Gamma(n) = \ln\sqrt{2\pi} + \Big(n+p-\frac{1}{2}\Big)\ln(n+p) -$$

$$- (n+p) - \ln\sqrt{2\pi} - \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln n + n + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln\frac{n+p}{n} + p\ln(n+p) - p + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{p}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] + p\ln n - p + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= p\ln n + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = \ln n^p + \ln\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Этим формула (18) доказана.

Теперь вернемся к формуле (17). С помощью рекуррентной формулы для гамма-функции Эйлера нетрудно установить монотонность изменения абсолютной величины коэффициента $a_{2n}(p)$. А из формулы (18) следует, что порядок этого коэффициента есть n в степени $p-1/2$. С помощью формулы (18) для общего члена ряда Фурье–Лежандра функции (13) находим представление

$$a_{2n}(p)P_{2n}(\pm1) = a_{2n}(p) = (-1)^n a(p)n^{p-1/2}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Таким образом, если $p<1/2$, то ряд Фурье–Лежандра функции (13) сходится на концах сегмента ортогональности. А при $p\geqslant 1/2$

этот ряд расходится в точках $x = \pm 1$. Сходимость при условии $p < 1/2$ объясняется тем, что функция (13) входит тогда в пространство $L_2[-1, 1]$. Этот пример показывает, что сходимость ряда Фурье–Лежандра на концах сегмента ортогональности зависит также от свойств функции во внутренних точках.

§ 8. Дальнейшие результаты и задачи

В отличие от тригонометрических рядов и от рядов Фурье–Чебышева, которые изучены очень подробно, ряды Фурье по многочленам Лежандра изучены значительно меньше. Это объясняется тем, что многочлены Лежандра не ограничены на концах сегмента ортогональности. В настоящем параграфе рассматриваются некоторые дополнительные вопросы об условиях сходимости или расходимости рядов Фурье–Лежандра, а также некоторые важные тождества для многочленов Лежандра, которые не рассматривались в предыдущих параграфах.

1. Прежде всего обратим внимание на условия теоремы 4.9. В этой теореме доказывается, что если функция $f(x)$ на сегменте удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, то она разлагается в ряд Фурье–Лежандра, сходящийся равномерно на всем сегменте $[-1, 1]$. А если $\alpha = 1/2$ или $\alpha < 1/2$, то вопрос остается нерешенным. Было бы интересно рассмотреть эти два случая. Следует заметить, что в силу теоремы о равносходимости (теорема 4.11) в обоих этих случаях ряд Фурье–Лежандра сходится равномерно на сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Поэтому здесь речь идет в основном о том, сходится или нет ряд Фурье–Лежандра в точках ± 1. Итак, требуется рассмотреть ряд Фурье–Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\pm 1) \tag{1}$$

при условии $f(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$, где $\alpha = 1/2$ или $\alpha < 1/2$. Заметим, что здесь возможны результаты двух типов. Либо ряд (1) сходится для всякой функции $f(x)$ при вышеупомянутых условиях, либо для некоторых сложных функций, удовлетворяющих вышеупомянутым условиям, ряд (1) расходится (построение контрпримеров).

2. Возможно, что для рядов Фурье–Лежандра имеет место некоторый аналог теоремы Абеля для степенных рядов. А именно, если $f(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$, где $\alpha \leqslant 1/2$, причем ряд (1) сходится, то он сходится равномерно на всем сегменте $[-1, 1]$.

3. В монографии Е.В. Гобсона [IV.4] рассматривается несколько примеров сходимости и расходимости рядов Фурье–Лежандра. Приведем эти примеры.

Если функция имеет вид

$$f(x) = \frac{A}{(1-x)^\alpha} + f_0(x), \qquad x \in [-1, 1], \tag{2}$$

где $\alpha \geqslant 3/4$, а функция $f_0(x)$ ограничена на сегменте $[-1, 1]$, то ряд Фурье–Лежандра функции (2) расходится во всех точках интервала $(-1, 1)$. Это утверждение справедливо, если вместо (2) имеем формулу

$$f(x) = \frac{B}{(1+x)^\alpha} + f_0(x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{3}$$

Итак, при условии $\alpha \geqslant 3/4$ ряды Фурье–Лежандра для функций (2) и (3) расходятся во всех точках интервала $(-1, 1)$.

Было бы интересно рассмотреть случай $\alpha < 3/4$.

Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на всем сегменте $[-1, 1]$, то ее ряд Фурье–Лежандра сходится во всех точках этого сегмента.

Было бы интересно доказать равномерную сходимость ряда Фурье–Лежандра на всем сегменте $[-1, 1]$ при условии, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на этом сегменте.

Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на сегментах $[-1, -1+\varepsilon]$ и $[1-\varepsilon, 1]$, но на сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ только интегрируема, то ряд (1) может расходиться.

Пусть функция имеет вид

$$f(x) = \frac{A}{|x - x_0|^p} + \varphi(x), \qquad -1 < x_0 < 1, \tag{4}$$

а функция $\varphi(x)$ имеет ограниченное изменение на $[-1, 1]$. Тогда если $p \geqslant 1/2$, то ряд (1) расходится. А если $p < 1/2$, то ряд (1) сходится. Таких точек x_0 может быть несколько. Случай $x_0 = 0$ рассмотрен в § 7.

4. В теории ортогональных многочленов часто рассматривается так называемая весовая сходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам. В силу весового неравенства (3.4) остаток ряда Фурье–Лежандра надо умножить на вес $(1-x^2)^{1/4}$. В связи с этим можно сформулировать следующие результаты.

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$, то для остатка ряда Фурье–Лежандра имеет место неравенство

$$(1-x^2)^{1/4}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x)\right| \leqslant c_1\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big)\ln n, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{5}$$

А если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1, 1]$, причем $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, то справедлива оценка

$$(1-x^2)^{1/4}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_2 \ln n}{n^{p+\alpha}}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{6}$$

Было бы интересно доказать эти два неравенства. Но еще важнее было бы найти точные или хотя бы конкретные значения постоянных c_1 и c_2 для разных компактных классов функций.

5. Рассмотрим теперь функции второго рода для многочленов Лежандра. Пусть $x \in [-1, 1]$, а $\zeta \in \Gamma_R$, где Γ_R — канонический эллипс. Тогда имеем разложение ядра Коши

$$\frac{1}{\zeta - x} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\zeta) P_n(x), \qquad x \in [-1, 1], \quad \zeta \in \Gamma_R, \tag{7}$$

где для коэффициентов Фурье–Лежандра введено специальное обозначение

$$Q_n(\zeta) = a_n\Big(\frac{1}{\zeta - x}\Big) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{\zeta - x}\, dx. \tag{8}$$

Ряд (7) сходится очень быстро, ибо при фиксированном $\zeta \in \Gamma_R$ функция $1/(\zeta - z)$ аналитическая по z в канонической области G_R. Функции второго рода (8) используются при изучении рядов Фурье–Лежандра для функций, аналитических в канонических областях. В самом деле, пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G_R и, например, непрерывная в замкнутой области $\overline{G}_R$. Тогда в силу формулы (7) имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) P_n(x), \tag{9}$$

где введено обозначение

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(\zeta) Q_n(\zeta)\, d\zeta. \tag{10}$$

Разумеется, в формулах (7) и (9) вместо x можно поставить любое $z \in G_R$. Для рядов (9) при условии $f(z) \in G_R$ можно рассматривать теоремы о максимальной сходимости аналогично тому, как это изложено в предыдущей главе для рядов Фурье–Чебышева. Но в данном случае функции второго рода значительно сложнее функций второго рода для многочленов Чебышева. Поэтому сначала надо изучать асимптотические свойства функций второго рода (8). Впрочем, по этому вопросу имеются некоторые результаты, относящиеся к общим рядам Фурье–Якоби [XI.6].

6. В заключение параграфа приведем некоторые известные формулы для многочленов Лежандра, которые могут быть полезными как в теоретических исследованиях, так и в прикладных задачах. Как обычно, с помощью формулы Родрига, производящей функции и с помощью дифференциального уравнения получаются следующие

формулы:

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x),$$

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x),$$

$$(1-x^2)P_n'(x) = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)] = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)],$$

$$(2n+1)\int\limits_0^x P_n(x)\,dx = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x),$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{\sqrt{8}}{2n+1},$$

$$\int\limits_0^1 x^\lambda P_{2m}(x)\,dx = \frac{(-1)^m(\lambda/2)_m}{2(1/2+\lambda/2)_{(m+1)}}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -1,$$

$$\int\limits_0^1 x^\lambda P_{2m+1}(x)\,dx = \frac{(-1)^m(1/2-\lambda/2)_m}{2(1+\lambda/2)_{(m+1)}}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(z)}{w^{n+1}}, \qquad |w| > \max|z \pm \sqrt{z^2-1}|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(x)P_n(y) = 2\ln 2 - 1 - \ln[(1-x)(1+y)],$$

$$-1 < x \leqslant y < 1.$$

Глава V

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА–ЭРМИТА

§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства

Рассмотрим четную весовую функцию на всей оси

$$h(x) = e^{-x^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{1}$$

Дифференцируя это равенство последовательно, находим

$$\begin{gathered} h'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad h''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}, \\ h'''(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2}, \\ h^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, \qquad \ldots \end{gathered} \tag{2}$$

По индукции нетрудно доказать, что производная порядка n от функции (1) есть произведение этой функции на некоторый алгебраический многочлен степени n. Следовательно, функция

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} \tag{3}$$

есть многочлен степени n. Этот многочлен называется *стандартизованным многочленом Чебышева–Эрмита*. А формула (3) называется *формулой Родрига*.

Из формул (2) и (3) следует, что старший член многочлена $H_n(x)$ образуется при дифференцировании множителя $\exp(-x^2)$. Следовательно, старший коэффициент этого многочлена равен $(-1)^n(-2)^n = 2^n$. Таким образом, имеем

$$H_n(x) = 2^n x^n + \ldots \tag{4}$$

С помощью формулы Родрига (3) можно вычислить любой многочлен $H_n(x)$. Первые семь стандартизованных многочленов Чебышева–Эрмита имеют вид

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x, \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120. \end{aligned}$$

Докажем, что многочлены (3) ортогональны с весовой функцией (1) на интервале $(-\infty, \infty)$. Для этого рассмотрим интеграл

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx. \tag{5}$$

Применяя формулу Родрига (3) и интегрируя по частям, находим

$$A_{mn} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)(e^{-x^2})^{(n)}\, dx =$$
$$= (-1)^n [H_m(x)(e^{-x^2})^{(n-1)}]\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)(e^{-x^2})^{(n-1)}\, dx.$$

Внеинтегральные члены равны нулю ввиду наличия в них экспоненциального множителя аналогично формулам (2). Следовательно, применяя эту операцию $n-1$ раз, находим последовательно

$$A_{mn} = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} H''_m(x)(e^{-x^2})^{(n-2)}\, dx = \ldots$$
$$\ldots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x) e^{-x^2}\, dx. \tag{6}$$

Если $m < n$, то $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$. Следовательно, из (6), учитывая обозначение (5), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0, \qquad m < n.$$

Этим ортогональность многочленов $\{H_n(x)\}$ доказана.

Вычислим теперь норму многочлена (3). В силу (4) имеем

$$A_{nn} = n!\, 2^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = n!\, 2^n \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, *ортонормированный многочлен Чебышева–Эрмита* имеет вид

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}}\, e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}. \tag{7}$$

Для старшего коэффициента этого многочлена в силу (4) имеем

$$\mu_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} = \sqrt{\frac{2^n}{n!\, \sqrt{\pi}}}. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу равенства (4) многочлен Чебышева–Эрмита с единичным старшим коэффициентом определяется формулой

$$\widetilde{H}_n(x) = \frac{1}{2^n} H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}. \qquad (9)$$

Далее, докажем, что функция

$$F(x,t) = e^{2xt-t^2} \qquad (10)$$

является производящей функцией для многочленов Чебышева–Эрмита. При фиксированном x эта функция аналитическая по t. Рассмотрим ее разложение в виде

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[F_t^{(n)}(x,t)\big|_{t=0}\right] t^n. \qquad (11)$$

Дифференцируя равенство (10) по t, при фиксированном x находим

$$F_t^{(n)}(x,t) = \left[e^{2xt-t^2}\right]_t^{(n)} = e^{x^2} \left[e^{-x^2+2xt-t^2}\right]_t^{(n)} =$$
$$= e^{x^2} \left[e^{-(x-t)^2}\right]_t^{(n)} = e^{x^2} \left[e^{-u^2}\right]_u^{(n)} (-1)^n. \qquad (12)$$

Здесь мы заменили переменное дифференцирования по формуле $x - t = u$ и воспользовались равенством $\dfrac{d^n}{dt^n} = (-1)^n \dfrac{d^n}{du^n}$. Полагая теперь $t = 0$, из (12) получаем

$$F_t^{(n)}(x,t)\big|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)_x^{(n)} = H_n(x).$$

Следовательно, разложение (11) для функции (10) имеет вид

$$F(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \qquad (13)$$

Таким образом, функция (10) является *производящей функцией для стандартизованных многочленов Чебышева–Эрмита.* Разумеется, в разложении (13) с помощью равенств (7) и (9) можно перейти к ортонормированным многочленам Чебышева–Эрмита, а также к многочленам Чебышева–Эрмита с единичным старшим коэффициентом.

В силу аналитичности левой части (13) переменные x и t могут принимать и комплексные значения. Подставляя вместо них комплексные переменные z и w, получим

$$e^{2zw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} w^n. \qquad (14)$$

Далее, если временно считать z и w действительными и вместо w поставить iw, то, разделяя с помощью формулы Эйлера действительные и мнимые части с обоих сторон равенства (14), найдем два других

разложения:

$$e^{w^2}\cos(2zw) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m H_{2m}(z)\frac{w^{2m}}{(2m)!}, \tag{15}$$

$$e^{w^2}\sin(2zw) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m H_{2m+1}(z)\frac{w^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{16}$$

В силу аналитичности левых частей оба разложения (15) и (16) справедливы при любых комплексных значениях z и w.

С помощью разложения (13) нетрудно получить рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева–Эрмита. В самом деле, функция (10) удовлетворяет условию

$$F_t'(x,t) - (2x-2t)F(x,t) \equiv 0.$$

Это условие в силу (13) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,nt^{n-1} - (2x-2t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n \equiv 0.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,nt^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\,t^{n+1} \equiv 0.$$

Поскольку это тождество, то сумма всех коэффициентов при t в степени n равна нулю. В результате получаем

$$\frac{(n+1)H_{n+1}(x)}{(n+1)!} - 2x\,\frac{H_n(x)}{n!} + 2\,\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0,$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \tag{17}$$

Таково рекуррентное соотношение для стандартизованных многочленов Чебышева–Эрмита.

Далее, в силу равенств (I.2.5) и (8) находим коэффициент в формуле Кристоффеля–Дарбу

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \sqrt{\frac{2^n}{n!\,\sqrt{\pi}}}\sqrt{\frac{(n+1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Следовательно, формула Кристоффеля–Дарбу для ортонормированных многочленов Чебышева–Эрмита имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n}\widehat{H}_k(x)\widehat{H}_k(t) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\;\frac{\widehat{H}_{n+1}(x)\widehat{H}_n(t) - \widehat{H}_n(x)\widehat{H}_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{18}$$

С помощью равенства (7) получаем аналогичную формулу для стандратизованных многочленов:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,2^k}\,H_k(x)H_k(t) = \frac{1}{n!\,2^{n+1}}\;\frac{H_{n+1}(x)H_n(t) - H_n(x)H_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{19}$$

Переходим к выводу дифференциального уравнения для многочленов Чебышева–Эрмита.

Дифференцируя функцию $u = \exp(-x^2)$ по x, находим

$$u' = -2xu.$$

Обе части этого равенства дифференцируем еще $n+1$ раз. В силу формулы Лейбница имеем равенство

$$u^{(n+2)} = -2xu^{(n+1)} - 2(n+1)u^{(n)}.$$

Представляем это равенство в виде уравнения

$$u^{(n+2)} + 2xu^{(n+1)} + 2(n+1)u^{(n)} = 0. \tag{20}$$

С другой стороны, из равенства (3) следует формула

$$u^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x).$$

Учитывая эту формулу, из (20) находим

$$[e^{-x^2} H_n(x)]'' + 2x\,[e^{-x^2} H_n(x)]' + 2\,(n+1)[e^{-x^2} H_n(x)] = 0.$$

Выполняя операции дифференцирования, получаем

$$e^{-x^2}[-2H_n(x) + 4x^2 H_n(x) - 4xH_n'(x) + H_n''(x)] + \\ + 2xe^{-x^2}[-2xH_n(x) + H_n'(x)] + 2(n+1)e^{-x^2} H_n(x) = 0.$$

Опуская экспоненциальный множитель и приводя подобные члены, приходим к дифференциальному соотношению

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \tag{21}$$

Все предыдущие равенства выполнялись тождественно. Следовательно, стандартизованный многочлен Чебышева–Эрмита $H_n(x)$ порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \tag{22}$$

Разумеется, этому же дифференциальному уравнению удовлетворяют и многочлены $\widehat{H}_n(x)$ и $\widetilde{H}_n(x)$, ибо от многочлена $H_n(x)$ они отличаются лишь постоянными множителями.

Таким образом, многочлены Чебышева–Эрмита порядка n удовлетворяют дифференциальному уравнению (22), в котором есть параметр n.

Продолжаем рассматривать основные свойства многочленов Чебышева–Эрмита. Докажем, что для стандартизованных многочленов имеет место формула

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\, n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}, \tag{23}$$

где, как обычно, через $[a]$ обозначена целая часть числа a. Но сначала докажем вспомогательное равенство

$$(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k}\, n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}. \tag{24}$$

При $n = 0, 1, 2$ это равенство проверяется непосредственными вычислениями. Далее применяем метод индукции. Допустим, что это равенство верно при некотором n. Продифференцируем его почленно. В результате получаем

$$(e^{-x^2})^{(n+1)} = e^{-x^2} \Bigg[\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n+1-k}\, n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n+1-2k} + \\ + \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!\,(n-2k)!}\,(n-2k)(2x)^{n-2k-1}\, 2 \Bigg]. \tag{25}$$

Коэффициент при $2x$ в степени $n+1-2k$, где $0 < k < [n/2]$, равен

$$\frac{(-1)^{n+1-k}\, n!}{k!\,(n-2k)!} + \frac{(-1)^{n-k+1}\, n!\,2}{(k-1)!\,(n-2k+1)!} = \\ = \frac{(-1)^{n+1-k}\, n!}{(k-1)!\,(n-2k)!}\left(\frac{2}{n-2k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(-1)^{n+1-k}\,(n+1)!}{k!\,(n+1-2k)!}. \tag{26}$$

Вывод формулы (26) непригоден в случае $k = 0$, ибо вторая сумма в равенстве (25) не содержит $2x$ в степени $n+1$, но сама формула (26) справедлива и для старшего коэффициента, так как в силу (24) этот коэффициент равен $(-1)^{n+1-k}$. Рассмотрим теперь коэффициент при самой младшей степени $2x$. Если n четное, т. е. $n = 2m$, то формула (26) справедлива, и доказательство то же самое. А если $n = 2m+1$, то нулевая степень величины $2x$ содержится только во второй сумме, и коэффициент ее (фактически свободный член) равен

$$\frac{(-1)^{n-m} n!\,(n-2m)2}{m!\,(n-2m)!} = \frac{(-1)^{n-m}\,(n+1)!\,2}{m!\,(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1-m-1}\,(n+1)!}{(m+1)!}.$$

При условии $n = 2m+1$ число $n+1 = 2m+2$ является четным. И в формуле (24) последнее слагаемое имеет номер $m+1$. Таким образом, формула (26) справедлива и в этом случае. Этим формула (24) доказана.

С помощью формулы Родрига (3) из равенства (24) можно получить формулу (23).

Формулу (23) удобно рассматривать отдельно для четных и нечетных номеров n. Поскольку символ $[n/2]$ означает целую часть числа $n/2$, то из формулы (23) находим формулы

$$H_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\,(2m)!}{k!\,(2m-2k)!}\,(2x)^{2m-2k}, \tag{27}$$

$$H_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m+1)!}{k!\,(2m+1-2k)!} (2x)^{2m+1-2k}. \tag{28}$$

С помощью этих формул нетрудно вычислить значения стандартизованных многочленов Чебышева–Эрмита и их производных в отдельных точках. Например, имеем равенства

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} = (-1)^m 2^m (2m-1)!!, \tag{29}$$

$$H_{2m+1}(0) = 0, \tag{30}$$

$$H'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2, \qquad H'_{2m}(0) = 0. \tag{31}$$

§ 2. Интегральные соотношения

В настоящем параграфе рассматриваются различные интегральные представления для многочленов Чебышева–Эрмита, а также интегральные уравнения, которым эти многочлены удовлетворяют.

Прежде всего отметим один простой результат. Из разложения производящей функции (1.14), используя формулу для коэффициентов Тейлора, имеем равенство

$$H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{2zw-w^2} \frac{dw}{w^{n+1}}. \tag{1}$$

Здесь Γ — произвольный контур, охватывающий начало координат. Из равенства (1) следует формула

$$e^{-z^2} H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-(z-w)^2} \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Для получения других, более важных интегральных представлений воспользуемся известной формулой [IV.5, IV.6]

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt. \tag{2}$$

Этот интеграл можно дифференцировать по параметру x сколь угодно раз, ибо и после дифференцирования он сходится равномерно относительно x. Дифференцируя $2m$ раз, с помощью формулы Родрига (1.3) получим

$$H_{2m}(x) = \frac{(-1)^m 2^{2m+1} e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2m} \cos(2xt)\, dt. \tag{3}$$

Аналогично дифференцирование формулы (2) $2m+1$ раз приводит к равенству

$$H_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^m\, 2^{2m+2}\, e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2m+1} \sin(2xt)\, dt. \tag{4}$$

Обе эти формулы объединяются в одну:

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{n+1} e^{x^2} \int_0^\infty e^{-t^2} t^n \cos\Bigl(2xt - \frac{n\pi}{2}\Bigr)\, dt. \tag{5}$$

Далее, подынтегральные функции в интегралах (3) и (4) обе четны. Поэтому эти формулы можно объединить в равенства:

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, (-2i)^n\, e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2xti} t^n\, dt. \tag{6}$$

В самом деле, раскрывая множитель $\exp(2xti)$ по формуле Эйлера, мы представим интеграл (6) в виде суммы двух интегралов, один из которых в силу нечетности подынтегральной функции равен нулю, а второй совпадает с одним из интегралов (3) или (4) в зависимости от четности или нечетности номера n.

Еще одно интегральное представление

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+it)^n e^{-t^2}\, dt \tag{7}$$

легко проверяется с помощью формулы (1.23). В самом деле, учитывая равенство нулю интегралов от нечетных функций, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2x+2it)^n\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x)^{n-k}\, (2i)^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k\, C_n^{2k} (2x)^{n-2k}\, 2^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-t^2}\, dt.$$

В силу известного равенства [VII.4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-t^2}\, dt = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{k!\, 2^{2k}} \sqrt{\pi}$$

все интегралы вычисляются. Далее имеем

$$C_n^{2k} \frac{(2k)!}{k!} = \frac{n!\, (2k)!}{(2k)!\, (n-2k)!\, k!} = \frac{n!}{k!\, (n-2k)!}.$$

Таким образом, последняя сумма действительно совпадает с правой частью формулы (1.23).

Из формулы (7) можно получить ряд следствий. В частности, дифференцируя по x и снова применяя ту же формулу при $n-1$, получим равенство

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{8}$$

Аналогичным образом, интегрируя равенство (7) по x в пределах от 0 до x, найдем формулу

$$\int_0^x H_n(t)\,dt = \frac{H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0)}{2(n+1)}. \tag{9}$$

Далее, подставляем в рекуррентную формулу (1.17) вместо последнего слагаемого его значение из формулы (8). В результате получаем равенство

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x), \tag{10}$$

из которого следует формула

$$e^{-x^2} H_{n+1}(x) = -[e^{-x^2} H_n(x)]'. \tag{11}$$

С помощью формулы (6) нетрудно вывести еще одну производящую функцию для многочленов Чебышева–Эрмита. Для этого сначала заменим в интеграле (6) t на u и умножим это равенство на аналогичное ему с заменой x на u и y на v. В результате имеем

$$H_n(x)H_n(y) = \frac{(-1)^n}{\pi}\, 2^{2n}\, e^{x^2+y^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui-v^2+2yvi}\,(uv)^n\,du\,dv.$$

Умножая это равенство на $\dfrac{1}{n!\,2^n}\,w^n$ и суммируя, найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!\,2^n}\,w^n =$$

$$= \frac{1}{\pi}\, e^{x^2+y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,(2w)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui-v^2+2yvi}\,(uv)^n\,du\,dv. \tag{12}$$

Для обоснования изменения порядка суммирования и интегрирования в правой части (12) приведем подробные формулировки известных результатов о почленном интегрировании функциональных рядов в случае несобственных интегралов [VIII.4, VIII.8].

Пусть ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad x \geqslant a, \tag{13}$$

состоит из неотрицательных функций и при всяком $b > a$ возможно почленное интегрирование, т. е. имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx. \tag{14}$$

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^{\infty} u_n(x)\,dx, \tag{15}$$

если функция $f(x)$ интегрируема на интервале (a,∞) либо если ряд справа в (15) сходится. Равенство (15) имеет место при любых действительных или комплексных функциях $\{u_n(x)\}$, если сходится одно из выражений

$$\int\limits_a^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|\right] dx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^{\infty} |u_n(x)|\,dx. \tag{16}$$

В частности, если функции $\{u_n(x)\}$ абсолютно интегрируемы в несобственном смысле на конечном интервале (a,b), то равенство (14) справедливо при условии, что интегралы (16) распространены по этому интервалу (a,b), причем сходится либо ряд, либо интеграл.

Разумеется, во всех формулах можно вводить некоторый функциональный множитель $\varphi(x)$ и вместо функций $f(x)$ и $\{u_n(x)\}$ рассматривать произведения $f(x)\varphi(x)$ и $\{u_n(x)\varphi(x)\}$.

С помощью этих результатов имеем равенство

$$\int\limits_0^{\infty} \exp(-u^2 + 2xui - v^2 + 2yvi - 2wuv)\,du =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \exp(-u^2 + 2xui - v^2 + 2yvi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,(2wuv)^n\right] du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,(2wv)^n \int\limits_0^{\infty} \exp(-u^2 + 2xui - v^2 + 2yvi)\,u^n\,du.$$

Это равенство справедливо, потому что в данном конкретном случае сходимость и интеграла, и ряда (16) очевидны.

Аналогичное равенство имеет место, если интервал $(0,\infty)$ заменить интервалом $(-\infty,0)$. Сложим эти два равенства почленно, а затем проинтегрируем по v отдельно по интервалам $(0,\infty)$ и $(-\infty,0)$.

Снова применяя формулу вида (15), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2 + 2xui - v^2 + 2yvi - 2wuv)\,du\,dv =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,(2w)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (uv)^n \exp(-u^2 + 2xui - v^2 + 2yvi)\,du\,dv.$$

Следовательно, вместо равенства (12) имеем формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,2^n}\,H_n(x)H_n(y)w^n =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,e^{x^2+y^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2 + 2xui - v^2 + 2yvi - 2wuv)\,du\,dv.$$

Для вычисления интеграла в правой части дважды применяем известное равенство [VII.4]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2s^2 - 2bs)\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\Bigl(\frac{b^2}{a^2}\Bigr), \qquad \operatorname{Re} a^2 > 0. \tag{17}$$

В результате получаем разложение

$$(1 - w^2)^{-1/2} \exp\Bigl[\frac{2xyw - (x^2 + y^2)w^2}{1 - w^2}\Bigr] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,2^n}\,H_n(x)H_n(y)w^n, \qquad |w| < 1. \tag{18}$$

Полагая здесь $x = y$, находим формулу

$$(1 - w^2)^{-1/2} \exp\Bigl(\frac{2x^2w}{1 + w}\Bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{n!\,2^n}\,w^n, \qquad |w| < 1. \tag{19}$$

Переходим теперь к выводу очень важных интегральных соотношений для многочленов Чебышева–Эрмита.

В разложении (1.14) вместо z подставим t и умножим это равенство почленно на некоторый экспоненциальный множитель

$$\exp\Bigl(-w^2 + 2wt - \frac{t^2}{2} + xti\Bigr) = \exp\Bigl(-\frac{t^2}{2} + ixt\Bigr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!}\,w^n. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться в том, что ряд (20) можно интегрировать по t почленно по интервалу $(-\infty, \infty)$. В самом деле, из формулы (1.23) имеем

$$H_n(i|t|) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n - 2k)!}\,(2i|t|)^{n-2k} = i^n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\,(2|t|)^{n-2k}}{k!\,(n - 2k)!}.$$

Следовательно, при любом n выполняется неравенство

$$|H_n(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\,(2|t|)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} = \frac{1}{i^n} H_n(i|t|).$$

А теперь, снова используя (1.14), мажорируем ряд (20). В результате имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,|H_n(t)|\,|w|^n \exp\Bigl(-\frac{t^2}{2}\Bigr) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,|H_n(i|t|)|\Bigl(\frac{|w|}{i}\Bigr)^n \exp\Bigl(-\frac{t^2}{2}\Bigr) = \\ = \exp\Bigl(-\frac{t^2}{2} + 2\,|t|\,|w| + |w|^2\Bigr).$$

Таким образом, в данном случае интеграл (16) сходится. Следовательно, ряд (20) можно интегрировать почленно, т. е. имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-w^2 + 2wt - \frac{t^2}{2} + ixt\Bigr)\,dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(ixt - \frac{t^2}{2}\Bigr) H_n(t)\,dt. \quad (21)$$

Вычисляя интеграл слева с помощью формулы (17), находим

$$e^{-w^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{t^2}{2} + 2\Bigl(w + \frac{ix}{2}\Bigr)t\Bigr]\,dt = e^{-w^2}\sqrt{2\pi}\exp\Bigl[2\Bigl(w + \frac{ix}{2}\Bigr)^2\Bigr] = \\ = \sqrt{2\pi}\exp\Bigl(w^2 + 2wix - \frac{x^2}{2}\Bigr) = \sqrt{2\pi}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{2}\Bigr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\,(iw)^n.$$

Подставляем полученное разложение в левую часть равенства (21) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях w. В результате получаем

$$\sqrt{2\pi}\,(i)^n\,[e^{-x^2/2} H_n(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,[e^{-t^2/2} H_n(t)]\,dt. \quad (22)$$

А теперь множитель $\exp(ixt)$ разлагаем по формуле Эйлера и учитываем тот факт, что многочлен $H_{2m}(x)$ — четная функция, а $H_{2m+1}(x)$ — нечетная функция. Разделяя действительные и мнимые части в равенстве (22), находим

$$e^{-x^2/2} H_{2m}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} H_{2m}(t) \cos xt\,dt, \quad (23)$$

$$e^{-x^2/2}H_{2m+1}(x) = (-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2/2}H_{2m+1}(t)\sin xt\,dt. \tag{24}$$

Равенства (22)–(24), справедливые при всех n, свидетельствуют об инвариантности многочленов Чебышева–Эрмита с некоторым экспоненциальным множителем относительно преобразования Фурье.

§ 3. Метод Лиувилля–Стеклова в применении к многочленам Чебышева–Эрмита

Рассмотрим теперь асимптотические свойства многочленов Чебышева–Эрмита. В качестве метода исследования здесь снова используется метод Лиувилля–Стеклова, изложенный применительно к многочленам Лежандра в § 4 гл. IV.

Прежде всего докажем, что так называемые функции Чебышева–Эрмита

$$v_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$v'' + (2n + 1 - x^2)v = 0. \tag{2}$$

В самом деле, производные функции (1) имеют вид

$$v_n'(x) = -xe^{-x^2/2}H_n(x) + e^{-x^2/2}H_n'(x),$$

$$v_n''(x) = -e^{-x^2/2}H_n(x) + (-x)^2e^{-x^2/2}H_n(x) - xe^{-x^2/2}H_n'(x) - \\ - xe^{-x^2/2}H_n'(x) + e^{-x^2/2}H_n''(x).$$

Подставляем вторую производную в левую часть уравнения (2). В результате получаем

$$v_n''(x) + (2n + 1 - x^2)v_n(x) = \\ = e^{-x^2/2}[H_n''(x) - 2xH_n'(x) + x^2H_n(x) - H_n(x) + (2n + 1 - x^2)H_n(x)] = \\ = e^{-x^2/2}[H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x)] \equiv 0$$

в силу тождества (1.21). Таким образом, для функций Чебышева–Эрмита (1) имеем

$$v_n''(x) + (2n + 1 - x^2)v_n(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Теорема 5.1. *Многочлен Чебышева–Эрмита $H_n(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода*

$$e^{-x^2/2}H_n(x) = \lambda_n \cos\Big(\sqrt{2n+1}\,x - \frac{n\pi}{2}\Big) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\int_0^x \sin\,[\sqrt{2n+1}(x-t)]\,t^2e^{-t^2/2}H_n(t)\,dt, \quad (4)$$

где

$$\lambda_{2m} = \frac{(2m)!}{m!} = 2^m(2m-1)!!, \qquad \lambda_{2m+1} = \frac{2(2m+1)!}{m!\,\sqrt{4m+3}}. \quad (5)$$

Доказательство. Уравнение (3) представим в виде

$$v_n''(x) + (2n+1)v_n(x) = x^2v_n(x). \quad (6)$$

Условно будем рассматривать это уравнение как линейное неоднородное уравнение с правой частью $x^2v_n(x)$. Тогда соответствующее однородное уравнение

$$v''(x) + (2n+1)v(x) = 0$$

имеет два линейно независимых решения:

$$v_1(x) = \cos\sqrt{2n+1}x, \qquad v_2(x) = \sin\sqrt{2n+1}x. \quad (7)$$

Для того чтобы применить формулу общего решения (IV.4.3), надо вычислить разности, стоящие в числителе и знаменателе под знаком интеграла в формуле (IV.4.3). В силу (7), вводя для краткости обозначение $N = \sqrt{2n+1}$, находим

$$v_1(x)v_2(t) - v_2(x)v_1(t) = \cos Nx\sin Nt - \sin Nx\cos Nt = \sin N(t-x),$$

$$v_1'(t)v_2(t) - v_2'(t)v_1(t) = \\ = -N\sin Nt\sin Nt - N\cos Nt\cos Nt = -N = -\sqrt{2n+1}.$$

Следовательно, в данном конкретном случае вместо (IV.4.3) имеем общее решение условно неоднородного уравнения (6) в виде

$$e^{-x^2/2}H_n(x) = c_1\cos Nx + c_2\sin Nx + \\ + \frac{1}{N}\int_0^x \sin N(x-t)\,t^2e^{-t^2/2}H_n(t)\,dt. \quad (8)$$

Определим постоянные c_1 и c_2. Полагая $x = 0$, из (8) находим $H_n(0) = c_1$. Далее дифференцируем (8) по x. Имеем

$$-xe^{-x^2/2}H_n(x) + e^{-x^2/2}H_n'(x) = \\ = -c_1N\sin Nx + c_2N\cos Nx + \int_0^x \cos N(x-t)\,t^2e^{-t^2/2}H_n(t)\,dt.$$

Полагая здесь $x = 0$, находим $H_n'(0) = c_2 N$. Подставляя найденные значения постоянных c_1 и c_2 в формулу (8), имеем

$$e^{-x^2/2}H_n(x) = H_n(0)\cos Nx + \frac{1}{N}H_n'(0)\sin Nx + \\ + \frac{1}{N}\int_0^x \sin N(x-t)t^2 e^{-t^2/2}H_n(t)\,dt, \qquad N = \sqrt{2n+1}. \quad (9)$$

Далее используем формулы (1.29)–(1.31)

$$\begin{gathered} H_{2m}(0) = (-1)^m\frac{(2m)!}{m!}, \qquad H_{2m+1}(0) = 0, \\ H_{2m}'(0) = 0, \qquad H_{2m+1}'(0) = (-1)^m\,\frac{(2m+1)!}{m!}\,2. \end{gathered} \quad (10)$$

Из этих формул следует, что из двух внеинтегральных слагаемых в правой части (9) фактически есть только одно. Следовательно, эти два слагаемых можно представить в виде

$$\lambda_n\cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) = \lambda_n\cos Nx\cos\frac{n\pi}{2} + \lambda_n\sin Nx\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Остается определить коэффициент λ_n отдельно для четных и нечетных n. Если n четно, т. е. $n = 2m$, то в силу (9) и (10) имеем

$$H_{2m}(0)\cos Nx = (-1)^m\,\frac{(2m)!}{m!}\cos Nx = \lambda_n\cos Nx\cos\frac{n\pi}{2} = \\ = \lambda_{2m}(-1)^m\cos Nx.$$

Аналогично, при условии $n = 2m+1$ в силу (10) находим

$$\frac{1}{N}H_{2m+1}'(0)\sin Nx = \frac{(-1)^m}{\sqrt{4m+3}}\,\frac{(2m+1)!}{m!}\,2\sin Nx = \lambda_{2m+1}(-1)^m\sin Nx.$$

Из последних двух равенств следуют формулы (5).

Таким образом, формула (4) при условиях (5) доказана.

Для изучения асимптотических свойств многочленов Чебышева–Эрмита с помощью формулы (4) необходимо рассмотреть поведение последовательности $\{\lambda_n\}$, которая определяется формулами (5).

Лемма 5.1. *Для коэффициента λ_n в равенстве* (4) *имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_n = 2^{(n+1)/2}n^{n/2}e^{-n/2}\Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big], \qquad n \to \infty. \quad (11)$$

Доказательство. Применяем формулу Стирлинга (IV.4.22) с остаточным членом в виде

$$\ln\Gamma(a) = \ln\sqrt{2\pi} + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\ln a - a + \frac{\theta B_1}{2a}. \quad (12)$$

В случае четного номера по определению (5) имеем

$$\lambda_{2m} = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Логарифмируя это равенство и применяя формулу (12), находим

$$\ln\lambda_{2m} = \ln\Gamma(n+1) - \ln\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big) =$$
$$= \ln\sqrt{2\pi} + \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln(n+1) - (n+1) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) -$$
$$- \ln\sqrt{2\pi} - \Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(\frac{n}{2}+1\Big) + \Big(\frac{n}{2}+1\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= n\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\ln\Big(\frac{n}{2}+1\Big) -$$
$$- \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{n}{2}+1\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = n\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n+1) -$$
$$- \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\ln(n+2) + \frac{n}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(n+2) + \frac{1}{2}\ln 2 + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\Big(2^{n+1}e^{-n}n^n\Big) + \frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + \frac{n}{2}\ln\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = \ln(2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}) +$$
$$+ \frac{n}{2}\Big[\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] + \frac{n}{2}\Big[-\frac{1}{n+2} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \ln(2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}) + O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Аналогично, для нечетных номеров в силу формулы (5) имеем

$$\lambda_{2m+1} = \frac{2\Gamma(2m+2)}{\Gamma(m+1)\sqrt{4m+3}} = \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/2+1/2)\sqrt{2n+1}}.$$

Применяя формулу Стирлинга (12), находим

$$\ln\lambda_{2m+1} = \ln 2 + \ln\Gamma(n+1) - \ln\Gamma\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}\ln(2n+1) =$$
$$= \ln 2 + \ln\sqrt{2\pi} + \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln(n+1) - (n+1) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) - \ln\sqrt{2\pi} -$$
$$- \frac{n}{2}\ln\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\Big(n+\frac{1}{2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + n\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{n+1}{2} -$$
$$- \frac{n}{2}\ln(n+1) + \frac{n}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \ln(2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}) + \frac{n}{2}\ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n+1/2} - \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \ln(2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}) + \frac{n}{2}\Big[\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] - \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \ln(2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}) + O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Таким образом, в обоих случаях справедливо равенство

$$\ln\lambda_n = \ln(2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}) + A_n, \qquad A_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Потенцируя это равенство, находим

$$\lambda_n = 2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}e^{A_n} = 2^{(n+1)/2}e^{-n/2}n^{n/2}\Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Этим лемма 5.1 доказана.

А теперь рассмотрим асимптотику многочленов Чебышева–Эрмита.

Т е о р е м а 5.2. *Для стандартизованных многочленов Чебышева–Эрмита имеет место асимптотическая формула*

$$H_n(x) = \lambda_n e^{x^2/2}\Big[\cos\Big(\sqrt{2n+1}\,x - \frac{n\pi}{2}\Big) + R_n(x)\Big], \tag{13}$$

где остаточный член допускает оценку

$$|R_n(x)| \leqslant c_3 n^{-1/4}|x|^{5/2}, \qquad x \in (-\infty, \infty), \tag{14}$$

а постоянная c_3 не зависит от n и x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (4) следует, что для остаточного члена справедливо равенство

$$R_n(x) = \frac{1}{\lambda_n N}\int\limits_0^x \sin[N(x-t)]\, t^2\, e^{-t^2/2} H_n(t)\, dt, \qquad N = \sqrt{2n+1}. \tag{15}$$

При положительном x этот интеграл оценивается с помощью неравенства Буняковского–Шварца. Используя формулу (1.7), находим

$$\Big|\int\limits_0^x t^2 e^{-t^2/2} H_n(t)\, dt\Big|^2 \leqslant \int\limits_0^x t^4\, dt \int\limits_0^x e^{-t^2}|H_n(t)|^2\, dt =$$

$$= \frac{x^5}{10}\int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2}|H_n(t)|^2\, dt \leqslant \frac{x^5}{10}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}|H_n(t)|^2\, dt =$$

$$= \frac{x^5}{10}\, n!\,\sqrt{\pi}\, 2^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}|\widehat{H}_n(t)|^2\, dt = \frac{x^5}{10}\, n!\,\sqrt{\pi}\, 2^n.$$

Далее, учитывая формулу Стирлинга для факториала

$$n! = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\sqrt{2\pi n}\,\Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big], \qquad n \to \infty, \tag{16}$$

и равенство (11), из формулы (15) для любых x находим оценку

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda_n\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{|x|^5}{10}}\sqrt{n!\,\sqrt{\pi}\, 2^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_4\,|x|^{5/2}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{n/2} n^{1/4}\, 2^{n/2}}{2^{(n+1)/2}\, n^{n/2}\, e^{-n/2}\sqrt{2n+1}} \leqslant c_5\,|x|^{5/2}\, n^{-1/4}.$$

При отрицательных x все рассуждения сохраняются. Таким образом, теорема 5.2 доказана.

Из формул (11), (13) и (14) получается асимптотическое представление

$$H_n(x) =$$
$$= 2^{(n+1)/2} n^{n/2} e^{-n/2} e^{x^2/2} \Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \Big[\cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) + R_n(x)\Big] =$$
$$= \sqrt{2}\Big(\frac{2n}{e}\Big)^{n/2} e^{x^2/2} \Big[\cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O(n^{-1/4}|x|^{5/2})\Big]. \quad (17)$$

Аналогичную формулу можно получить и для ортонормированных многочленов Чебышева–Эрмита. Для этого надо определить асимптотику коэффициента в равенстве (1.7). Представляя формулу Стирлинга (16) в виде

$$n! = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + \alpha_n), \qquad \alpha_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n \to \infty,$$

имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} = \Big(\frac{e}{n}\Big)^{n/2} \frac{1}{(2\pi n)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_n}} = \Big(\frac{e}{n}\Big)^{n/2} (2\pi n)^{-1/4} \Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Следовательно, из формулы (1.7), учитывая (17), находим

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\,\sqrt{\pi}\,2^n}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{x^2/2}}{(2n)^{1/4}} \Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \Big[\cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O(n^{-1/4}|x|^{5/2})\Big].$$

Таким образом, имеем асимптотическую формулу

$$\widehat{H}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{x^2/2}}{(2n)^{1/4}} \Big[\cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O(n^{-1/4}|x|^{5/2})\Big]. \quad (18)$$

Асимптотические формулы (17) и (18) получены методом Лиувилля–Стеклова, который в данном случае состоит из следующих операций и преобразований.

1. Для функций Чебышева–Эрмита выводится дифференциальное уравнение (3).

2. Дифференциальное уравнение (3) представляется условно как неоднородное уравнение (6), «решение» которого находится в виде равенства (4), которое фактически есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функций Чебышева–Эрмита, ибо эта неизвестная функция, помимо левой части, входит еще и под знак интеграла.

3. Интеграл в формуле (4) оценивается через известную норму функции Чебышева–Эрмита. В результате формула (4) превращается в асимптотическую формулу (13) с оценкой остаточного члена (14).

4. Определяется асимптотика коэффициента λ_n в формуле (13).

В результате выполнения всех этих операций получены асимптотические формулы (17) и (18). Но установленные результаты не исчерпывают всех возможностей метода Лиувилля–Стеклова. Наоборот, можно сказать, что этим методом мы проделали лишь первый шаг в изучении асимптотических свойств многочленов Чебышева–Эрмита.

Рассмотрим теперь второй шаг. Для этого равенство (4) заменой x и t на t и τ представим в виде

$$e^{-t^2/2}H_n(t) = \lambda_n \cos\Big(Nt - \frac{n\pi}{2}\Big) + \frac{1}{N}\int\limits_0^t \sin[N(t-\tau)]\,\tau^2\,e^{-\tau^2/2}H_n(\tau)\,d\tau.$$

Подставим правую часть в интеграл (4). В результате получим

$$e^{-x^2/2}H_n(x) =$$
$$= \lambda_n \cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) + \frac{\lambda_n}{N}\int\limits_0^x \sin[N(x-t)]\,t^2 \cos\Big(Nt - \frac{n\pi}{2}\Big)\,dt +$$
$$+ \frac{1}{N^2}\int\limits_0^x \sin[N(x-t)]\,t^2\Big\{\int\limits_0^t \sin[N(t-\tau)]\,\tau^2\,e^{-\tau^2/2}H_n(\tau)\,d\tau\Big\}\,dt. \quad (19)$$

Первый интеграл в правой части (19) не зависит от функции Чебышева–Эрмита и легко вычисляется. Но мы не будем его вычислять, а просто обозначим через $A_n(x)$. Интеграл в фигурных скобках уже оценен при рассмотрении остаточного члена (15). В целом третье слагаемое в правой части (19) после деления его на λ_n не превосходит величины

$$\frac{1}{N}\int\limits_0^x t^2|R_n(t)|\,dt \leqslant c_6\frac{|x|^{11/2}}{n^{3/4}}. \quad (20)$$

Следовательно, из (19) имеем асимптотическую формулу

$$H_n(x) = \lambda_n\,e^{x^2/2}\Big[\cos\Big(Nx - \frac{n\pi}{2}\Big) + \frac{A_n(x)}{N} + O(n^{-3/4}|x|^{11/2})\Big]. \quad (21)$$

Разумеется, можно снова под знак интеграла в фигурных скобках в (19) вместо функции Чебышева–Эрмита поставить ее выражение по формуле (4). В результате в асимптотической формуле для многочленов Чебышева–Эрмита получится третье слагаемое, а оценка остаточного члена несколько улучшается, если более точно оценить интеграл (15). Такая общая асимптотическая формула для многочленов Чебышева–Эрмита приведена в монографии Г. Сегё [I.6].

Приведем еще одну оценку многочленов Чебышева–Эрмита, которая является следствием все того же интегрального уравнения Вольтерра (4).

Теорема 5.3. *Для переменного сегмента*

$$[-A_n, A_n], \qquad A_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}(2n+1)^{1/6}, \tag{22}$$

имеет место неравенство

$$|H_n(x)|e^{-x^2/2} \leqslant 2\lambda_n, \qquad x \in [-A_n, A_n]. \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим через M_n максимум модуля функции Чебышева–Эрмита $H_n(x)\exp(-x^2/2)$ на сегменте (22). Тогда при $x \in [-A_n, A_n]$ из уравнения (4) находим

$$e^{-x^2/2}\,|H_n(x)| \leqslant \lambda_n + \frac{M_n}{\sqrt{2n+1}}\int\limits_0^{A_n} t^2\,dt = \lambda_n + \frac{M_n}{\sqrt{2n+1}}\,\frac{A_n^3}{3} =$$

$$= \lambda_n + \frac{M_n}{\sqrt{2n+1}}\,\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(2n+1)^{1/2} = \lambda_n + \frac{1}{2}\,M_n.$$

Следовательно, имеем неравенство $M_n \leqslant \lambda_n + M_n/2$, из которого следует оценка $M_n \leqslant 2\lambda_n$. Этим теорема 5.3 доказана.

Для ортонормированных многочленов Чебышева–Эрмита в силу формул (1.7), (11) и (16) при $x \in [-A_n, A_n]$ получаем

$$e^{-x^2/2}\,|\widehat{H}_n(x)| = e^{-x^2/2}\frac{|H_n(x)|}{\sqrt{n!\,\sqrt{\pi}\,2^n}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\lambda_n}{\sqrt{n!\,\sqrt{\pi}\,2^n}} = \frac{2}{\sqrt{n!\,\sqrt{\pi}\,2^n}}\,2^{(n+1)/2}\,n^{n/2}\,e^{-n/2}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{\pi}}\left(\frac{n}{e}\right)^{-n/2}(2\pi n)^{-1/4}\,2^{1/2}\,n^{n/2}\,e^{-n/2}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \leqslant c_7 n^{-1/4}.$$

Таким образом, для ортонормированных многочленов Чебышева–Эрмита имеет место неравенство

$$e^{-x^2/2}|\widehat{H}_n(x)| \leqslant c_7 n^{-1/4}, \qquad x \in [-A_n, A_n], \tag{24}$$

в котором постоянная c_7 не зависит от n и x.

Неравенства (23) и (24) называются *весовыми оценками для многочленов Чебышева–Эрмита на расширяющихся сегментах.*

§ 4. Ряды Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита

Пусть функция $f(x)$ определена на всей оси и принадлежит пространству $L_2 = L_2[-\infty, \infty; e^{-x^2}]$, т. е. выполняется условие

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-t^2}\,dt < \infty. \tag{1}$$

Тогда для этой функции можно определить коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-t^2} \widehat{H}_n(t)\, dt, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

и рассматривать соответствующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{H}_n(x). \tag{3}$$

В § 4 гл. I рассмотрены ряды Фурье по общим ортогональным многочленам. При этом сначала приведены результаты, относящиеся, в частности, и к случаю, когда интервал ортогональности бесконечен. Из этих результатов следует, что частичные суммы ряда (3) являются наилучшими приближениями функции $f(x)$ в метрике пространства L_2. Кроме того, имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \leqslant \|f\|^2,$$

из которого следует условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{4}$$

Далее, вместо формул (I.4.18) и (I.4.19) здесь имеем равенства

$$S_n(x; f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) \Big[\sum_{k=0}^{n} \widehat{H}_k(x) \widehat{H}_k(t) \Big]\, dt,$$

$$f(x) - S_n(x; f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} [f(x) - f(t)] \Big[\sum_{k=0}^{n} \widehat{H}_k(x) \widehat{H}_k(t) \Big]\, dt.$$

Применяя формулу Кристоффеля–Дарбу (1.18), получаем

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x; f) &= \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \Big[\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \Big] [\widehat{H}_{n+1}(x) \widehat{H}_n(t) - \widehat{H}_n(x) \widehat{H}_{n+1}(t)]\, dt = \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{2}}\, \widehat{H}_{n+1}(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \Big[\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \Big] \widehat{H}_n(t)\, dt - \\ &\quad - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\, \widehat{H}_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \Big[\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \Big] \widehat{H}_{n+1}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Будем считать точку x фиксированной и введем обозначение

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}.$$

Для этой функции вводим коэффициенты Фурье $\{a_n(\varphi_x)\}$. Тогда формула (5) приводится к виду

$$f(x) - S_n(x; f) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,[a_n(\varphi_x)\widehat{H}_{n+1}(x) - a_{n+1}(\varphi_x)\widehat{H}_n(x)]. \qquad (6)$$

Применять здесь теорему 1.11 нельзя, ибо в той теореме сегмент ортогональности считается конечным, и благодаря этому множитель в формуле Кристоффеля–Дарбу ограничен. А в случае многочленов Чебышева–Эрмита этот множитель возрастает со скоростью $\sqrt{n}$. Но зато здесь оказывается, что вместо (4) имеет место несколько более сильное утверждение, которое и поможет доказать, что правая часть формулы (6) стремится к нулю.

Лемма 5.2. *Если функция $\varphi(t)$ определена на всей оси и интегрируема с весовой функцией*

$$\psi(t) = (1 + |t|^{5/2}) \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big),$$

т. е. выполняется условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|^{5/2}) \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big) |\varphi(t)|\, dt < \infty, \qquad (7)$$

то для коэффициентов Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита функции $\varphi(x)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/4} a_n(\varphi) = 0. \qquad (8)$$

Доказательство. Асимптотическую формулу (3.18) можно представить в виде

$$\widehat{H}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n)^{-1/4}\, e^{t^2/2}\Big[\cos\Big(Nt - \frac{n\pi}{2}\Big) + R_n^{(1)}(t) + R_n^{(2)}(t)\Big],$$

где остаточные члены допускают оценки

$$|R_n^{(1)}(t)| \leqslant \frac{c_1}{n}, \qquad |R_n^{(2)}(t)| \leqslant c_2 n^{-1/4} |t|^{5/2}.$$

В этих оценках постоянные c_1 и c_2 не зависят от n и от $t \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, из формулы (2), учитывая условие (7), находим

$$a_n(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-t^2}\, \widehat{H}_n(t)\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n)^{-1/4}\Big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-t^2/2} \cos\Big(Nt - \frac{n\pi}{2}\Big)\, dt +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-t^2/2}R_n^{(1)}(t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-t^2/2}R_n^{(2)}(t)\,dt\Biggr\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n)^{-1/4}\Biggl\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-t^2/2}\cos\Bigl(Nt-\frac{n\pi}{2}\Bigr)\,dt+O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)+O\Bigl(\frac{1}{n^{1/4}}\Bigr)\Biggr\}.$$

Интеграл в фигурных скобках можно представить в виде суммы двух интегралов

$$\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-t^2/2}\cos Nt\,dt+\sin\frac{n\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-t^2/2}\sin Nt\,dt. \qquad (9)$$

Так как $N=\sqrt{2n+1}$, то в силу известных результатов из теории интегралов Фурье [VIII.1] оба интеграла (9) стремятся к нулю при $N\to\infty$.

Таким образом, лемма 5.2 доказана.

Т е о р е м а 5.4. *Если при фиксированном x вспомогательная функция*

$$\varphi_x(t)=\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

удовлетворяет условию (7), *то ряд Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита* (3) *функции $f(t)$ сходится к этой функции в точке x, т. е. имеем*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\widehat{H}_n(x). \qquad (10)$$

В самом деле, в силу неравенства (3.24) и условия (8) правая часть равенства (6) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Общий результат теоремы 5.4 можно несколько конкретизировать, рассматривая некоторые определенные условия на поведение функции $f(t)$ в окрестности точки x и на всем интервале $(-\infty,\infty)$.

Т е о р е м а 5.5. *Если функция $f(t)$ в окрестности точки x удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(t)-f(x)|\leqslant M|t-x|^{\alpha},\qquad t\in(x-\delta,\,x+\delta), \qquad (11)$$

и, кроме того, выполняется условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}|f(t)|[1+|t|^{3/2}]\,dt<\infty, \qquad (12)$$

то ряд Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита функции $f(t)$ сходится к этой функции в точке x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно из условий (11) и (12) вывести неравенство (7) для вспомогательной функции $\varphi_x(t)$. При фиксированном x вводим число $A>0$ при условии $|x|<A$. Тогда интеграл (7)

можно представить в виде суммы трех интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|^{5/2})\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\Big|\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big|\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{-A}(1+|t|^{5/2})\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\Big|\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big|\,dt + \int_{-A}^{A}(1+|t|^{5/2})\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\Big|\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big|\,dt + \int_{A}^{\infty}(1+|t|^{5/2})\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\Big|\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big|\,dt.$$

Так как x фиксировано и $x \in (-A, A)$, то первый и третий интегралы существуют в силу условия (12). А второй интеграл существует в силу условия Липшица (11). Таким образом, теорема 5.5 доказана.

Из теорем 5.4 и 5.5 следует, что в смысле локальных достаточных условий сходимости ряды Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита аналогичны тригонометрическим рядам Фурье и рядам Фурье–Чебышева. Только здесь появляется дополнительное условие (7), связанное с бесконечностью интервала ортогональности.

В заключение параграфа сформулируем достаточное условие равномерной сходимости ряда (3) на конечном сегменте $[A, B]$. В силу неравенства (3.24) и формулы (6) для равномерной сходимости ряда (3) достаточно, чтобы последовательность $\{n^{1/4}a_n(\varphi_x)\}$ сходилась к нулю равномерно при $x \in [A, B]$. Анализ доказательства леммы 5.2 показывает, что для этого достаточно, чтобы оба интеграла в сумме (9)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big]e^{-t^2/2}\cos Nt\,dt,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big]e^{-t^2/2}\sin Nt\,dt$$

стремились к нулю равномерно относительно $x \in [A, B]$. А в силу известных результатов теории тригонометрических рядов Фурье [III.2] для этого достаточно в свою очередь, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\Big]e^{-t^2/2}\,dt$$

сходился равномерно относительно $x \in [A, B]$. В частности, это будет

выполнено, если функция $f(x)$ на сегменте $[A - \varepsilon, B + \varepsilon]$ удовлетворяет условию Липшица. Разумеется, при этом должно быть выполнено условие (12).

§ 5. Примеры разложения функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита

Обычно на практике применяются разложения по стандартизованным многочленам Чебышева–Эрмита. Из равенства (1.7) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t)\,dt = n!\,2^n\sqrt{\pi}.$$

Следовательно, коэффициенты разложения по стандартизованным многочленам Чебышева–Эрмита определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{n!\,2^n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-t^2} H_n(t)\,dt. \tag{1}$$

Во многих случаях разложения по многочленам Чебышева–Эрмита получаются различными искусственными приемами и в том числе с использованием производящих функций.

Например, полагая в формуле (1.14) $w = a/2$ и $z = x$, получим разложение показательной функции

$$e^{ax} = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!\,2^n}\, H_n(x). \tag{2}$$

Аналогично из равенств (1.15) и (1.16), полагая в них $w = 1$, получим формулы

$$e\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, H_{2n}(x),$$

$$e\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, H_{2n+1}(x).$$

Все эти ряды сходятся абсолютно при любом конечном x и равномерно на всяком конечном сегменте.

Далее, полагая в равенстве (2) сначала $a = 2$, а затем $a = -2$, получим представления

$$e^{2x} = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}, \qquad e^{-2x} = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n(x)}{n!}.$$

С помощью этих формул находим разложения гиперболических функций:

$$\operatorname{ch} x = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, H_{2n}(x),$$

$$\operatorname{sh} x = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, H_{2n+1}(x).$$

Найдем теперь разложение функции

$$f(x) = e^{-a^2x^2}.$$

В силу четности этой функции все нечетные коэффициенты ее равны нулю. А для четных, используя интегральное представление многочленов Чебышева–Эрмита (2.3), имеем

$$c_{2n} = \frac{1}{(2n)!\, 2^{2n}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2n}(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^n\, 4}{\pi(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\, dt \right] dx =$$

$$= \frac{4(-1)^n}{\pi(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \left[\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos(2xt)\, dx \right] dt.$$

Перемена порядка интегрирования законна, ибо оба интеграла в квадратных скобках сходятся равномерно относительно параметров, а повторные интегралы сходятся абсолютно. Таким образом, выполнены условия теоремы о перемене порядка интегрирования в несобственных интегралах [VIII.8]. Внутренний интеграл вычисляется с помощью формулы (2.2). Имеем

$$\frac{2}{a} \int_0^{\infty} e^{-(ax)^2} \cos\Bigl(2ax\, \frac{t}{a}\Bigr)\, d(ax) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-t^2/a^2}.$$

Следовательно, для искомых коэффициентов находим

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n\, 2}{(2n)!\, a\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} e^{-t^2/a^2} t^{2n}\, dt.$$

Заменяя переменное интегрирования по формуле

$$\xi = (1+a^2)\, \frac{t^2}{a^2},$$

получаем

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n\, a^{2n+1}}{(2n)!\, a\sqrt{\pi}\, (1+a^2)^{n+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{n-1/2}\, d\xi = \frac{(-1)^n a^{2n}\, \Gamma(n+1/2)}{(2n)!\, \sqrt{\pi}\, (1+a^2)^{n+1/2}}.$$

Далее, используем формулу удвоения для гамма-функции (IV.4.18). В результате имеем

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n a^{2n}\, \Gamma(2n)}{(2n)!\,(1+a^2)^{n+1/2}\, 2^{2n-1}\Gamma(n)} = \frac{(-1)^n a^{2n}}{n!\, 2^{2n}(1+a^2)^{n+1/2}}.$$

Таким образом, имеем разложение

$$e^{-a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n} H_{2n}(x)}{n!\, 2^{2n}(1+a^2)^{n+1/2}}. \qquad (3)$$

Это разложение сходится при всяком x.

Из формулы (3) нетрудно получить разложение для интеграла вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt. \qquad (4)$$

В самом деле, в равенстве (3) положим $a = 1$. Проинтегрируем это равенство почленно в пределах от 0 до x, а затем воспользуемся формулой (2.9). В результате получим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{n!\, 2^{3n}(2n+1)}. \qquad (5)$$

Этот ряд сходится при всяком x и гораздо быстрее, чем степенное разложение интеграла вероятностей (4).

Рассмотрим теперь разложение нечетной функции $f(x) = \operatorname{sign} x$. Считаем нечетные коэффициенты. Принимая во внимание четность подынтгеральной функции и используя формулу (2.11), находим

$$c_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!\, 2^{2n+1}\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} x\, e^{-x^2} H_{2n+1}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!\, 2^{2n}\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} H_{2n+1}(x)\, dx = \frac{H_{2n}(0)}{(2n+1)!\, 2^{2n}\sqrt{\pi}}.$$

Подставляя значение четного многочлена в начале координат, определяемое формулой (1.29), получаем

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)!\, 2^{2n}\sqrt{\pi}\, n!} = \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)\, 2^{2n}\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, имеем разложение

$$\operatorname{sign} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{n!\,(2n+1)2^{2n}}.$$

Наконец, рассмотрим очень характерный пример вычисления коэффициентов разложения степенной функции

$$f(x) = |x|^p, \qquad p > -1, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Так как эта функция четная, то считаем только четные коэффициенты. Используя формулу (2.11), находим

$$c_{2n} = \frac{2}{(2n)!\,2^{2n}\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} x^p H_{2n}(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{(2n)!\,2^{2n}\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{x^{p+1}}{p+1}\, e^{-x^2} H_{2n}(x)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{p+1} \int\limits_0^{\infty} x^{p+1} [e^{-x^2} H_{2n}(x)]'\,dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{(2n)!\,2^{2n}\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{p+1} \int\limits_0^{\infty} x^p e^{-x^2} x H_{2n+1}(x)\,dx.$$

Далее применяем рекуррентную формулу

$$\frac{1}{2}\, H_{2n+2}(x) = xH_{2n+1}(x) - (2n+1)H_{2n}(x).$$

В результате имеем

$$c_{2n} = \frac{2}{(2n)!\,2^{2n}\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2(p+1)} \int\limits_0^{\infty} x^p e^{-x^2} H_{2n+2}(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{2n+1}{p+1} \int\limits_0^{\infty} x^p e^{-x^2} H_{2n}(x)\,dx \right\} = \frac{2(2n+1)(2n+2)}{p+1}\, c_{2n+2} + \frac{2n+1}{p+1}\, c_{2n}.$$

Следовательно, для искомых коэффициентов получится рекуррентная формула

$$c_{2n+2} = \frac{p-2n}{2(2n+1)(2n+2)}\, c_{2n}.$$

С помощью этой формулы находим последовательно

$$c_{2n} = \frac{p(p-2)(p-4)\ldots(p-2n+2)c_0}{2^n 1(1+2)(1+4)\ldots(1+2n-2)} \times$$

$$\times \frac{1}{2(2+2)(2+4)\ldots(2+2n-2)} = \frac{p(p-2)(p-4)\ldots(p-2n+2)c_0}{2^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\,2^n\,n!} =$$

$$= \frac{p(p-2)(p-4)\ldots(p-2n+2)c_0}{(2n)!\,2^n}.$$

Так как

$$c_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} x^p e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} t^{p/2-1/2} e^{-t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\Big(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\Big),$$

то, следовательно, имеем искомое разложение

$$|x|^p = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\Big(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\Big) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)}{(2n)!\,2^n}\, H_{2n}(x). \tag{6}$$

В частности, если p есть четное число, т. е. $p = 2m$, то, используя снова формулу удвоения для гамма-функции (IV.4.18), находим

$$x^{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n)!\,(m-n)!}\, H_{2n}(x).$$

Таковы наиболее характерные примеры разложений функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита. В силу весьма важных формул (2.8) и (2.9) все полученные разложения формально можно дифференцировать и интегрировать любое число раз. В результате снова будем получать разложения в ряды по многочленам Чебышева–Эрмита.

§ 6. Некоторые дополнения и задачи

1. В теории ортогональных многочленов случаи ортогональности по бесконечному интервалу являются гораздо более сложными, чем случаи ортогональности по конечному сегменту. Именно поэтому некоторые результаты настоящей главы не полные и не окончательные. Это относится прежде всего к асимптотическим свойствам многочленов Чебышева–Эрмита. Здесь изложены только результаты, которые получаются методом Лиувилля–Стеклова. Дальнейшие результаты, которые получаются другими методами, изложены в монографии Г. Сегё [I.6]. Важные результаты по асимптотическим свойствам многочленов Чебышева–Эрмита получили Р. Аски, С. Ваингер [XI.42], а также Б. Муккенхоупт [XI.44].

2. В § 4 изложены некоторые результаты об условиях сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита. Конечно, эти результаты не являются ни полными, ни окончательными. Наиболее законченные результаты получаются из теорем о равносходимости, которые изложены в монографии Г. Сегё [I.6]. А здесь автор старался показать, что можно получить простыми рассуждениями.

3. Наиболее трудными являются вопросы сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита. В этом направлении существенные результаты получили Р. Аски и С. Ваингер [XI.42], и Б. Муккенхоупт [XI.44].

4. В § 3 рассмотрено весовое неравенство (3.24) для многочленов Чебышева–Эрмита на расширяющихся сегментах. Это неравенство было опубликовано в 1976 г. в первом издании настоящей книги. В работе автора [XI.46] сформулировано восемь нерешенных задач из теории ортогональных многочленов. Одна из них (задача 3) посвящена весовой оценке многочленов Чебышева–Эрмита на расширяющихся сегментах.

Рассмотрим неравенство (3.24)

$$|\widehat{H}_n(x)| \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \leqslant c_7\, n^{-1/4}, \qquad x \in [-A_n, A_n], \tag{1}$$

где

$$A_n = \Big(\frac{3}{2}\Big)^{1/3} (2n+1)^{1/6}. \tag{2}$$

В работе [XI.46] ставится задача о максимальной скорости возрастания последовательности $\{A_n\}$.

Аналогично, в той же работе [XI.46] в задаче 2 рассматривается неравенство

$$\frac{|\widehat{H}_n(x)|}{1+|x|^\omega} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \leqslant \frac{c_8(\omega)}{n^{1/4}}, \qquad x \in (-\infty, \infty), \tag{3}$$

и требуется найти минимальное значение ω, при котором неравенство (3) выполняется.

Некоторые результаты по этим задачам получены в [XI.20, XI.21, XI.43].

5. В связи с неравенствами (1) и (3) возникает задача о весовых оценках скорости сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей оси и имеет все коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита. Тогда можно рассматривать величины

$$R_n(f, A_n) = \max_{|x| \leqslant A_n} \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{H}_k(x) \Big| \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big), \tag{4}$$

$$R_n(f, \omega) = \max_{x \in (-\infty,\infty)} \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{H}_k(x) \Big| \frac{\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)}{1+|x|^\omega}. \tag{5}$$

Было бы желательно оценить эти величины при различных условиях на функцию $f(x)$. Например, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз, причем $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. И, конечно, должны быть какие-то условия интегрального типа на саму функцию и ее производные.

6. В заключение параграфа приведем некоторые формулы для многочленов Чебышева–Эрмита, которые могут быть полезными в теоретических и прикладных исследованиях.

Как обычно, с помощью формулы Родрига, дифференциального уравнения и производящей функции получаются формулы

$$\sum_{k=0}^{m} 2^k k!\, C_m^k C_n^k H_{m+n-2k}(x) = H_m(x) H_n(x) \qquad (m \leqslant n),$$

$$\sum_{k=0}^{m} k!\,(-2)^k C_m^k C_n^k H_{m-k}(x) H_{n-k}(x) = H_{m+n}(x) \qquad (m \leqslant n),$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k H_k(x) H_{n-k}(y) = 2^{n/2} H_n\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big),$$

$$\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\,dt = H_{n-1}(0) - H_{n-1}(x) e^{-x^2},$$

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\frac{(-1)^m\sqrt{m}}{m!\,2^{2m}}\,H_{2m}\Big(\frac{x}{2\sqrt{m}}\Big)\Big] = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},$$

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\frac{(-1)^m}{m!\,2^m}\,H_{2m+1}\Big(\frac{x}{2\sqrt{m}}\Big)\Big] = \frac{2\sin x}{\sqrt{\pi}},$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}[\lambda^{-n/2} G_n(x\lambda^{-1/2};\lambda)] = \frac{1}{n!}\,H_n(x).$$

Глава VI

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА–ЛАГЕРРА

§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства

На положительной части действительной оси рассматривается весовая функция

$$h(x) = x^\alpha e^{-x}, \qquad x \in (0, \infty), \quad \alpha > -1. \tag{1}$$

В силу формулы Лейбница о дифференцировании произведения двух функций имеем равенство

$$(x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^{\alpha+n})^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)}. \tag{2}$$

В правой части этого равенства любое слагаемое с номером k является произведением функции (1) на многочлен степени k. Следовательно, функция

$$L_n(x; \alpha) = \frac{1}{n!}\, x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)} \tag{3}$$

есть многочлен степени n. Этот многочлен называется *стандартизованным многочленом Чебышева–Лагерра*, а формула (3) называется *формулой Родрига* для этих многочленов. Наивысшая степень x в правой части (2) имеется в том слагаемом, у которого $k = n$. Следовательно, старший коэффициент многочлена (3) равен $(-1)^n \dfrac{1}{n!}$, т. е. имеем

$$L_n(x; \alpha) = (-1)^n \frac{1}{n!}\, x^n + \ldots \tag{4}$$

Из формул (2) и (3) находим

$$L_0(x; \alpha) = 1,$$

$$L_1(x; \alpha) = (\alpha + 1) - x,$$

$$L_2(x; \alpha) = \frac{1}{2}\,(\alpha + 2)(\alpha + 1) - (\alpha + 2)x + \frac{1}{2}\, x^2,$$

$$L_3(x; \alpha) = \frac{1}{6}\,(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1) - \\ - \frac{1}{2}\,(\alpha + 3)(\alpha + 2)x + \frac{1}{2}\,(\alpha + 3)x^2 - \frac{1}{6}\, x^3,$$

$$L_4(x; \alpha) = \frac{1}{24}\,(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1) - \\ - \frac{1}{6}\,(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)x + \frac{1}{4}\,(\alpha + 4)(\alpha + 3)x^2 - \frac{1}{6}\,(\alpha + 4)x^3 + \frac{1}{24}\, x^4.$$

В силу формулы (4) многочлен Чебышева–Лагерра с единичным старшим коэффициентом имеет вид

$$\widetilde{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n\, n!\, L_n(x;\alpha) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)}. \qquad (5)$$

Докажем, что многочлены (3) ортогональны с весом (1) на интервале $(0,\infty)$. Для этого рассмотрим интеграл

$$A_{mn} = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m(x;\alpha) L_n(x;\alpha)\, dx. \qquad (6)$$

Применяя формулу Родрига (3) и интегрируя по частям, находим

$$A_{mn} = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m(x;\alpha) \frac{1}{n!}\, x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{n!} L_m(x;\alpha)(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n-1)}\Big|_0^\infty - \frac{1}{n!}\int_0^\infty L'_m(x;\alpha)(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n-1)}\, dx.$$

Ввиду наличия экспоненциального множителя и условия $\alpha > -1$ внеинтегральные члены равны нулю. Продолжая интегрирование по частям, получаем

$$A_{mn} = -\frac{1}{n!}\int_0^\infty L'_m(x;\alpha)(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n-1)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty L''_m(x;\alpha)(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n-2)}\, dx = \ldots$$
$$\ldots = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty L_m^{(n)}(x;\alpha) x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx. \qquad (7)$$

Если $m < n$, то $L_m^{(n)}(x;\alpha) \equiv 0$. Поэтому из (7), учитывая (6), находим

$$A_{mn} = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m(x;\alpha) L_n(x;\alpha)\, dx = 0, \qquad m < n.$$

Этим ортогональность стандартизованных многочленов Чебышева–Лагерра доказана.

Вычислим норму многочлена $L_n(x;\alpha)$. Учитывая (4), (6) и (7), имеем

$$A_{nn} = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^2(x;\alpha)\, dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty L_n^{(n)}(x;\alpha) x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx = \frac{1}{n!}\,\Gamma(\alpha+n+1).$$

Следовательно, ортонормированные многочлены Чебышева–Лагерра имеют вид

$$\widehat{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}}\,L_n(x;\alpha) = \\ = \frac{(-1)^n x^{-\alpha}e^x}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}\,(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)}, \qquad n=0,1,2,\ldots \quad (8)$$

А старший коэффициент ортонормированного многочлена Чебышева–Лагерра в силу (4) и (8) определяется равенством

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}. \quad (9)$$

Далее, рассмотрим функцию двух переменных

$$F(x,t;\alpha) = (1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{xt}{t-1}\right). \quad (10)$$

Здесь в случае дробного α имеется в виду главное значение многозначной функции. При любом фиксированном x эта функция аналитическая по t в круге $|t|<1$. Следовательно, справедливо разложение

$$F(x,t;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x;\alpha)t^n, \qquad |t|<1. \quad (11)$$

В силу формулы Коши для коэффициентов ряда Тейлора имеем

$$c_n(x;\alpha) = \frac{1}{n!}\,F_t^{(n)}(x,t;\alpha)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{F(x,\tau;\alpha)}{\tau^{n+1}}\,d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}(1-\tau)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{x\tau}{\tau-1}\right)\frac{d\tau}{\tau^{n+1}}, \qquad 0<\rho<1. \quad (12)$$

В этом интеграле сделаем замену переменного интегрирования по формулам

$$\frac{x}{1-\tau} = u, \quad \tau = 1-\frac{x}{u}, \quad d\tau = \frac{x}{u^2}\,du. \quad (13)$$

Дробно-линейное отображение $u = x/(1-\tau)$ переводит окружность $|\tau| = \rho < 1$ в некоторую окружность Γ, охватывающую точку $x>0$ и не охватывающую точку 0. Поэтому в силу равенств (13) интеграл (12) приводится к виду

$$c_n(x;\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha+1}\exp\left[u\left(\frac{x}{u}-1\right)\right]\left(\frac{u-x}{u}\right)^{-n-1}\frac{x}{u^2}\;du = \\ = x^{-\alpha}e^x\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}u^{\alpha+n}e^{-u}\,\frac{du}{(u-x)^{n+1}} = x^{-\alpha}e^x\,\frac{1}{n!}\,(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)} = L_n(x;\alpha).$$

Подставляя это значение в формулу (11) и учитывая (10), находим

$$F(x,t;\alpha) = (1-t)^{-\alpha-1} \exp \frac{xt}{t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)\, t^n. \tag{14}$$

Полагая здесь $t = -w$ и учитывая равенство (4), получаем второе разложение

$$(1+w)^{-\alpha-1} \exp \frac{xw}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \widetilde{L}_n(x;\alpha)\, w^n. \tag{15}$$

Такова производящая функция для многочленов Чебышева–Лагерра. Разумеется, в формулах (14) и (15) вместо x можно поставить любое комплексное значение z. Но при этом должно быть $|t| < 1$ и $|w| < 1$.

Обратимся теперь к выводу рекуррентного соотношения для стандартизованных многочленов Чебышева–Лагерра. Прежде всего докажем, что для производящей функции (10) выполняется тождество

$$(1-t)^2 F'_t(x,t;\alpha) + [x - (1-t)(1+\alpha)] F(x,t;\alpha) \equiv 0. \tag{16}$$

В самом деле, производная по t от функции (10) имеет вид

$$F'_t(x,t;\alpha) =$$

$$= (\alpha+1)(1-t)^{-\alpha-2} \exp \frac{xt}{t-1} + (1-t)^{-\alpha-1} \exp \frac{xt}{t-1} \left[\frac{x(t-1) - xt}{(t-1)^2}\right] =$$

$$= F(x,t;\alpha) \left[\frac{\alpha+1}{1-t} - \frac{x}{(t-1)^2}\right] = F(x,t;\alpha)\, \frac{(\alpha+1)(1-t) - x}{(1-t)^2}.$$

Этим соотношение (16) доказано.

Подставляем разложение (14) в тождество (16). Получаем последовательно

$$(1-t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nL_n(x;\alpha) t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha) t^n \equiv 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nL_n(x;\alpha)t^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nL_n(x;\alpha)t^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} nL_n(x;\alpha)t^{n+1} + x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)t^n -$$

$$- (1+\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)t^n + (1+\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)t^{n+1} \equiv 0.$$

Поскольку это тождество, то сумму всех коэффициентов при t в степени n приравниваем нулю. В результате имеем

$$(n+1)L_{n+1}(x;\alpha) - 2nL_n(x;\alpha) + (n-1)L_{n-1}(x;\alpha) +$$

$$+ xL_n(x;\alpha) - (1+\alpha)L_n(x;\alpha) + (1+\alpha)L_{n-1}(x;\alpha) = 0,$$

$$(n+1)L_{n+1}(x;\alpha) + (x-2n-1-\alpha)L_n(x;\alpha) + \\ + (\alpha+n)L_{n-1}(x;\alpha) = 0. \quad (17)$$

Таково основное рекуррентное соотношение для стандартизованных многочленов Чебышева–Лагерра. Из равенства (17) нетрудно получить аналогичные соотношения для многочленов $\{\widetilde{L}_n(x;\alpha)\}$ и $\{\widehat{L}_n(x;\alpha)\}$. В самом деле, используя формулу (5), равенство (17) представляем в виде

$$(n+1)\,\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\widetilde{L}_{n+1}(x;\alpha) + (x-2n-1-\alpha)\,\frac{(-1)^n}{n!}\,\widetilde{L}_n(x;\alpha) + \\ + (\alpha+n)\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\widetilde{L}_{n-1}(x;\alpha) = 0.$$

После очевидных преобразований находим

$$\widetilde{L}_{n+1}(x;\alpha) - (x-2n-1-\alpha)\widetilde{L}_n(x;\alpha) + (\alpha+n)n\widetilde{L}_{n-1}(x;\alpha) = 0. \quad (18)$$

Аналогично, с помощью равенства (8) получаем

$$(n+1)(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{(n+1)!}}\,\widehat{L}_{n+1}(x;\alpha) + \\ + (x-2n-1-\alpha)(-1)^n\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}}\,\widehat{L}_n(x;\alpha) + \\ + (\alpha+n)(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!}}\,\widehat{L}_{n-1}(x;\alpha) = 0.$$

Далее используем свойства гамма-функции Эйлера. В результате имеем

$$\sqrt{(n+1)(\alpha+n+1)}\,\widehat{L}_{n+1}(x;\alpha) - (x-2n-1-\alpha)\widehat{L}_n(x;\alpha) + \\ + \sqrt{n(\alpha+n)}\,\widehat{L}_{n-1}(x;\alpha) = 0. \quad (19)$$

Коэффициент в формуле Кристоффеля–Дарбу в силу справедливости равенств (I.2.5) и (9) здесь равен

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \frac{\sqrt{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+n+2)}}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}} = \sqrt{(n+1)(\alpha+n+1)}. \quad (20)$$

Следовательно, формула Кристоффеля–Дарбу для ортонормированных многочленов Чебышева–Лагерра имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n}\widehat{L}_k(x;\alpha)\widehat{L}_k(t;\alpha) = \\ = \sqrt{(n+1)(\alpha+n+1)}\;\frac{\widehat{L}_{n+1}(x;\alpha)\widehat{L}_n(t;\alpha) - \widehat{L}_{n+1}(t;\alpha)\widehat{L}_n(x;\alpha)}{x-t}. \quad (21)$$

Переходя к стандартизованным многочленам, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)}\, L_k(x;\alpha)L_k(t;\alpha) = \\ = \frac{(n+1)!}{\Gamma(\alpha+n+1)}\, \frac{L_{n+1}(x;\alpha)L_n(t;\alpha) - L_{n+1}(t;\alpha)L_n(x;\alpha)}{t-x}. \quad (22)$$

Кроме формулы (17), для многочленов Чебышева–Лагерра имеют место и другие рекуррентные соотношения. Для их получения можно воспользоваться все тем же разложением (14).

Аналогично тождеству (16) имеет место легко проверяемое тождество

$$(1-t)F'_x(x,t;\alpha) + tF(x,t;\alpha) \equiv 0.$$

Из этого тождества находим

$$(1-t)\sum_{n=1}^{\infty} L'_n(x;\alpha)t^n + t\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)t^n \equiv 0.$$

Далее, как обычно, вычисляем коэффициент при t в степени n и приравниваем его нулю. В результате имеем

$$L'_n(x;\alpha) - L'_{n-1}(x;\alpha) + L_{n-1}(x;\alpha) = 0. \quad (23)$$

Аналогичным образом из очевидного тождества

$$(1-t)F(x,t;\alpha+1) \equiv F(x,t;\alpha)$$

имеем тождество

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha+1)t^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)t^n.$$

А затем, опять приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим рекуррентную формулу

$$L_n(x;\alpha+1) - L_{n-1}(x;\alpha+1) = L_n(x;\alpha). \quad (24)$$

Далее, из формулы (17) определяем $L_{n-1}(x;\alpha)$ и $L'_{n-1}(x;\alpha)$ и подставляем в равенство (23). В результате получаем последовательно

$$L'_n(x;\alpha) + \frac{1}{\alpha+n}\,[(n+1)L'_{n+1}(x;\alpha) + L_n(x;\alpha) + \\ + (x-2n-1-\alpha)L'_n(x;\alpha)] + \\ + \frac{1}{\alpha+n}\,[-(n+1)L_{n+1}(x;\alpha) - (x-2n-1-\alpha)L_n(x;\alpha)] = 0,$$

$$(n+1)L'_{n+1}(x;\alpha) + (x-n-1)L'_n(x;\alpha) + \\ + (\alpha+2n+2-x)L_n(x;\alpha) - (n+1)L_{n+1}(x;\alpha) = 0. \quad (25)$$

В этом равенстве вместо n поставим $n-1$ и представим его в виде

$$xL'_n(x;\alpha) - (x-n)[L'_n(x;\alpha) - L'_{n-1}(x;\alpha)] + \\ + (\alpha+2n-x)L_{n-1}(x;\alpha) - nL_n(x;\alpha) = 0. \quad (26)$$

Заменим здесь разность производных в квадратных скобках с помощью равенства (23). В результате получается еще одна рекуррентная формула

$$xL_n'(x;\alpha) = nL_n(x;\alpha) - (n+\alpha)L_{n-1}(x;\alpha). \tag{27}$$

Аналогичными преобразованиями получаются и другие рекуррентные формулы для многочленов Чебышева–Лагерра.

Переходим к выводу дифференциального уравнения, которому удовлетворяют многочлены Чебышева–Лагерра.

Рассмотрим функцию

$$u = x^{\alpha+n}e^{-x}. \tag{28}$$

Дифференцируя, находим

$$u' = (\alpha+n)x^{\alpha+n-1}e^{-x} - x^{\alpha+n}e^{-x}, \qquad xu' = (\alpha+n-x)u.$$

Обе части последнего равенства дифференцируем еще $n+1$ раз. В результате имеем последовательно

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{(k)} u^{(n-k+2)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (\alpha+n-x)^{(k)} u^{(n-k+1)},$$

$$xu^{(n+2)} + (n+1)u^{(n+1)} = (\alpha+n-x)u^{(n+1)} - (n+1)u^{(n)},$$

$$xu^{(n+2)} + (x-\alpha+1)u^{(n+1)} + (n+1)u^{(n)} = 0. \tag{29}$$

В силу формулы Родрига (3) стандартизованные многочлены Чебышева–Лагерра представляются через функцию (28) по формуле

$$L_n(x;\alpha) = \frac{1}{n!}\,x^{-\alpha}e^x(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)} = \frac{1}{n!}\,x^{-\alpha}e^x u^{(n)}.$$

Отсюда определяем производные от функции u и подставляем в равенство (29). В результате имеем

$$x\,[x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha)]'' + (x-\alpha+1)\,[x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha)]' + \\ + (n+1)\,[x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha)] = 0. \tag{30}$$

Первая производная произведения в квадратных скобках имеет вид

$$\alpha x^{\alpha-1}e^{-x}L_n(x;\alpha) - x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha) + x^\alpha e^{-x}L_n'(x;\alpha). \tag{31}$$

Вычисляем вторую производную и сразу же подставляем ее, а также первую производную (31) в левую часть равенства (30). В результате получаем

$$x\,[\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-x}L_n(x;\alpha) - \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}L_n(x;\alpha) + \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}L_n'(x;\alpha) - \\ - \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}L_n(x;\alpha) + x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha) - x^\alpha e^{-x}L_n'(x;\alpha) + \\ + \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}L_n'(x;\alpha) - x^\alpha e^{-x}L_n'(x;\alpha) + x^\alpha e^{-x}L_n''(x;\alpha)] + \\ + (x-\alpha+1)\,[\alpha x^{\alpha-1}e^{-x}L_n(x;\alpha) - x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha) + x^\alpha e^{-x}L_n'(x;\alpha)] + \\ + (n+1)x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha) = 0.$$

Опуская множители x^α и e^{-x} и приводя подобные члены в квадратных скобках, находим

$$x\Big[\alpha(\alpha-1)\,\frac{1}{x^2}\,L_n(x;\alpha) - \frac{2\alpha}{x}\,L_n(x;\alpha) + \\ + \frac{2\alpha}{x}\,L_n'(x;\alpha) + L_n(x;\alpha) - 2L_n'(x;\alpha) + L_n''(x;\alpha)\Big] + \\ + (x-\alpha+1)\Big[\frac{\alpha}{x}\,L_n(x;\alpha) - L_n(x;\alpha) + L_n'(x;\alpha)\Big] + (n+1)L_n(x;\alpha) = 0.$$

Далее группируем слагаемые по производным от многочленов Чебышева–Лагерра:

$$xL_n''(x;\alpha) + L_n'(x;\alpha)\,[2\alpha - 2x + x - \alpha + 1] + \\ + L_n(x;\alpha)\Big[\frac{\alpha(\alpha-1)}{x} - 2\alpha + x + (x-\alpha+1)\Big(\frac{\alpha}{x} - 1\Big) + n + 1\Big] = 0$$

и окончательно получаем

$$xL_n''(x;\alpha) + (\alpha - x + 1)L_n'(x;\alpha) + nL_n(x;\alpha) = 0. \tag{32}$$

Поскольку все предыдущие равенства, начиная с (24), выполнялись тождественно, то, следовательно, в силу (32) многочлен Чебышева–Лагерра $L_n(x;\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0. \tag{33}$$

Разумеется, этому же дифференциальному уравнению удовлетворяют и многочлены $\widetilde{L}_n(x;\alpha)$ и $\widehat{L}_n(x;\alpha)$.

Обратимся теперь к формуле Родрига (3). Операцию дифференцирования в этой формуле можно записать с помощью формулы Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Полагая здесь $u = x^{\alpha+n}$ и $v = e^{-x}$ и учитывая равенства

$$(x^{\alpha+n})^{(n-k)} = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+k+1)x^{\alpha+k},$$

$$(e^{-x})^{(k)} = (-1)^k e^{-x},$$

находим

$$L_n(x;\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+k+1)}{k!\,(n-k)!}\,(-x)^k. \tag{34}$$

Коэффициенты можно записать через гамма-функцию:

$$L_n(x;\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\,\frac{(-x)^k}{k!\,(n-k)!}, \tag{35}$$

либо применить сокращенные обозначения

$$L_n(x;\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \tag{36}$$

Из этих формул следует равенство

$$L_n(0;\alpha) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)}{n!}. \quad (37)$$

В силу асимптотической формулы (IV.7.18) из (37) имеем

$$L_n(0;\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)} = \frac{(n+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]. \quad (38)$$

Следовательно, существуют такие две положительные постоянные c_1 и c_2, что выполняется неравенство

$$c_1 n^\alpha \leqslant L_n(0;\alpha) \leqslant c_2 n^\alpha. \quad (39)$$

Далее, дифференцируя равенство (34), полагая $k-1=m$ и снова используя это равенство, но уже при $n-1$ и для $\alpha+1$, находим

$$L_n'(x;\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+k+1)}{(k-1)!\,(n-k)!}(-x)^{k-1} =$$

$$= -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{[(\alpha+1)+(n-1)]\,[(\alpha+1)+(n-1)-1]\ldots(\alpha+1+m+1)}{m!\,[(n-1)-m]!} \times$$

$$\times (-x)^m = -L_{n-1}(x;\,\alpha+1).$$

Таким образом, при любых n и α имеем очень важное тождество

$$L_n'(x;\alpha) = -L_{n-1}(x;\,\alpha+1), \quad (40)$$

которое называется *формулой дифференцирования для многочленов Чебышева–Лагерра.*

Производную $L_n'(x;\alpha)$ подставим в левую часть равенства (27). В результате получается еще одно соотношение

$$xL_{n-1}(x;\alpha+1) = (n+\alpha)L_{n-1}(x;\alpha) - nL_n(x;\alpha).$$

Заменяя здесь n на $n+1$, находим более удобную формулу

$$xL_n(x;\alpha+1) = (n+\alpha+1)L_n(x;\alpha) - (n+1)L_{n+1}(x;\alpha). \quad (41)$$

Тождества (40) и (41) часто применяются при исследовании рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

В приложениях наиболее часто встречаются многочлены Чебышева–Лагерра при условии $\alpha = 0$. В этом частном случае обычно применяется обозначение

$$L_n(x;0) = L_n(x). \quad (42)$$

А формулы (3), (5), (8) и (35) в этом случае имеют вид

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\,e^x(x^n e^{-x})^{(n)}, \quad (43)$$

$$\widetilde{L}_n(x) = (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}, \quad (44)$$

$$\widehat{L}_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\, e^x (x^n e^{-x})^{(n)}, \tag{45}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,(-x)^k}{(k!)^2(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \tag{46}$$

Во всех трех формулах Родрига (3), (5) и (8) нужно либо считать x положительным, а затем после дифференцирования можно распространить полученное равенство и на комплексные значения независимого переменного, либо считать x произвольным, но в обоих многозначных функциях $x^{-\alpha}$ и $x^{\alpha+n}$ выбирать те однозначные ветви, аргументы которых равны нулю при положительных x.

§ 2. Интегральные соотношения

В дальнейшем изложении свойств многочленов Чебышева–Лагерра будет применяться функция Бесселя первого рода порядка p

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+p}}{k!\,\Gamma(k+p+1)}. \tag{1}$$

Этот ряд сходится очень быстро при всех $x > 0$, если $p \geqslant 0$, а при $p \geqslant -1/2$ произведение $x^{-p} J_p(x)$ есть четная целая функция, равномерно ограниченная на всей оси [IV.2, IV.5, IV.6].

Рассмотрим зависящий от параметров интеграл

$$A_n(x;\alpha) = \int_0^\infty (\sqrt{xt}\,)^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}\,)\, e^{-t}\, dt.$$

Используя разложение (1), для этого интеграла получаем

$$A_n(x;\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+\alpha+1)} \int_0^\infty (\sqrt{xt}\,)^{2n+2k+2\alpha} e^{-t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+n+\alpha}}{k!\,\Gamma(k+n+\alpha+1)} \int_0^\infty t^{k+n+\alpha} e^{-t}\, dt = x^{n+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

Почленное интегрирование ряда (1) законно, потому что обынтегрированный ряд мажорируется величиной $x^{n+\alpha}e^{-x}$. Таким образом, имеем тождество

$$x^{n+\alpha} e^{-x} = \int_0^\infty (\sqrt{xt}\,)^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}\,)\, e^{-t}\, dt. \tag{2}$$

Далее, из формулы (1) имеем

$$u^{p/2} J_p(2\sqrt{u}\,) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{k+p}}{k!\,\Gamma(k+p+1)}.$$

Дифференцируя обе части по u, находим

$$[u^{p/2} J_p(2\sqrt{u}\,)]' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+p) u^{k+p-1}}{k!\,\Gamma(k+p+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{k+p-1}}{k!\,\Gamma(k+p)} = u^{(p-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{k+(p-1)/2}}{k!\,\Gamma(k+p)} =$$

$$= u^{(p-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\sqrt{u}/2)^{2k+p-1}}{k!\,\Gamma(k+p)} = u^{(p-1)/2} J_{p-1}(2\sqrt{u}\,).$$

Таким образом, справедливо тождество

$$[u^{p/2} J_p(2\sqrt{u}\,)]' = u^{(p-1)/2} J_{p-1}(2\sqrt{u}\,). \tag{3}$$

В интеграле (2) полагаем $xt = u$. Дифференцируем тождество (2) по x и используем формулу (3). В результате получаем

$$\bigl(x^{n+\alpha} e^{-x}\bigr)'_x = \int_0^{\infty} \bigl[(\sqrt{xt}\,)^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}\,)\bigr]'_u u'_x e^{-t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} (\sqrt{xt}\,)^{n+\alpha-1} J_{n+\alpha-1}(2\sqrt{xt}\,) t e^{-t}\,dt.$$

Повторив эту операцию n раз, находим равенство

$$(x^{n+\alpha} e^{-x})^{(n)} = \int_0^{\infty} (\sqrt{xt}\,)^{\alpha} J_\alpha(2\sqrt{xt}\,) t^n e^{-t}\,dt.$$

Следовательно, в силу формулы Родрига (1.3) для стандартизованных многочленов Чебышева–Лагерра при $x > 0$ имеем интегральное представление

$$L_n(x;\alpha) = \frac{1}{n!}\, e^x x^{-\alpha/2} \int_0^{\infty} t^{n+\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{xt}\,)\, e^{-t}\,dt. \tag{4}$$

Для получения дальнейших результатов рассмотрим функции Бесселя при $\alpha = \pm 1/2$. В силу формулы (1) имеем

$$J_{1/2}(x) = \Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+3/2)}.$$

Далее применяем формулу удвоения для гамма-функции (IV.4.18)

$$2^{2k+1}\Gamma(k+1)\,\Gamma\Big(k+1+\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2k+2).$$

В результате получаем

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{5}$$

Аналогично, имеем

$$J_{-1/2}(x) = \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+1/2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(k-1)!\,2^{2k-1}\Gamma(k+1/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)\Gamma(2k)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{6}$$

Далее, из формулы (4), учитывая (6), находим

$$L_n\Big(x;-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{n!}\,e^x x^{1/4}\int_0^{\infty} t^{n-1/4}\sqrt{\frac{2}{\pi 2\sqrt{xt}}}\cos(2\sqrt{xt}\,)\,e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{2e^x}{n!\,\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^{2n}\cos(2u\sqrt{x})\,du.$$

Последний интеграл встречается в интегральном представлении многочленов Чебышева–Эрмита (V.2.3). Следовательно, имеем формулу

$$L_n\Big(x;-\frac{1}{2}\Big) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n}}H_{2n}(\sqrt{x}\,). \tag{7}$$

Аналогично, из формулы (4), учитывая (5), получаем

$$L_n\Big(x;\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{n!}\,e^x x^{-1/4}\int_0^{\infty} t^{n+1/4}\Big(\frac{1}{\pi\sqrt{xt}}\Big)^{1/2}\sin(2\sqrt{xt}\,)\,e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{e^x}{n!\,\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} t^n\sin(2\sqrt{xt}\,)\,e^{-t}\,dt = \frac{2e^x}{n!\,\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} u^{2n+1}\sin(2u\sqrt{x}\,)\,e^{-u^2}\,du.$$

А затем, используя интегральное представление многочленов Чебышева–Эрмита (V.2.4), находим

$$L_n\Big(x;\frac{1}{2}\Big) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n+1}\sqrt{x}}\,H_{2n+1}(\sqrt{x}\,). \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) устанавливают связь между многочленами Чебышева–Эрмита и многочленами Чебышева–Лагерра при $\alpha = \pm 1/2$.

Рассмотрим еще одно интегральное представление многочленов Чебышева–Лагерра. Докажем, что при $\alpha > -1/2$ справедлива формула

$$L_n(x;\alpha) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} H_{2n}(t\sqrt{x}\,)\,dt. \qquad (9)$$

В самом деле, используя формулу (V.1.23) для многочленов Чебышева–Эрмита

$$H_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!}{k!\,(2n-2k)!}\,(2x)^{2n-2k},$$

интеграл (9) представляем в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!\,2^{2n-2k}}{k!\,(2n-2k)!}\,x^{n-k} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2}\,t^{2n-2k}\,dt. \qquad (10)$$

Для вычисления полученных интегралов (10) применим известную бета-функцию Эйлера [IV.1, IV.5] и ее представление через гамма-функцию

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad p>0, \quad q>0. \qquad (11)$$

С помощью этого равенства для интегралов (10) находим

$$2\int\limits_0^1 (1-t^2)^{\alpha-1/2}\,t^{2n-2k}\,dt = \int\limits_0^1 (1-x)^{\alpha-1/2} x^{n-k-1/2}\,dx =$$
$$= B\Big(n-k+\frac{1}{2},\,\alpha+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(n-k+1/2)\,\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(n-k+\alpha+1)}.$$

Таким образом, вся правая часть (9) имеет вид

$$\frac{(-1)^n\,\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!\,2^{2n-2k}\,\Gamma(n-k+1/2)\,\Gamma(\alpha+1/2)}{k!\,(2n-2k)!\,\Gamma(n-k+\alpha+1)}\,x^{n-k} =$$
$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2n-2k}\,\Gamma(n-k+1/2)}{k!\,(2n-2k)!\,\Gamma(n-k+\alpha+1)}(-x)^{n-k}. \qquad (12)$$

Далее, из формулы удвоения для гамма-функции (IV.4.18)

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

полагая в ней $z = n-k+1/2$, получим

$$\frac{2^{2n-2k}\,\Gamma(n-k+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n-2k+1)} = \frac{1}{\Gamma(n-k+1)}.$$

Следовательно, для правой части равенства (12), учитывая формулу (1.35), находим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^{n-k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(n-k+\alpha+1)} = \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^m}{(n-m)!\,m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} = L_n(x;\alpha).$$

Таким образом, равенство (9) доказано.

Докажем теперь, что для многочленов Чебышева–Лагерра имеет место интегральное уравнение

$$x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n(x;\alpha)=\frac{(-1)^n}{2}\int\limits_0^\infty e^{-y/2}y^{\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{xy}\,)L_n(y;\alpha)\,dy. \tag{13}$$

В самом деле, из формулы производящей функции (1.14) в силу формулы Коши для коэффициентов ряда Тейлора находим

$$L_n(y;\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{\exp(-yw/(1-w))}{(1-w)^{\alpha+1}w^{n+1}}\,dw,\qquad \rho<1. \tag{14}$$

Умножим это равенство почленно на произведение

$$\exp\Bigl(-\frac{y}{2}\Bigr)y^{\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{xy}\,)$$

и проинтегрируем почленно по интервалу $(0,\infty)$. В результате слева получим интеграл (13). Обозначим этот интеграл через $A_n(x)$. А справа получится повторный интеграл, т. е. имеем равенство

$$A_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\exp\Bigl(-\frac{y}{2}\Bigr)y^{\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{xy}\,)\biggl[\int\limits_{|w|=\rho}\frac{\exp(-yw/(1-w))}{(1-w)^{\alpha+1}w^{n+1}}\,dw\biggr]dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{(1-w)^{-\alpha-1}}{w^{n+1}}\biggl[\int\limits_0^\infty e^{-qy}y^{\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{xy}\,)\,dy\biggr]dw. \tag{15}$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$q=\frac12+\frac{w}{1-w}=\frac{1+w}{2(1-w)}. \tag{16}$$

В силу неравенства

$$\operatorname{Re}q=\frac12\operatorname{Re}\frac{1+\rho e^{i\varphi}}{1-\rho e^{i\varphi}}=\frac12\operatorname{Re}\frac{(1+\rho e^{i\varphi})(1-\rho e^{-i\varphi})}{(1-\rho e^{i\varphi})(1-\rho e^{-i\varphi})}=$$

$$=\frac12\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\geqslant\frac12\,\frac{1-\rho^2}{(1+\rho)^2}=\frac12\,\frac{1-\rho}{1+\rho}>0$$

внутренний интеграл в формуле (15) сходится равномерно при $|w|=$ $=\rho<1$. Поэтому перемена порядка интегрирования в формуле (15) законна. Внутренний интеграл обозначим через $B(x)$. Сделаем в нем замену переменного интегрирования по формуле $y=4t/x$. В результате имеем

$$B(x)=\int\limits_0^\infty e^{-qy}y^{\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{xy}\,)\,dy=\Bigl(\frac{4}{x}\Bigr)^{\alpha/2+1}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{t}\,)e^{-pt}\,dt, \tag{17}$$

где введено обозначение

$$p = \frac{4q}{x} = \frac{2}{x}\,\frac{1+w}{1-w}. \qquad (18)$$

Интеграл (17) есть преобразование Лапласа функции $t^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{t}\,)$. В силу известных результатов [VII.4] имеем операционное равенство

$$t^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{t}\,) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt}t^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{t}\,)\,dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\exp\Big(-\frac{1}{p}\Big). \qquad (19)$$

Следовательно, из (15), учитывая (16) и (18), получаем

$$A_n(x) = \Big(\frac{4}{x}\Big)^{\alpha/2+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{\exp(-1/p)}{(1-w)^{\alpha+1}w^{n+1}p^{\alpha+1}}\,dw =$$

$$= \Big(\frac{4}{x}\Big)^{\alpha/2+1}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\alpha+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}(1+w)^{-\alpha-1}\exp\Big[-\frac{x(1-w)}{2(1+w)}\Big]\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Заменяя в этом интеграле w на $-w$, находим

$$A_n(x) = 2x^{\alpha/2}(-1)^n e^{-x/2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}(1-w)^{-\alpha-1}\exp\Big(-\frac{xw}{1-w}\Big)\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

В силу (14) последний интеграл равен $2\pi i L_n(x;\alpha)$. Следовательно, имеем равенство

$$A_n(x) = 2(-1)^n e^{-x/2}x^{\alpha/2}L_n(x;\alpha).$$

Таким образом, формула (13) доказана.

§ 3. Асимптотические свойства

В настоящем параграфе метод Лиувилля–Стеклова применяется к многочленам Чебышева–Лагерра.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$u = e^{-x/2}L_n(x;\alpha). \qquad (1)$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xu'' + (\alpha+1)u' + \Big(n + \frac{\alpha+1}{2}\Big)u = \frac{x}{4}\,u. \qquad (2)$$

В самом деле, вычисляя производные, находим

$$u' = -\frac{1}{2}\,e^{-x/2}L_n(x;\alpha) + e^{-x/2}L_n'(x;\alpha),$$

$$u'' = \frac{1}{4}\,e^{-x/2}L_n(x;\alpha) - e^{-x/2}L_n'(x;\alpha) + e^{-x/2}L_n''(x;\alpha).$$

Подставляем эти производные в уравнение (2). После опускания экспоненциального множителя, получаем

$$\frac{x}{4}L_n(x;\alpha) - xL_n'(x;\alpha) + xL_n''(x;\alpha) - \frac{\alpha+1}{2}L_n(x;\alpha) + \\ + (\alpha+1)L_n'(x;\alpha) + \left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)L_n(x;\alpha) = \frac{x}{4}L_n(x;\alpha).$$

Дальнейшие сокращения приводят это равенство к тождеству (1.32). Следовательно, функция (1) действительно является решением уравнения (2). При этом в силу равенства (1.37) это решение удовлетворяет условию

$$u(0) = L_n(0;\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3}$$

Далее, для применения метода Лиувилля–Стеклова необходимо сначала найти два линейно независимых частных решения однородного уравнения

$$xu'' + (\alpha+1)u' + Nu = 0, \tag{4}$$

где для краткости введено обозначение

$$N = n + \frac{\alpha+1}{2}. \tag{5}$$

Докажем, что одно из частных решений имеет вид

$$u_1(x) = (\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,), \tag{6}$$

где $J_\alpha(x)$ есть, как обычно, *функция Бесселя первого рода порядка* α [IV.2, IV.5, IV.6]:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k+\alpha}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}. \tag{7}$$

В самом деле, вычисляя производные функции (6), находим

$$u_1'(x) = (\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}\left[-\frac{\alpha}{2x}J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) + \sqrt{\frac{N}{x}}\,J_\alpha'(2\sqrt{Nx}\,)\right],$$

$$u_1''(x) = (\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}\left[\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\frac{1}{x^2}J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) - \right. \\ \left. - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{N}{x}}\,\frac{1}{x}J_\alpha'(2\sqrt{Nx}\,) + \frac{N}{x}J_\alpha''(2\sqrt{Nx}\,)\right].$$

Подставляем функцию (6) и ее производные в уравнение (4). Умножаем это уравнение на $4x(\sqrt{Nx}\,)^\alpha$. В результате имеем

$$4\,\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) - 4\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\sqrt{Nx}\,J_\alpha'(2\sqrt{Nx}\,) + \\ + 4Nx\,J_\alpha''(2\sqrt{Nx}\,) + 4(\alpha+1)\left[-\frac{\alpha}{2}J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) + \sqrt{Nx}\,J_\alpha'(2\sqrt{Nx}\,)\right] + \\ + 4Nx\,J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) = 0.$$

После подстановки $t = 2\sqrt{Nx}$ это уравнение превращается в уравнение Бесселя

$$t^2 J''_\alpha(t) + tJ'_\alpha(t) + (t^2 - \alpha^2)J_\alpha(t) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, функция (6) является решением уравнения (4). Если α — нецелое число, то в качестве второго линейно независимого от (6) решения можно взять функцию

$$u_2(x) = (\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha} J_{-\alpha}(2\sqrt{Nx}\,). \tag{9}$$

При нецелом α функции Бесселя $J_\alpha(x)$ и $J_{-\alpha}(x)$ линейно независимы [IV.2, IV.5, IV.6]. Если же α — целое число, то вместо функции (9) можно рассмотреть функцию

$$u_2(x) = (\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha} Y_\alpha(2\sqrt{Nx}\,), \tag{10}$$

где $Y_\alpha(x)$ — функция Бесселя второго рода, которая, как известно, линейно независима от функции $J_\alpha(x)$.

Таким образом, имея два линейно независимых решения уравнения (4), уже можно применять формулу Лиувилля (IV.4.3), но сначала необходимо вычислить разность в знаменателе дроби под знаком интеграла (IV.4.3). Используя формулы (6) и (9), находим

$$\begin{aligned} &u'_1(t)u_2(t) - u'_2(t)u_1(t) = \\ &\quad = (Nt)^{-\alpha}\Big[-\frac{\alpha}{2t}\, J_\alpha(2\sqrt{Nt}\,) + \sqrt{\frac{N}{t}}\, J'_\alpha(2\sqrt{Nt}\,)\Big] J_{-\alpha}(2\sqrt{Nt}\,) - \\ &\quad - (Nt)^{-\alpha}\Big[-\frac{\alpha}{2t}\, J_{-\alpha}(2\sqrt{Nt}\,) + \sqrt{\frac{N}{t}}\, J'_{-\alpha}(2\sqrt{Nt}\,)\Big] J_\alpha(2\sqrt{Nt}\,) = \\ &= (Nt)^{-\alpha}\sqrt{\frac{N}{t}}\,[J'_\alpha(2\sqrt{Nt}\,)J_{-\alpha}(2\sqrt{Nt}\,) - J'_{-\alpha}(2\sqrt{Nt}\,)J_\alpha(2\sqrt{Nt}\,)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Далее, в теории бесселевых функций доказываются формулы

$$J'_\alpha(x)J_{-\alpha}(x) - J'_{-\alpha}(x)J_\alpha(x) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi x}, \tag{12}$$

$$J'_\alpha(x)Y_\alpha(x) - Y'_\alpha(x)J_\alpha(x) = -\frac{2}{\pi x}. \tag{13}$$

При этом формула (12) справедлива при нецелых α, а формула (13) — при целых α. Следовательно, имеем формулу

$$u'_1(t)u_2(t) - u'_2(t)u_1(t) = (Nt)^{-\alpha}\sqrt{\frac{N}{t}}\,\frac{2\sin\alpha\pi}{2\pi\sqrt{Nt}} = \frac{\sin\alpha\pi}{(Nt)^\alpha \pi t}. \tag{14}$$

Эта формула справедлива при нецелом α, а при целом α вместо $\sin\alpha\pi$ следует поставить -1.

Теперь в силу формулы (IV.4.3) общее решение уравнения (2) можно представить в виде

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \\ + \frac{\pi N^\alpha}{4\sin\alpha\pi}\int\limits_{x_0}^{x} t^{\alpha+1}[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)]u(t)\,dt. \quad (15)$$

В этой формуле c_1, c_2 и x_0 суть произвольные постоянные. Их надо выбрать таким образом, чтобы вместо $u(t)$ можно было поставить частное решение (1), удовлетворяющее условию (3). Для определения этих постоянных воспользуемся известными свойствами функций Бесселя [IV.2, IV.5, IV.6]. Если $x \to 0$, то справедливы асимптотические формулы

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\,[1 + O(x^2)], \quad (16)$$

$$Y_\alpha(x) = -\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha)}{\pi x^\alpha}\,[1 + O(x)], \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \quad (17)$$

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{x}\,[1 + O(x)]. \quad (18)$$

Первая из этих формул получается из разложения (7), а остальные — из соответствующих разложений функций Бесселя второго рода.

Предположим теперь, что в формуле (15) вместо $u(x)$ поставлена функция (1). Тогда в этой формуле можно положить $x_0 = 0$, и при $x > 0$ интеграл (15) будет существовать в крайнем случае как несобственный. В самом деле, при нецелом α введем для краткости обозначение

$$F(x,t) = J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,)J_{-\alpha}(2\sqrt{Nt}\,) - J_\alpha(2\sqrt{Nt}\,)J_{-\alpha}(2\sqrt{Nx}\,). \quad (19)$$

Тогда третье слагаемое в формуле (15) представляется в виде

$$A_n(x) = \frac{\pi N^\alpha}{4\sin\alpha\pi}\int\limits_0^x \frac{F(x,t)t^{\alpha+1}}{N^\alpha(\sqrt{xt}\,)^\alpha}\,e^{-t/2}L_n(t;\alpha)\,dt. \quad (20)$$

Далее, в силу формулы (16) имеем оценку

$$|F(x,t)| \leqslant c_3\,[(\sqrt{Nx}\,)^\alpha(\sqrt{Nt}\,)^{-\alpha} + (\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}(\sqrt{Nt}\,)^\alpha] = \\ = c_3\Big[\Big(\sqrt{\frac{x}{t}}\Big)^\alpha + \Big(\sqrt{\frac{t}{x}}\Big)^\alpha\Big]. \quad (21)$$

Следовательно, интеграл (20) действительно существует. Таким образом, равенство (15) можно представить в виде

$$e^{-x/2}L_n(x;\alpha) = \\ = c_1(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) + c_2(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}J_{-\alpha}(2\sqrt{Nx}\,) + A_n(x). \quad (22)$$

Если в этой формуле устремить x к нулю, то при $\alpha > 0$ все слагаемые, кроме второго слагаемого в правой части, будут ограничены. А второе слагаемое в силу формулы (16) возрастает неограниченно при $x \to 0$. Следовательно, при $\alpha > 0$ в формуле (22) необходимо положить $c_2 = 0$. Аналогичный вывод следует и при целых α, ибо в этом случае второе слагаемое возрастает в силу равенств (17) или (18). Таким образом, при $\alpha \geqslant 0$ вместо (22) имеем равенство

$$e^{-x/2} L_n(x;\alpha) = c_1(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha} J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) + A_n(x). \tag{23}$$

Переходя к пределу при $x \to 0$ из этого равенства в силу (3) и (16) находим

$$c_1 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{24}$$

Следовательно, при $\alpha \geqslant 0$ имеем формулу

$$e^{-x/2} L_n(x;\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\,(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha} J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) + A_n(x). \tag{25}$$

Докажем, что формула (25) справедлива и при $-1 < \alpha < 0$. Для этого сначала оценим интеграл $A_n(x)$ при $x \to 0$. Так как n фиксировано, то из равенства (20), используя оценку (21), находим

$$|A_n(x)| \leqslant c_4 \int\limits_0^x t\Big(\sqrt{\frac{t}{x}}\Big)^\alpha \Big[\Big(\sqrt{\frac{x}{t}}\Big)^\alpha + \Big(\sqrt{\frac{t}{x}}\Big)^\alpha\Big]\,dt =$$

$$= c_4\Bigg[\int\limits_0^x t\,dt + \int\limits_0^x t\Big(\frac{t}{x}\Big)^\alpha dt\Bigg] \leqslant c_5 x^2. \tag{26}$$

Предположим теперь, что в формуле (22) коэффициент c_1 определяется равенством (24). Тогда в силу (3) и (16) из (22), учитывая оценку (26), находим равенство

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\,[1+O(x)] =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\,[1+O(x)] + c_2(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha} J_{-\alpha}(2\sqrt{Nx}\,) + O(x^2).$$

Отсюда следует оценка

$$c_2(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha} J_{-\alpha}(2\sqrt{Nx}\,) = O(x), \qquad x \to 0.$$

Но ведь асимптотика функций Бесселя при малых x определяется формулой (16), с помощью которой последняя оценка приводится к виду

$$c_2\,\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,(Nx)^{-\alpha} = O(x).$$

А при $c_2 \neq 0$ это невозможно, ибо $-1 < \alpha < 0$. Следовательно, $c_2 = 0$. Таким образом, формула (25) справедлива при условии $\alpha > -1$.

Из формулы (25) получаются наиболее важные асимптотические свойства многочленов Чебышева–Лагерра.

Теорема 6.1. *Если* $\alpha + 1/2 \geqslant 0$, *то при всех* $x \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2}\, |L_n(x;\alpha)| \leqslant c_6 n^{\alpha/2-1/4}\, [1 + O(n^{-1/4} x^{5/4})]. \qquad (27)$$

Доказательство. Сначала установим это неравенство на малом сегменте $[0, 1/N]$. Введем обозначение

$$M_n = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1/N} \exp\Bigl(-\frac{x}{2}\Bigr) |L_n(x;\alpha)|. \qquad (28)$$

Оценим эту величину. Пусть сначала α — нецелое число. Используя формулу (16) и оценку (21), из равенства (25) находим

$$\exp\Bigl(-\frac{x}{2}\Bigr) |L_n(x;\alpha)| \leqslant c_7 n^\alpha + |A_n(x)| \leqslant \\ \leqslant c_7 n^\alpha + c_8 M_n x^2 \leqslant c_7 n^\alpha + \frac{c_8}{N^2} M_n, \qquad x \in \Bigl[0, \frac{1}{N}\Bigr].$$

Следовательно, имеем неравенство

$$M_n \Bigl(1 - \frac{c_8}{N^2}\Bigr) \leqslant c_7 n^\alpha,$$

из которого следует оценка

$$M_n \leqslant c_9 n^\alpha. \qquad (29)$$

Далее, при $x \in [0, 1/N]$ для левой части неравенства (27), учитывая обозначение (5), получим

$$x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2} |L_n(x;\alpha)| \leqslant x^{\alpha/2+1/4} M_n \leqslant c_{10} n^{\alpha/2-1/4}.$$

Таким образом, неравенство (27) для сегмента $[0, 1/N]$ установлено, причем здесь мы воспользовались условием $\alpha + 1/2 \geqslant 0$.

Далее, для функций Бесселя при $x \to \infty$ известны асимптотические формулы

$$J_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\Bigl(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr) + O\Bigl(\frac{1}{x^{3/2}}\Bigr), \qquad (30)$$

$$Y_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\Bigl(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr) + O\Bigl(\frac{1}{x^{3/2}}\Bigr). \qquad (31)$$

В этих формулах постоянные в оценке остаточных членов можно выбрать общими для всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant a > 0$. Если $x \geqslant 1/N$, то $2\sqrt{Nx} \geqslant 2$. Следовательно, при таких x из формул (30) и (31) получаются неравенства

$$|J_\alpha(2\sqrt{Nx})| \leqslant c_{11} (Nx)^{-1/4}, \qquad |Y_\alpha(2\sqrt{Nx})| \leqslant c_{12} (Nx)^{-1/4}. \qquad (32)$$

Переходим теперь к доказательству оценки (27) для $x \geqslant 1/N$. Из формулы (25) имеем

$$x^{\alpha/2+1/4}e^{-x/2}L_n(x;\alpha) = \\ = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}(\sqrt{Nx}\,)^{-\alpha}x^{\alpha/2+1/4}J_\alpha(2\sqrt{Nx}\,) + x^{\alpha/2+1/4}A_n(x). \quad (33)$$

В силу формулы (IV.7.18) и первой из оценок (32) первое слагаемое справа в формуле (33) по абсолютному значению не превосходит некоторой постоянной, умноженной на величину $n^{\alpha/2-1/4}$. И остается оценить второе слагаемое. Интеграл $A_n(x)$, определяемый равенством (20), представим в виде суммы двух интегралов по сегментам $[0, 1/N]$ и $[1/N, x]$. Для первого из них, используя (29), находим

$$\left|A_n\Big(x; 0, \frac{1}{N}\Big)\right| \leqslant c_{13}\int\limits_0^{1/N}\frac{|F(x,t)|}{(\sqrt{xt}\,)^\alpha}\,t^{\alpha+1}e^{-t/2}\,|L_n(t;\alpha)|\,dt \leqslant \\ \leqslant c_{14}\,n^\alpha\int\limits_0^{1/N} t\Big(\sqrt{\frac{t}{x}}\Big)^\alpha|F(x,t)|\,dt. \quad (34)$$

Далее из равенства (19), используя (16) и (32), находим

$$|F(x,t)| \leqslant c_{15}(Nx)^{-1/4}[(\sqrt{Nt}\,)^{-\alpha} + (\sqrt{Nt}\,)^\alpha], \qquad x \geqslant 1/N.$$

С помощью этой оценки из неравенства (34) получаем

$$\left|A_n\Big(x; 0, \frac{1}{N}\Big)\right| \leqslant \frac{c_{16}n^{\alpha-1/4}}{x^{\alpha/2+1/4}}\int\limits_0^{1/N} t(\sqrt{t}\,)^\alpha[(\sqrt{Nt}\,)^{-\alpha} + (\sqrt{Nt}\,)^\alpha]\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{17}n^{\alpha-1/4}}{x^{\alpha/2+1/4}}\left[\frac{1}{N^{\alpha/2}}\int\limits_0^{1/N} t\,dt + N^{\alpha/2}\int\limits_0^{1/N} t^{1+\alpha}\,dt\right] \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{18}n^{\alpha-1/4}}{x^{\alpha/2+1/4}}\Big(\frac{1}{N^{\alpha/2+2}} + \frac{1}{N^{\alpha/2+2}}\Big) \leqslant \frac{c_{19}n^{\alpha/2-9/4}}{x^{\alpha/2+1/4}}. \quad (35)$$

Аналогично рассматривается случай целых α.

Для второго интеграла, используя неравенство

$$|F(x,t)| \leqslant c_{20}N^{-1/2}(xt)^{-1/4}, \qquad t \geqslant \frac{1}{N}, \quad x \geqslant \frac{1}{N}, \quad (36)$$

находим

$$\left|A_n\Big(x; \frac{1}{N}, x\Big)\right| \leqslant \frac{c_{21}N^{-1/2}}{x^{\alpha/2+1/4}}\int\limits_{1/N}^{x} t^{\alpha/2+3/4}e^{-t/2}|L_n(t;\alpha)|\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{22}N^{-1/2}}{x^{\alpha/2+1/4}}\left[\int\limits_0^x t^{3/2}\,dt\right]^{1/2}\left[\int\limits_0^x t^\alpha e^{-t}|L_n(t;\alpha)|^2\,dt\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{23}x^{5/4}}{\sqrt{N}x^{\alpha/2+1/4}}\left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\right]^{1/2} \leqslant \frac{c_{24}}{x^{\alpha/2+1/4}}\, n^{\alpha/2-1/2}x^{5/4}. \quad (37)$$

Здесь дробь в квадратных скобках оценена с помощью формулы (IV.7.18). Подставляя оценки (35) и (37) в правую часть равенства (33), получаем неравенство (27). Этим теорема 6.1 доказана.

А теперь рассмотрим основной результат об асимптотическом поведении многочленов Чебышева–Лагерра на конечном сегменте.

Теорема 6.2. *Если $\alpha > -1$, то при конечном положительном x для многочленов Чебышева–Лагерра имеет место асимптотическая формула*

$$L_n(x;\alpha) = \lambda_n e^{x/2}x^{-\alpha/2-1/4}\,[\cos(2\sqrt{Nx}-\beta\pi)+R_n(x)], \quad (38)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\sqrt{\pi}\,(\sqrt{N}\,)^{\alpha+1/2}}, \qquad N = n+\frac{\alpha+1}{2}, \quad \beta = \frac{2\alpha+1}{4}, \quad (39)$$

а остаточный член $R_n(x)$ на всяком конечном сегменте $[a,b]$ при любых фиксированных a и b, удовлетворяющих условию

$$0 < a < b < \infty, \quad (40)$$

допускает равномерную оценку

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{c_{25}(a,b)}{\sqrt{n}}, \qquad x\in[a,b]. \quad (41)$$

Доказательство. Поскольку формула (25) справедлива при всяком $\alpha > -1$, то можно применить асимптотическое представление функции Бесселя (30). В результате получаем

$$\exp\Bigl(-\frac{x}{2}\Bigr)L_n(x;\alpha) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,(\sqrt{Nx}\,)^{\alpha}}\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi\sqrt{Nx}}}\cos(2\sqrt{Nx}-\beta\pi)+O[(Nx)^{-3/4}]\right\} + A_n(x) =$$

$$= \lambda_n x^{-\alpha/2-1/4}\left[\cos(2\sqrt{Nx}-\beta\pi)+O\Bigl(\frac{1}{\sqrt{Nx}}\Bigr)+\frac{1}{\lambda_n}\,x^{\alpha/2+1/4}A_n(x)\right]. \quad (42)$$

Таким образом, остается оценить величину $A_n(x)$, которая определяется формулой (20). Но эта величина уже оценивалась в доказательстве теоремы 6.1. Так как здесь выполняется условие $x \geqslant a > 0$, то интеграл (20) можно представить в виде суммы двух интегралов по сегментам $[0, 1/N]$ и $[1/N, x]$. Для первого из них имеем оценку (35). С другой стороны, для коэффициента λ_n, определяемого первой из формул (39), в силу формулы (IV.7.18) имеем неравенство

$$c_{26}n^{\alpha/2-1/4} \leqslant \lambda_n \leqslant c_{27}n^{\alpha/2-1/4}. \quad (43)$$

Поэтому необходимая оценка для частного

$$\frac{1}{\lambda_n} A_n\Big(x; 0, \frac{1}{N}\Big)$$

в силу условия $x \in [a, b]$ очевидна.

Для оценки второго интеграла используем неравенства (27) и (36). В результате имеем

$$\Big|A_n\Big(x; \frac{1}{N}, x\Big)\Big| \leqslant \frac{c_{28}}{(\sqrt{x}\,)^\alpha} \int\limits_{1/N}^{x} |F(x,t)|\, t^{\alpha/2+1} e^{-t/2}\, |L_n(t;\alpha)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{29}\, n^{\alpha/2-1/4}}{(\sqrt{x}\,)^\alpha \sqrt{N}\, x^{1/4}} \int\limits_{1/N}^{x} \sqrt{t}\ [1 + O(n^{-1/4} t^{5/4})]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{30} n^{\alpha/2-3/4} x^{-\alpha/2-1/4} (x^{3/2} + n^{-1/4} x^{11/4}). \quad (44)$$

Далее, учитывая левую часть неравенства (43), находим необходимую оценку всего третьего слагаемого в квадратных скобках (42). Этим оценка (41) остаточного члена формулы (38) установлена. И теорема 6.2 доказана.

Но на самом деле здесь установлена более содержательная оценка для остаточного члена при возрастающем x. А именно, из (35), (42) и (44), учитывая (43), имеем

$$R_n(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt{nx}}\Big) + O\Big(\frac{x^{3/2}}{\sqrt{n}}\Big) + O(n^{-3/4} x^{11/4}), \qquad x \geqslant a. \quad (45)$$

Асимптотическую формулу (38) нетрудно привести к обычному виду, в каком она встречается в некоторых учебных пособиях и справочниках.

Т е о р е м а 6.3. *При $\alpha > -1$ имеет место формула*

$$L_n(x;\alpha) = \pi^{-1/2} e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \Big[\cos(2\sqrt{nx} - \beta\pi) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big],$$
$$x \in [a, b], \quad 0 < a < b < \infty. \quad (46)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, имеем равенство

$$\cos(2\sqrt{Nx} - \beta\pi) - \cos(2\sqrt{nx} - \beta\pi) =$$
$$= -2\sin(\sqrt{Nx} + \sqrt{nx} - \beta\pi)\sin(\sqrt{N} - \sqrt{n}\,)\sqrt{x} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Поэтому остается доказать формулу

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,(\sqrt{N}\,)^{\alpha+1/2}} = n^{\alpha/2-1/4}\Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]. \quad (47)$$

Используя формулу (IV.7.18) и обозначение (5), находим

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,(\sqrt{N}\,)^{\alpha+1/2}} = n^{\alpha}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]\frac{1}{(n+(\alpha+1)/2)^{\alpha/2+1/4}} =$$
$$= \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha/2+1/4}}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]\Big(1+\frac{\alpha+1}{2n}\Big)^{-\alpha/2-1/4} =$$
$$= n^{\alpha/2-1/4}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] = n^{\alpha/2-1/4}\Big[1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Таким образом, формула (47) установлена. И теорема 6.3 доказана.

А теперь отметим некоторые важные следствия соотношений (27), (38) и (45). Будем считать, что x и n удовлетворяют условию $0 \leqslant x^5 \leqslant n$. Тогда второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (27) ограничено. Следовательно, из (27) имеем неравенство

$$\begin{gathered} x^{\alpha/2+1/4}e^{-x/2}|L_n(x;\alpha)| \leqslant c_{31}n^{\alpha/2-1/4}, \qquad x\in[0,A_n], \\ A_n = n^{1/5}, \qquad \alpha+\frac{1}{2}\geqslant 0. \end{gathered} \tag{48}$$

С другой стороны, пусть выполнены условия

$$0 < a \leqslant x \leqslant B_n, \qquad B_n = n^{3/11}. \tag{49}$$

Тогда правая часть (45) ограничена равномерно при $x\in[a,B_n]$. Следовательно, из (38) и (48) имеем

$$\begin{gathered} x^{\alpha/2+1/4}e^{-x/2}|L_n(x;\alpha)| \leqslant c_{32}n^{\alpha/2-1/4}, \qquad x\in[a,B_n], \\ B_n = n^{3/11}, \qquad \alpha\geqslant -\frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{50}$$

Переходя к ортонормированным многочленам Чебышева–Лагерра, в силу формулы (1.8) получим

$$\begin{gathered} x^{\alpha/2+1/4}e^{-x/2}|\widehat{L}_n(x;\alpha)| \leqslant c_{33}n^{-1/4}, \qquad x\in[a,B_n], \\ B_n = n^{3/11}, \qquad \alpha\geqslant -\frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{51}$$

Таковы *весовые оценки для многочленов Чебышева–Лагерра* на расширяющихся в одну сторону сегментах.

Можно рассмотреть случаи, когда сегменты расширяются и в левую сторону. В самом деле, рассмотрим сегмент $[1/N, B_n]$. В этом случае $Nx \geqslant 1$. Следовательно, в формуле (33) первое слагаемое не превосходит величины $c_{34}n^{\alpha/2-1/4}$. А остальная часть рассуждений проводится при условии $1 \geqslant x \geqslant 1/N$. Поэтому оценки (35) и (37) справедливы. И второе слагаемое в формуле (33) допускает необходимые оценки. Таким образом, неравенства (50) и (51) распространяются на сегмент $[1/N, B_n]$.

§ 4. Ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра

Будем рассматривать ряды Фурье по стандартизованным многочленам Чебышева–Лагерра.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(0, \infty)$ и входит в пространство

$$L_2 = L_2[0, \infty; x^\alpha e^{-x}],$$

т. е. выполняется условие

$$\|f\|^2 = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} |f(x)|^2\, dx < \infty. \qquad (1)$$

Как обычно, этой функции ставим в соответствие ряд

$$\sum_{n=0}^\infty a_n L_n(x; \alpha), \qquad (2)$$

коэффициенты которого в силу равенства (1.8) определяются формулой

$$a_n(\alpha) = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} f(t) L_n(t; \alpha)\, dt. \qquad (3)$$

Поскольку интервал ортогональности здесь бесконечен, то в целом ситуация аналогична той, которая рассмотрена в § 4 гл. V.

Аналогично общему случаю частичную сумму

$$S_n(x; f) = \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} f(t) \left[\sum_{k=0}^n \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\, L_k(x; \alpha) L_k(t; \alpha)\right] dt \qquad (4)$$

с помощью формулы Кристоффеля–Дарбу (1.22) приводим к виду

$$S_n(x; f) = A_n \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} f(t)\, \frac{\Phi_n(x, t)}{t - x}\, dt, \qquad (5)$$

где для краткости введены обозначения

$$A_n = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}, \qquad (6)$$

$$\Phi_n(x, t) = L_{n+1}(x; \alpha) L_n(t; \alpha) - L_n(x; \alpha) L_{n+1}(t; \alpha). \qquad (7)$$

Далее, как обычно, составляем разность

$$f(x) - S_n(x; f) = A_n \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} \left[-\frac{f(x) - f(t)}{x - t}\right] \Phi_n(x, t)\, dt. \qquad (8)$$

И остается доказать, что правая часть (8) убывает к нулю при выполнении некоторых условий. Но для этого сначала преобразуем разность (7). Из формулы (1.24) имеем два равенства:

$$L_n(x;\alpha) = L_{n+1}(x;\alpha) - L_{n+1}(x;\alpha-1),$$
$$L_n(t;\alpha) = L_{n+1}(t;\alpha) - L_{n+1}(t;\alpha-1).$$

С помощью этих равенств разность (7) приводится к виду

$$\Phi_n(x,t) = L_{n+1}(t;\alpha)L_{n+1}(x;\alpha-1) - L_{n+1}(x;\alpha)L_{n+1}(t;\alpha-1). \quad (9)$$

Подставляя это выражение в формулу (8), находим

$$f(x) - S_n(x;f) = A_n L_{n+1}(x;\alpha-1)\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\varphi_x(t)L_{n+1}(t;\alpha)\,dt - \\ - A_n L_{n+1}(x;\alpha)\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\varphi_x(t)L_{n+1}(t;\alpha-1)\,dt. \quad (10)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\varphi_x(t) = -\frac{f(x)-f(t)}{x-t}. \quad (11)$$

Далее, величину (6) оцениваем с помощью формулы (IV.7.18). Затем, учитывая формулу (3.46), при фиксированном положительном x находим неравенства

$$A_n|L_{n+1}(x;\alpha)| \leqslant c_1 n^{3/4-\alpha/2}, \\ A_n|L_{n+1}(x;\alpha-1)| \leqslant c_2 n^{1/4-\alpha/2}. \quad (12)$$

Следовательно, для того чтобы оба слагаемых в правой части равенства (10) стремились к нулю при $n\to\infty$, достаточно выполнения предельных соотношений

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/4-\alpha/2}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\varphi_x(t)L_{n+1}(t;\alpha-1)\,dt = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/4-\alpha/2}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\varphi_x(t)L_{n+1}(t;\alpha)\,dt = 0. \quad (14)$$

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha > 0$, а для функции $f(t)$, определенной на интервале $(0,\infty)$, существуют интегралы*

$$\int_0^1 t^{\alpha/2-1/4}|f(t)|\,dt, \qquad \int_1^\infty t^{\alpha/2+1/2}e^{-t/2}|f(t)|\,dt. \quad (15)$$

Тогда предельные соотношения (13) и (14) имеют место, если функция $f(t)$ в окрестности фиксированной точки $x\in(0,\infty)$ такова, что вспомогательная функция (11) интегрируема абсолютно.

Доказательство. Считая точку $x \in (0, \infty)$ фиксированной, при условиях $0 < a < x < b < \infty$ интеграл (13) представляем в виде суммы трех интегралов по интервалам

$$(0, a), \quad (a, b), \quad (b, \infty). \tag{16}$$

Далее, формула (3.25) и неравенство (3.29) справедливы при $\alpha > -1$. Следовательно, аналогично (3.29) имеем

$$e^{-t/2}|L_{n+1}(t; \alpha - 1)| \leqslant c_3(n+1)^{\alpha-1}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{N}. \tag{17}$$

Кроме того, при доказательстве оценки (3.27) условие $\alpha + 1/2 \geqslant 0$ использовано только при рассмотрении случая, когда $0 \leqslant x \leqslant 1/N$. А в случае $x \geqslant 1/N$ это условие не использовано. Следовательно, из формулы (3.25) в силу (3.32), (3.35) и (3.37) имеем неравенство

$$t^{(\alpha-1)/2+1/4}e^{-t/2}\,|L_{n+1}(t; \alpha - 1)| \leqslant \\ \leqslant c_4(n+1)^{(\alpha-1)/2-1/4}[1 + O(n^{-1/4}t^{5/4})], \qquad t \geqslant \frac{1}{N}. \tag{18}$$

А теперь рассмотрим интеграл (13) по первому из интервалов (16). Разобьем этот интервал на два интервала:

$$\Delta_n = \left(0, \frac{1}{N}\right), \qquad \sigma_n = \left(\frac{1}{N}, a\right).$$

Используя оценки (17) и (18), получаем

$$\int_0^a t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t; \alpha - 1)|\,dt = \int_{\Delta_n} t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t; \alpha - 1)|\,dt + \\ + \int_{\sigma_n} t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t; \alpha - 1)|\,dt \leqslant c_3(n+1)^{\alpha-1} \int_{\Delta_n} t^\alpha e^{-t/2}\,|\varphi_x(t)|\,dt + \\ + c_5(n+1)^{\alpha/2-3/4} \int_{\sigma_n} t^{\alpha/2+1/4}e^{-t/2}\,|\varphi_x(t)|\,dt.$$

Первый интеграл убывает достаточно быстро в силу условия $0 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant 1/N$. Поэтому для произвольно малого числа ε можно выбрать число a настолько малым, что выполняется неравенство

$$n^{3/4-\alpha/2} \int_0^a t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t; \alpha - 1)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогичным образом с помощью оценки (18) при достаточно больших b получается неравенство

$$n^{3/4-\alpha/2} \int_b^\infty t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t; \alpha - 1)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_6 \int\limits_b^\infty t^{\alpha/2+1/2} e^{-t/2} \left[|f(t)| + |f(x)|\right] dt < \frac{\varepsilon}{3},$$

ибо второй интеграл (15) существует, а при фиксированном x имеем

$$t\,|\varphi_x(t)| \leqslant c_7[|f(t)| + |f(x)|].$$

Все эти рассуждения можно повторить и для интегралов (14). В результате получаются неравенства

$$n^{1/4-\alpha/2} \int\limits_0^a t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t;\alpha)|\,dt \leqslant c_8 \int\limits_0^a t^{\alpha/2-1/4}\,|\varphi_x(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$n^{1/4-\alpha/2} \int\limits_b^\infty t^\alpha e^{-t}\,|\varphi_x(t)|\,|L_{n+1}(t;\alpha)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_9 \int\limits_b^\infty t^{\alpha/2} e^{-t/2} \left[|f(t)| + |f(x)|\right] dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, из трех интервалов (16) остается рассмотреть интегралы по интервалу (a, b), т. е. надо доказать стремление к нулю двух произведений:

$$n^{3/4-\alpha/2} \int\limits_a^b t^\alpha e^{-t} \varphi_x(t) L_{n+1}(t;\alpha-1)\,dt, \tag{19}$$

$$n^{1/4-\alpha/2} \int\limits_a^b t^\alpha e^{-t} \varphi_x(t) L_{n+1}(t;\alpha)\,dt. \tag{20}$$

На сегменте $[a, b]$ многочлен Чебышева–Лагерра можно заменить его асимптотическим представлением по формуле (3.46). В результате каждое из произведений (19) и (20) представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых вторые стремятся к нулю вследствие оценки остаточного члена. А первые, если опустить ограниченные множители, имеют вид

$$\int\limits_a^b t^{\alpha/2+1/4} e^{-t/2} \varphi_x(t) \cos\left[2\sqrt{(n+1)t} - \beta\pi + \frac{\pi}{2}\right] dt, \tag{21}$$

$$\int\limits_a^b t^{\alpha/2-1/4} e^{-t/2} \varphi_x(t) \cos[2\sqrt{(n+1)t} - \beta\pi]\,dt. \tag{22}$$

При фиксированном $x \in (a, b)$ функция $\varphi_x(t)$ по условию абсолютно интегрируема. Поэтому в силу леммы Римана [III.1, III.2] оба интеграла (21) и (22) стремятся к нулю при $n \to \infty$. Этим лемма 6.1 доказана.

Приведем конкретные результаты, основанные на этой лемме.

Теорема 6.4. *Если* $\alpha > 0$, *а функция* $f(t)$ *из класса* $L_1 = L_1[0,\infty; t^\alpha e^{-t}]$ *в окрестности фиксированной точки* $x \in (0,\infty)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x) - f(t)| \leqslant M|x - t|^\gamma, \qquad 0 < \gamma \leqslant 1, \tag{23}$$

и, кроме того, интегралы (15) *существуют, то ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра функции* $f(t)$ *сходится к этой функции в точке* x, *т. е. имеем*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha) L_n(x;\alpha). \tag{24}$$

Доказательство. В силу условия (23) функция $\varphi_x(t)$ интегрируема абсолютно. Поэтому сходимость разложения (24) является следствием формулы (10) и леммы 6.1.

Теорема 6.5. *Если* $-1 < \alpha \leqslant 0$, *а функция* $f(t)$ *из класса* $L_1 = L_1[0,\infty; t^\alpha e^{-t}]$ *в точке* x *удовлетворяет условию* (23) *и, кроме того, существуют интегралы*

$$\int_0^1 t^{\alpha/2-3/4}\, |f(t)|\, dt, \qquad \int_1^\infty t^{\alpha/2} e^{-t/2}\, |f(t)|\, dt, \tag{25}$$

то имеет место разложение (24).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = \frac{f(t)}{t}. \tag{26}$$

Из существования интегралов (25) следует сходимость интегралов

$$\int_0^1 t^{(\alpha+1)/2-1/4}\, |F(t)|\, dt, \qquad \int_1^\infty t^{(\alpha+1)/2+1/2} e^{-t/2}\, |F(t)|\, dt.$$

Следовательно, функция (26) удовлетворяет условиям теоремы 6.4 с заменой α на $\alpha + 1$. Поэтому имеем разложение

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+1, F) L_n(x; \alpha+1). \tag{27}$$

Отсюда с помощью формулы (1.41) находим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+1, F)\, x L_n(x;\alpha+1) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+1, F)\, [(n+\alpha+1) L_n(x;\alpha) - (n+1) L_{n+1}(x;\alpha)] =$$

$$= a_0(\alpha+1, F)(\alpha+1)L_0(x;\alpha) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\alpha+1; F)(n+\alpha+1) - na_{n-1}(\alpha+1, F)]L_n(x;\alpha).$$

Разность в последних квадратных скобках в силу формулы коэффициентов (3) и равенства (1.24) приводится к виду

$$\frac{n!\,(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)}\int_0^{\infty} t^{\alpha+1}e^{-t}\,\frac{f(t)}{t}\,L_n(t;\alpha+1)\,dt -$$
$$- \frac{(n-1)!\,n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^{\infty} t^{\alpha+1}e^{-t}\,\frac{f(t)}{t}\,L_{n-1}(t;\alpha+1)\,dt =$$
$$= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}f(t)L_n(t;\alpha)\,dt = a_n(\alpha, f).$$

Аналогично доказывается равенство

$$a_0(\alpha+1, F)(\alpha+1) = a_0(\alpha, f).$$

Следовательно, разложение (24) установлено и при условии $-1 < \alpha \leqslant 0$. Этим теорема 6.5 доказана.

Равномерная сходимость ряда (24) на некотором сегменте $[A, B]$, где $0 < A < B < \infty$, имеет место в том случае, если оба интеграла (21) и (22) убывают к нулю равномерно относительно $x \in [A, B]$. А в силу известных результатов [III.2, VIII.1, VIII.4] последнее имеет место в том случае, если, например, функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[A-\varepsilon,\ B+\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$.

§ 5. Примеры разложения функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра

Как обычно, первые примеры разложения можно получить из формулы производящей функции (1.14)

$$\frac{1}{(1-w)^{\alpha+1}}\exp\Big(-\frac{wx}{1-w}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x;\alpha)w^n, \qquad |w| < 1. \tag{1}$$

Положим в этой формуле $w = a/(a+1)$. Тогда имеем

$$1-w = \frac{1}{a+1}, \quad -\frac{wx}{1-w} = -ax; \qquad a > -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, из формулы (1) получаем разложение

$$e^{-ax} = \frac{1}{(a+1)^{\alpha+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{a}{a+1}\Big)^n L_n(x;\alpha). \tag{2}$$

Здесь a — действительное число и $a > -1/2$. В частности, при $a = 1$ имеем разложение

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+\alpha+1}} L_n(x;\alpha), \qquad 0 < x < \infty.$$

Далее, умножим равенство (2) на $(a+1)^{\alpha-1}$ и проинтегрируем почленно по параметру a по интервалу $(0,\infty)$. Учитывая равенство

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \frac{da}{(a+1)^2} = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1},$$

находим

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}(a+1)^{\alpha-1}\,da = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x;\alpha)}{n+1}. \tag{3}$$

Докажем, что левая часть (3) выражается через так называемую неполную гамма-функцию Эйлера [IV.1, IV.5]

$$\Gamma(p,A) = \int_A^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt.$$

В самом деле, производя очевидные замены переменного интегрирования, для интеграла из равенства (3) имеем представление

$$e^x \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x}(a+1)^{\alpha-1}\,d(a+1) = e^x \int_1^{\infty} e^{-tx}t^{\alpha-1}\,dt =$$
$$= e^x \int_x^{\infty} e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{d\xi}{x} = e^x x^{-\alpha} \int_x^{\infty} e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi.$$

Таким образом, из (3) находим разложение

$$x^{-\alpha}e^x\Gamma(\alpha,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x;\alpha)}{n+1}, \tag{4}$$

которое сходится при $x > 0$ и $\alpha > -1$. Представленное в виде

$$\Gamma(\alpha,x) = x^{\alpha}e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x;\alpha)}{n+1}$$

оно может служить для вычисления неполной гамма-функции Эйлера.

Рассмотрим теперь функцию $f(x) = x^p$ при $x > 0$. Если $\alpha > 0$, то для существования первого из интегралов (4.15) необходимо, чтобы

параметр p удовлетворял условию

$$p > -\frac{1}{2}\Big(\alpha + \frac{3}{2}\Big).$$

А если $-1 < \alpha \leqslant 0$, то первый из интегралов (4.25) существует при условии

$$p > -\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\Big).$$

Для коэффициентов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра функции $f(x) = x^p$ в силу формулы Родрига имеем представление

$$a_n = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^p (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)}\, dx.$$

Далее, интегрируя по частям n раз, находим

$$a_n = \frac{(-1)^n p(p-1)\ldots(p-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^{p-n} x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx = \\ = \frac{(-1)^n p(p-1)\ldots(p-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\, \Gamma(p+\alpha+1). \quad (5)$$

Следовательно, имеем разложение

$$x^p = \Gamma(p+\alpha+1) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n p(p-1)\ldots(p-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\, L_n(x;\alpha),$$

которое сходится при условиях $0 < x < \infty$ и $\alpha > -1$.

Аналогично вычисляются коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра функции $\varphi(x) = \ln x$. В самом деле, интегрируя по частям, при $n \geqslant 1$ находим

$$a_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} (\ln x) L_n(x;\alpha)\, dx = \\ = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty \ln x\, (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)}\, dx = \\ = -\frac{(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^n}\, x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx = -\frac{(n-1)!\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

А нулевой коэффициент имеет вид

$$a_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x} \ln x\, dx. \quad (6)$$

Нетрудно доказать, что интеграл (6) равен $\Gamma'(\alpha+1)$. Следовательно, вся правая часть (6) есть логарифмическая производная от гамма-функции, которая обычно обозначается через $\Psi(\alpha+1)$. Таким образом, имеем еще одно разложение

$$\ln x = \Psi(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,L_n(x;\alpha), \qquad x>0.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = (xa)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xa}\,), \qquad x>0, \quad a>0, \quad \alpha>-1. \tag{7}$$

Для вычисления коэффициентов разложения

$$a_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{xa}\,)\,e^{-x}L_n(x;\alpha)\,dx \tag{8}$$

воспользуемся формулой (2.14). В этой формуле вместо y подставим x, умножим почленно на произведение

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{xa}\,)e^{-x}$$

и проинтегрируем по интервалу $(0,\infty)$. В результате слева получим интеграл (8), который обозначим через $A_n(a)$, а справа — повторный интеграл, т. е. аналогично формуле (2.15) имеем

$$A_n(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{(1-w)^{-\alpha-1}}{w^{n+1}}\left[\int_0^\infty e^{-qx}\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xa}\,)\,dx\right]dw. \tag{9}$$

Перестановка интегралов законна, ибо здесь

$$\operatorname{Re} q = \operatorname{Re}\frac{1}{1-w} = \frac{1-u}{(1-u)^2+v^2} > 0.$$

Аналогично формуле (2.17) внутренний интеграл (9) преобразуем подстановкой $ax=t$. Полагая для краткости $ap=q$ и учитывая операционное равенство (2.19), находим

$$\int_0^\infty e^{-qx}\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xa}\,)\,dx = a^{-\alpha-1}\int_0^\infty e^{-pt}t^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{t}\,)\,dt =$$
$$= \frac{a^{-\alpha-1}}{p^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{q^{\alpha+1}}\exp[a(w-1)] = (1-w)^{\alpha+1}\exp[a(w-1)].$$

Подставляя это значение в формулу (9), получаем

$$A_n(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{\exp[a(w-1)]}{w^{n+1}}\,dw = \frac{a^n e^{-a}}{n!}.$$

Таким образом, интеграл (8) вычислен и коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра функции (7) имеют вид

$$a_n = \frac{a^n e^{-a}}{\Gamma(n+\alpha+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

И следовательно, для функции (7) имеем разложение

$$(xa)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{xa}\,) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\, L_n(x;\alpha), \tag{10}$$

которое сходится при $x > 0$, $a > 0$ и $\alpha > -1$.

Рассмотрим еще один способ получения разложений по многочленам Чебышева–Лагерра.

Пусть четная функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита, сходящийся равномерно на всяком конечном сегменте, т. е. имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x), \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{11}$$

Тогда, используя представление многочленов Чебышева–Лагерра через многочлены Чебышева–Эрмита (2.9), получим некоторую другую функцию $f(x)$ и ее разложение в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра

$$f(x) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-1/2} \varphi(t\sqrt{x}\,)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x;\alpha). \tag{12}$$

В силу формулы (2.9) коэффициенты разложений (11) и (12) связаны равенством

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!\,\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\, c_{2n}.$$

Все рассмотренные разложения в силу формулы (1.40) можно дифференцировать почленно. В результате после проверки условий сходимости получаются новые разложения функций в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

§ 6. Некоторые дополнения и задачи

Среди трех систем классических ортогональных многочленов многочлены Чебышева–Лагерра наиболее сложные по асимптотическим свойствам и по их рядам Фурье. Это объясняется тем, что эти многочлены ортогональны по бесконечному интервалу, и в этом смысле они аналогичны многочленам Чебышева–Эрмита, а в начале координат их весовая функция имеет особую точку как весовая функция многочленов Якоби на концах сегмента ортогональности. Именно поэтому многочленам Чебышева–Лагерра уделяется наибольшее внимание

в монографии Г. Сегё [I.6]. Этим многочленам посвящено наибольшее число работ. Но все равно свойства многочленов Чебышева–Лагерра изучены значительно менее, чем свойства многочленов Чебышева–Эрмита и Якоби.

1. В § 3 рассматриваются асимптотические свойства многочленов Чебышева–Лагерра, которые получаются методом Лиувилля–Стеклова. Еще раз заметим, что это первоначальные результаты. Дальнейшие результаты изложены в монографии Г. Сегё. В этой монографии различными вариациями метода Лиувилля–Стеклова получено несколько асимптотических формул, в том числе и для многочленов Чебышева–Лагерра. Некоторые асимптотические свойства многочленов Чебышева–Лагерра рассмотрены в работах [XI.42–XI.44].

2. В § 4 изложены первоначальные результаты об условиях сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра. Эти результаты получены простыми методами. В монографии Г. Сегё [I.6] для рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра изложена теорема о равносходимости, которая достаточно полно решает вопрос об условиях сходимости эти рядов. В этой же монографии упоминаются и цитируются многие авторы, которые занимались рядами Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

3. Наиболее существенные результаты о сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра получили Р. Аски и С. Ваингер [XI.42] и Б. Муккенхоупт [XI.44].

4. В § 3 рассмотрено весовое неравенство для многочленов Чебышева–Лагерра на расширяющихся сегментах. Это неравенство было опубликовано в 1976 г. в первом издании настоящей монографии. Неравенство (3.51)

$$x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, |\widehat{L}_n(x;\alpha)| \leqslant \frac{c}{n^{1/4}}, \qquad x \in [0, B_n], \tag{1}$$

доказано при условии $B_n = n^{3/11}$. В работе автора [XI.46] ставится задача рассмотреть случаи, когда последовательность $\{B_n\}$ возрастает с максимальной скоростью. Далее в той же работе ставится задача определить минимальное $\gamma > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\frac{x^{\alpha/2+1/4}}{1+x^{\gamma}}\, |\widehat{L}_n(x;\alpha)|\, e^{-x/2} \leqslant \frac{c(\gamma)}{n^{1/4}}, \qquad x \in [0, \infty). \tag{2}$$

В обоих неравенствах (1) и (2) считаем $\alpha \geqslant -1/2$.

5. В связи с неравенствами (1) и (2) возникает задача о весовых оценках скорости сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

Пусть функция $f(x)$ определена и, например, непрерывна на полусегменте $[0, \infty)$ и имеет все коэффициенты Фурье по многочленам

Чебышева–Лагерра. Тогда можно рассматривать величины

$$R_n(f, B_n) = \max_{0 \leqslant x \leqslant B_n} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{L}_k(x;\alpha) \right| x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2}, \qquad (3)$$

$$R_n(f, \gamma) = \max_{x \geqslant 0} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{L}_k(x;\alpha) \right| \frac{x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2}}{1+x^\gamma}. \qquad (4)$$

Требуется оценить эти величины при различных условиях на функцию $f(x)$. Например, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема несколько раз на полусегменте $[0, \infty)$. И, конечно, должно быть какое-то интегральное условие на функцию $f(x)$. Разумеется, в формуле (3) последовательность $\{B_n\}$ должна возрастать с максимальной скоростью, а величина γ в неравенстве должна быть наименьшей.

6. В заключение параграфа приведем формулы для многочленов Чебышева–Лагерра, которые могут быть полезны при изучении разных вопросов. Как обычно, с помощью формулы Родрига, производящей функции и с помощью дифференциального уравнения получаются формулы

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k H_{2k}(x) H_{2n-2k}(y) = (-1)^n\, n!\, L_n(x^2+y^2),$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2} [H_n(t)]^2 \cos(\sqrt{2}xt)\, dt = \sqrt{\pi}\, n!\, 2^{n-1} L_n(x^2),$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x;\alpha) = L_n(x;\alpha+1),$$

$$x \sum_{k=0}^{n} L_k(x;\alpha) = (n+\alpha+1) L_n(x;\alpha) - (n+1) L_{n+1}(x;\alpha),$$

$$H_{2m}(x) = (-1)^m\, m!\, 2^{2m} L_m\Big(x^2; -\frac{1}{2}\Big),$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m\, m!\, 2^{2m+1} x L_m\Big(x^2; \frac{1}{2}\Big),$$

$$\lim_{\beta \to \infty} P_n\Big(1 - \frac{2x}{\beta}; \alpha, \beta\Big) = L_n(x;\alpha),$$

$$xz'' + (x+1)z' + \Big(n + \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{\alpha^2}{4x}\Big) z = 0, \qquad z = x^{\alpha/2} e^{-x} L_n(x;\alpha),$$

$$u'' + \Big(\frac{n + (\alpha+1)/2}{x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4}\Big) u = 0, \qquad u = x^{(\alpha+1)/2} e^{-x/2} L_n(x;\alpha),$$

$$v'' + \Big(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\Big) v = 0, \qquad v = x^{\alpha+1/2} e^{-x^2/2} L_n(x^2;\alpha)$$

Глава VII

МНОГОЧЛЕНЫ ЯКОБИ

§ 1. Основные формулы и алгебраические свойства

На интервале $(-1, 1)$ рассмотрим весовую функцию

$$h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \qquad x \in (-1,1), \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \tag{1}$$

В качестве исходной формулы рассмотрим формулу Родрига для стандартизованных многочленов Якоби

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)}. \tag{2}$$

В этой формуле при дробных α и β будем считать, что $x \in (-1, 1)$, и иметь в виду главные значения многозначных функций.

Сначала докажем, что при $x \in (-1, 1)$ правая часть равенства (2) есть действительно многочлен степени n. В самом деле, выполняя операцию дифференцирования по формуле Лейбница, находим

$$[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [(1-x)^{\alpha+n}]^{(k)}[(1+x)^{\beta+n}]^{(n-k)}. \tag{3}$$

Вычисляя производные, получаем

$$\begin{aligned}
&[(1-x)^{\alpha+n}]^{(k)} = \\
&\qquad = (-1)^k(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)(1-x)^{\alpha+n-k} = \\
&\qquad\qquad = (-1)^k\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)}(1-x)^{\alpha+n-k},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&[(1+x)^{\beta+n}]^{(n-k)} = \\
&\qquad = (\beta+n)(\beta+n-1)\ldots(\beta+k+1)(1+x)^{\beta+k} = \\
&\qquad\qquad = \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+k+1)}\,(1+x)^{\beta+k}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Следовательно, из формулы (2) имеем равенство

$$\begin{aligned}
&P_n(x;\alpha,\beta) = \\
&\quad = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^k\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\,\Gamma(\beta+k+1)}\,(1-x)^{n-k}(1+x)^k.
\end{aligned} \tag{6}$$

После очевидных преобразований это равенство представляется в виде

$$P_n(x;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(x-1)^{n-k}(1+x)^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)}. \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) справедливы при любых x. В самом деле, если, например, $x>1$, то для многочленов Якоби вместо (2) имеет место формула

$$P_n(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{n!\,2^n}\,(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\,[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]^{(n)}. \tag{8}$$

Для вычисления правой части (8) достаточно написать аналоги равенств (3)–(5). В результате получим правую часть равенства (7).

С помощью формулы (8) можно вычислить старшие коэффициенты многочлена $P_n(x;\alpha,\beta)$.

При $x>1$ имеем представление

$$\begin{aligned}(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}&=x^{\alpha+\beta+2n}\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^{\alpha+n}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{\beta+n}=\\&=x^{\alpha+\beta+2n}\Big(1-\frac{\alpha+n}{x}+\ldots\Big)\Big(1+\frac{\beta+n}{x}+\ldots\Big)=\\&=x^{\alpha+\beta+2n}+(\beta-\alpha)x^{\alpha+\beta+2n-1}+\ldots\end{aligned} \tag{9}$$

Дифференцируя n раз, находим

$$[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]^{(n)}=A_nx^{\alpha+\beta+n}+B_nx^{\alpha+\beta+n-1}+\ldots, \tag{10}$$

где

$$A_n=(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\ldots(\alpha+\beta+n+1), \tag{11}$$

$$B_n=(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n-2)\ldots(\alpha+\beta+n). \tag{12}$$

Далее, аналогично (9) имеем разложение

$$\begin{aligned}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}&=x^{-\alpha-\beta}\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^{-\alpha}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{-\beta}=\\&=x^{-\alpha-\beta}\Big[1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}+\ldots\Big]\Big[1-\frac{\beta}{x}+\frac{\beta(\beta+1)}{x^2}-\ldots\Big]=\\&=x^{-\alpha-\beta}\Big[1+\frac{\alpha-\beta}{x}+\ldots\Big].\end{aligned} \tag{13}$$

Разложения (10) и (13) подставляем в правую часть равенства (8). В результате получаем

$$\begin{aligned}P_n(x;\alpha,\beta)&=\frac{1}{n!\,2^n}\Big[1+\frac{\alpha-\beta}{x}+\ldots\Big][A_nx^n+B_nx^{n-1}+\ldots]=\\&=\frac{1}{n!\,2^n}\,\{A_nx^n+[A_n(\alpha-\beta)+B_n]x^{n-1}+\ldots\}.\end{aligned}$$

Следовательно, старшие коэффициенты a_n и b_n в разложении стандартизованного многочлена Якоби

$$P_n(x;\alpha,\beta)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\ldots \tag{14}$$

в силу (11) и (12) имеют вид

$$a_n = \frac{A_n}{n!\,2^n} = \frac{1}{n!\,2^n}\,(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\ldots(\alpha+\beta+n+1) = \\ = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, \quad (15)$$

$$b_n = \frac{1}{n!\,2^n}\,[A_n(\alpha-\beta)+B_n] = \\ = \frac{(\alpha-\beta)}{n!\,2^n}\Big[(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\ldots(\alpha+\beta+n+1) - \\ - (\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n-2)\ldots(\alpha+\beta+n)\Big] = \\ = \frac{n(\alpha-\beta)}{n!\,2^n}\,(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n-2)\ldots(\alpha+\beta+n+1) = \\ = \frac{n(\alpha-\beta)}{n!\,2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (16)$$

Для многочленов Якоби с единичным старшим коэффициентом в силу (14) и (15) имеем равенство

$$\widetilde{P}_n(x;\alpha,\beta) = \frac{n!\,2^n\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\,P_n(x;\alpha,\beta) = \\ = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)}. \quad (17)$$

Докажем ортогональность многочленов (2) с весовой функцией (1). Для этого рассмотрим интеграл

$$A_{mn} = \int\limits_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m(x;\alpha,\beta)P_n(x;\alpha,\beta)\,dx. \quad (18)$$

В силу формулы (2) имеем

$$A_{mn} = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\int\limits_{-1}^{1}P_m(x;\alpha,\beta)\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)}\,dx. \quad (19)$$

Далее интегрируем по частям. В результате находим

$$B_{mn} = \int\limits_{-1}^{1}P_m(x;\alpha,\beta)\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)}\,dx = \\ = P_m(x;\alpha,\beta)\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} - \\ - \int\limits_{-1}^{1}P'_m(x;\alpha,\beta)\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n-1)}\,dx.$$

В силу условий $\alpha > -1$ и $\beta > -1$ внеинтегральные члены равны нулю. Поэтому, интегрируя по частям еще $n-1$ раз, получаем

$$B_{mn} = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x;\alpha,\beta)(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,dx. \tag{20}$$

Если $m < n$, то $P_m^{(n)}(x;\alpha,\beta) \equiv 0$. Следовательно, в этом случае интеграл (20), а с ним и интеграл (18), равны нулю, т. е. имеем равенство

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_m(x;\alpha,\beta) P_n(x;\alpha,\beta)\,dx = 0, \qquad m < n.$$

Этим ортогональность многочленов Якоби доказана.

Для вычисления нормы многочлена (2) в формулах (18)–(20) положим $m = n$. В силу (14) и (15) находим

$$\begin{aligned} A_{nn} &= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^2(x;\alpha,\beta)\,dx = \\ &= \frac{1}{n!\,2^n} \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x;\alpha,\beta)(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,dx = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n!\,2^{2n}\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Полученный интеграл заменой $x = 2t - 1$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,dx &= 2\int_{0}^{1} (2-2t)^{\alpha+n}(2t)^{\beta+n}\,dt = \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} \int_{0}^{1} t^{\beta+n}(1-t)^{\alpha+n}\,dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Далее используем известное представление бета-функции Эйлера через гамма-функцию [IV.1, IV.6]

$$B(p,q) = \int_{0}^{1} (1-x)^{p-1} x^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В результате правая часть (22) приводится к виду

$$2^{\alpha+\beta+2n+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Полученное выражение подставляем в правую часть равенства (21).

В результате получается квадрат нормы многочлена (2) с весом (1)

$$A_{nn} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n!\,2^{2n}\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\,2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} = \\ = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (23)$$

Следовательно, ортонормированный многочлен Якоби представляется через многочлен (2) по формуле

$$\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{A_{nn}}}\,P_n(x;\alpha,\beta) = \\ = \sqrt{\frac{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\,P_n(x;\alpha,\beta). \quad (24)$$

А старший коэффициент ортонормированного многочлена Якоби (24) в силу формул (14) и (15) имеет вид

$$\mu_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n!\,2^n\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \\ = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+2n+1}{n!\,2^{\alpha+\beta+1}}}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\sqrt{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}. \quad (25)$$

А теперь подсчитаем коэффициенты λ_n и α_n в трехчленной рекуррентной формуле

$$\lambda_n\widehat{P}_{n+1}(x;\alpha,\beta) = (x-\alpha_n)\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta) - \lambda_{n-1}\widehat{P}_{n-1}(x;\alpha,\beta). \quad (26)$$

В силу формул (I.2.5) и (25) имеем

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = 2\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n!\,2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}\times \\ \times\sqrt{\frac{(n+1)!\,2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+2)\Gamma(\beta+n+2)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+4)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}} = \\ = 2\sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}}. \quad (27)$$

Параметр α_n в формуле (26) можно определить сравнением коэффициентов при x в степени n в обоих частях равенства (26). Таких коэффициентов всего три. Их можно вычислить с помощью формул (14)–(16) и (24). Учитывая (14) и (24), из (26) находим

$$\lambda_n\sqrt{\frac{(n+1)!\,(\alpha+\beta+2n+3)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+2)\Gamma(\beta+n+2)}}\,b_{n+1} = \\ = \sqrt{\frac{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\,b_n - \\ - \alpha_n\sqrt{\frac{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\,a_n.$$

Используя (15), (16) и (27), это равенство представляем в виде

$$2\sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+\beta+2n+3)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(\alpha+n+2)\,\Gamma(\beta+n+2)}}\times$$
$$\times\frac{(n+1)(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)!\,2^{n+1}\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}=$$
$$=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}}\,\frac{n(\alpha-\beta)}{n!\,2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}-$$
$$-\alpha_n\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}}\,\frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

После простейших сокращений получаем

$$\sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+2n+3)(\alpha+\beta+n+1)(n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}}\,\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}=$$
$$=n(\alpha-\beta)\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}-\alpha_n\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Дальнейшие очевидные преобразования приводят к равенствам

$$\frac{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha-\beta)(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}=$$
$$=(\alpha-\beta)n\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}-\alpha_n\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

$$\frac{(\alpha-\beta)(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)}=$$
$$=(\alpha-\beta)n\Gamma(\alpha+\beta+2n)-\alpha_n\Gamma(\alpha+\beta+2n+1),$$

$$\frac{(\alpha-\beta)(n+1)}{\alpha+\beta+2n+2}=\frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta+2n}-\alpha_n.$$

Таким образом, имеем окончательно

$$\alpha_n=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n)}. \tag{28}$$

Подставляя коэффициенты (27) и (28) в равенство (26), получим рекуррентную формулу для ортонормированных многочленов

Якоби

$$2\sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}}\,\widehat{P}_{n+1}(x;\alpha,\beta) = \\ = \left[x - \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n)}\right]\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta) - \\ - 2\sqrt{\frac{n(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)^2(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n+1)}}\,\widehat{P}_{n-1}(x;\alpha,\beta). \quad (29)$$

Если в этом равенстве вместо ортонормированных многочленов Якоби подставить их представление (24), то после элементарных преобразований, основанных на свойствах гамма-функции, получим рекуррентную формулу для стандартизованных многочленов Якоби

$$2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}(x;\alpha,\beta) = \\ = [(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n)x+\alpha^2-\beta^2](\alpha+\beta+2n+1)\times \\ \times P_n(x;\alpha,\beta) - 2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}(x;\alpha,\beta). \quad (30)$$

Далее, формула Кристоффеля–Дарбу для ортонормированных многочленов Якоби имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n}\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\widehat{P}_k(t;\alpha,\beta) = \\ = \lambda_n\,\frac{\widehat{P}_{n+1}(x;\alpha,\beta)\widehat{P}_n(t;\alpha,\beta)-\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{P}_{n+1}(t;\alpha,\beta)}{x-t}, \quad (31)$$

где коэффициент λ_n определяется равенством (27). В аналогичной формуле для стандартизованных многочленов Якоби

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{A_{kk}}\,P_k(x;\alpha,\beta)P_k(t;\alpha,\beta) = \\ = A_n\,\frac{P_{n+1}(x;\alpha,\beta)P_n(t;\alpha,\beta)-P_n(x;\alpha,\beta)P_{n+1}(t;\alpha,\beta)}{x-t} \quad (32)$$

величина A_{kk} определяется равенством (23), а для коэффициента A_n в силу (24) и (27) имеем

$$A_n = 2\sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}}\times \\ \times\sqrt{\frac{(n+1)!\,(\alpha+\beta+2n+3)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+2)\Gamma(\beta+n+2)}}\times \\ \times\sqrt{\frac{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}} = \\ = \frac{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{2^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}. \quad (33)$$

Как обычно в теории ортогональных многочленов, формулы (31) и (32) применяются при исследовании условий сходимости рядов Фурье по многочленам Якоби.

§ 2. Производящая функция и дифференциальное уравнение

В настоящем параграфе определяется производящая функция для многочленов Якоби и выводится дифференциальное уравнение, которому эти многочлены удовлетворяют. Доказательства здесь более элементарны, чем в гл. II, ибо там производящая функция и дифференциальное уравнения получены в общем виде сразу для всего семейства классических ортогональных многочленов.

Фиксируем точку x из интервала $(-1, 1)$. Проведем окружность Г с центром в точке x столь малого радиуса, что она не охватывает точек ± 1. Тогда в силу формулы Коши для производной аналитической функции имеем равенство

$$[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}}{(t-x)^{n+1}}\,dt.$$

Учитывая формулу (1.2), из этого равенства находим

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{2^n(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}}{(t-x)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}\frac{(1-t^2)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}\left[\frac{t^2-1}{2(t-x)}\right]^n\frac{dt}{t-x}. \quad (1)$$

Вместо переменной интегрирования t введем новое переменное w по формуле

$$w = 2\,\frac{t-x}{t^2-1}. \quad (2)$$

Поскольку t изменяется около x, то w изменяется около начала координат, причем окружности Г соответствует некоторый контур γ, охватывающий начало координат. Для краткости введем обозначение

$$A = \sqrt{1-2xw+w^2}. \quad (3)$$

Здесь имеется в виду главное значение корня. Тогда из (2), учитывая обозначение (3), находим одно из значений t по формуле

$$t = \frac{1}{w}\,(1-A) = \frac{1}{w}\,(1-\sqrt{1-2xw+w^2}\,). \quad (4)$$

Далее, имеем равенства

$$1-t=\frac{1}{w}\,(w-1+A)=\frac{A^2-(1-w)^2}{w(1-w+A)}=2\,\frac{1-x}{1-w+A},$$

$$1+t=\frac{1}{w}\,(w+1-A)=\frac{(w+1)^2-A^2}{w(1+w+A)}=2\,\frac{1+x}{1+w+A},$$

$$t-x=\frac{1-A-xw}{w}=\frac{(1-xw)^2-A^2}{w(1-xw+A)}=\frac{w(x^2-1)}{1-xw+A}.$$

С помощью равенств (3) и (4) вычисляем дифференциал. Имеем последовательно

$$dt=\left(-\frac{1-A}{w^2}+\frac{x-w}{Aw}\right)dw=-\frac{A-1+xw}{w^2A}\,dw=$$
$$=-\frac{A^2-(1-xw)^2}{w^2A(A+1-xw)}\,dw=\frac{(x^2-1)\,dw}{A(A+1-xw)}=\frac{t-x}{wA}\,dw.$$

Все полученные соотношения подставляем под знак последнего интеграла в (1). В результате находим

$$P_n(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(\frac{2}{1-w+A}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{1+w+A}\right)^{\beta}\frac{dw}{Aw^{n+1}}.$$

Следовательно, имеем разложение

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{A(1-w+A)^{\alpha}(1+w+A)^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x;\alpha,\beta)\,w^n. \qquad (5)$$

Здесь величина A определяется формулой (3) и имеются в виду главные значения многозначных функций при нецелых α и β. А само разложение (5) сходится в достаточно малой окрестности начала координат в зависимости от положения точки x на интервале $(-1,1)$.

А теперь выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют многочлены Якоби. Для этого рассмотрим функцию

$$u=(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}. \qquad (6)$$

Дифференцируя, находим

$$u'=-(\alpha+n)(1-x)^{\alpha+n-1}(1+x)^{\beta+n}+$$
$$+(\beta+n)(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n-1}=$$
$$=(1-x)^{\alpha+n-1}(1+x)^{\beta+n-1}[-(\alpha+n)(1+x)+(\beta+n)(1-x)]=$$
$$=\frac{u}{1-x^2}\,[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x].$$

Следовательно, имеем тождество

$$(1-x^2)u'=[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x]u.$$

Дифференцируем это тождество еще $n+1$ раз. В силу формулы Лейбница имеем

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (1-x^2)^{(k)} u^{(n+2-k)} = \\ = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x]^{(k)} u^{(n+1-k)}.$$

Выполняя операцию дифференцирования сомножителей, находим последовательно

$$(1-x^2)u^{(n+2)} - 2(n+1)xu^{(n+1)} - (n+1)nu^{(n)} = \\ = [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x]u^{(n+1)} - (n+1)(\alpha+\beta+2n)u^{(n)},$$

$$(1-x^2)u^{(n+2)} + [\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]u^{(n+1)} + \\ + (n+1)(\alpha+\beta+n)u^{(n)} = 0. \quad (7)$$

С другой стороны, из формулы (1.2), учитывая обозначение (6), имеем равенство

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}u^{(n)}.$$

Определяем из этого равенства производную $u^{(n)}$ и подставляем в тождество (7). После сокращения на постоянный множитель, получим

$$(1-x^2)\,[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n(x;\alpha,\beta)]'' + \\ + [\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]\,[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n(x;\alpha,\beta)]' + \\ + (n+1)(\alpha+\beta+n)\,[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n(x;\alpha,\beta)] = 0. \quad (8)$$

Первая производная от произведения в квадратных скобках имеет вид

$$-\alpha(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^\beta P_n(x;\alpha,\beta) + \beta(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta-1}P_n(x;\alpha,\beta) + \\ + (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n'(x;\alpha,\beta).$$

Вычисляем вторую производную от этой суммы и подставляем в левую часть тождества (8). В результате находим

$$(1-x^2)[\alpha(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}(1+x)^\beta P_n(x;\alpha,\beta) - \\ - \alpha\beta(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_n(x;\alpha,\beta) - \\ - \alpha(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^\beta P_n'(x;\alpha,\beta) - \alpha\beta(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_n(x;\alpha,\beta) + \\ + \beta(\beta-1)(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta-2}P_n(x;\alpha,\beta) + \\ + \beta(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta-1}P_n'(x;\alpha,\beta) - \alpha(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^\beta P_n'(x;\alpha,\beta) +$$

$$+\beta(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta-1}P_n'(x;\alpha,\beta)+(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n''(x;\alpha,\beta)]+$$
$$+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]\,[-\alpha(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta}P_n(x;\alpha,\beta)+$$
$$+\beta(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta-1}P_n(x;\alpha,\beta)+(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n'(x;\alpha,\beta)]+$$
$$+(n+1)(\alpha+\beta+n)[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n(x;\alpha,\beta)]=0.$$

У всех слагаемых опускаем множители $(1-x)^{\alpha}$ и $(1+x)^{\beta}$. Затем приводим подобные члены в квадратных скобках. В результате имеем

$$(1-x^2)\Big[\frac{\alpha(\alpha-1)}{(1-x)^2}\,P_n(x;\alpha,\beta)-\frac{2\alpha\beta}{1-x^2}\,P_n(x;\alpha,\beta)-\frac{2\alpha}{1-x}\,P_n'(x;\alpha,\beta)+$$
$$+\frac{\beta(\beta-1)}{(1+x)^2}\,P_n(x;\alpha,\beta)+\frac{2\beta}{1+x}\,P_n'(x;\alpha,\beta)+P_n''(x;\alpha,\beta)\Big]+$$
$$+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]\Big[\frac{-\alpha}{1-x}\,P_n(x;\alpha,\beta)+\frac{\beta}{1+x}\,P_n(x;\alpha,\beta)+$$
$$+P_n'(x;\alpha,\beta)\Big]+(n+1)(\alpha+\beta+n)P_n(x;\alpha,\beta)=0.$$

Далее группируем отдельно слагаемые, содержащие множителями многочлен Якоби и его производные. Это приводит к равенству

$$(1-x^2)P_n''(x;\alpha,\beta)+[-2\alpha(1+x)+2\beta(1-x)+\alpha-\beta+$$
$$+\alpha x+\beta x-2x]\,P_n'(x;\alpha,\beta)+\Big[\frac{\alpha(\alpha-1)}{1-x}(1+x)-2\alpha\beta+$$
$$+\frac{\beta(\beta-1)}{1+x}\,(1-x)-\alpha\,\frac{\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x}{1-x}+\beta\,\frac{\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x}{1-x}+$$
$$+(n+1)(\alpha+\beta+n)\Big]P_n(x;\alpha,\beta)=0.\qquad(9)$$

Вычисляя сумму в последних квадратных скобках, находим

$$\frac{\alpha^2-\alpha+\alpha^2x-\alpha x}{1-x}-2\alpha\beta+\frac{\beta^2-\beta-\beta^2x+\beta x}{1+x}+$$
$$+\frac{-\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^2x-\beta\alpha x+2\alpha x}{1-x}+\frac{\alpha\beta-\beta^2+\alpha\beta x+\beta^2x-2\beta x}{1+x}+$$
$$+(n+1)(\alpha+\beta+n)=\frac{-\alpha(1-x)}{1-x}-2\alpha\beta-\frac{\beta(1+x)}{1+x}+\frac{\alpha\beta(1-x)}{1-x}+$$
$$+\frac{\alpha\beta(1+x)}{1+x}+(n+1)(\alpha+\beta+n)=-\alpha-\beta+(n+1)(\alpha+\beta+n)=$$
$$=n(\alpha+\beta+n+1).$$

Следовательно, из (9) получаем

$$(1-x^2)P_n''(x;\alpha,\beta)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,P_n'(x;\alpha,\beta)+$$
$$+n(\alpha+\beta+n+1)\,P_n(x;\alpha,\beta)=0.\qquad(10)$$

Поскольку все предыдущие равенства, начиная с равенства (7), выполняются тождественно, то, следовательно, многочлен Якоби $P_n(x;\alpha,\beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,y' + n(\alpha+\beta+n+1)\,y = 0. \tag{11}$$

Разумеется этому же уравнению удовлетворяют и многочлены $\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)$ и $\widetilde{P}_n(x;\alpha,\beta)$.

§ 3. Равномерные оценки на сегменте ортогональности

Сначала рассмотрим ряд важных соотношений, являющихся следствиями формулы (1.7). Дифференцируя равенство (1.7), находим

$$\begin{aligned}
&P_n'(x;\alpha,\beta) = \\
&\quad= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\,\Gamma(\beta+k+1)}\times\\
&\quad\times\left[(n-k)(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k + k(x-1)^{n-k}(x+1)^{k-1}\right] =\\
&\quad= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)C_n^k(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)} + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \sum_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k(x-1)^{n-k}(x+1)^{k-1}}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)}\right].
\end{aligned}$$

Далее, используя равенства

$$(n-k)C_n^k = nC_{n-1}^k, \qquad kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

и полагая во второй сумме $k-1=m$, получаем

$$\begin{aligned}
P_n'(x;\alpha,\beta) &= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(n-1)!\,2^n}\times\\
&\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^k(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^m(x-1)^{n-m-1}(x+1)^m}{\Gamma(\alpha+n-m)\Gamma(\beta+m+2)}\right].
\end{aligned} \tag{1}$$

Во второй сумме вместо m ставим k и складываем коэффициенты у подобных слагаемых в обоих суммах. Учитывая равенство

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\,\Gamma(\beta+k+1)} &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+n-k)\,\Gamma(\beta+k+2)} =\\
&= \frac{(\beta+k+1+\alpha+n-k)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\,\Gamma(\beta+k+2)},
\end{aligned}$$

из формулы (1) находим

$$P'_n(x;\alpha,\beta) = (\alpha+\beta+n+1)\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(n-1)!\,2^n}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^k(x-1)^{n-1-k}(x+1)^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+2)}.$$

С другой стороны, формула (1.7) для номера $n-1$ и параметров $\alpha+1$ и $\beta+1$ имеет вид

$$P_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1) =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(n-1)!\,2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^k(x-1)^{n-1-k}(x+1)^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+2)}.$$

Сопоставляя два последних равенства, находим формулу дифференцирования стандартизованных многочленов Якоби

$$P'_n(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1). \qquad (2)$$

Аналогичная формула для ортонормированных многочленов имеет вид

$$\widehat{P}'_n(x;\alpha,\beta) = \sqrt{n(\alpha+\beta+n+1)}\,\widehat{P}_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1). \qquad (3)$$

Далее, в равенстве (1.7) вместо x поставим $-x$. В результате получаем

$$P_n(-x;\alpha,\beta) =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^n}\,(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k(1+x)^{n-k}(1-x)^k}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\,\Gamma(\beta+k+1)} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^n}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^mC_n^m(1-x)^{n-m}(1+x)^m}{\Gamma(\beta+n-m+1)\,\Gamma(\alpha+m+1)} =$$
$$= (-1)^nP_n(x;\beta,\alpha).$$

Таким образом, справедливо очень важное тождество

$$P_n(-x;\alpha,\beta) = (-1)^nP_n(x;\beta,\alpha). \qquad (4)$$

Вычислим теперь значения стандартизованных многочленов Якоби на концах сегмента ортогональности. Из равенства (1.7), полагая в нем $x=1$, находим

$$P_n(1;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,2^n}\,\frac{2^n}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+n+1)} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (5)$$

Аналогично, при $x = -1$ имеем

$$P_n(-1; \alpha, \beta) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{n!\, \Gamma(\beta + 1)}. \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) можно записать в виде

$$P_n(1; \alpha, \beta) = \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)}{1 \cdot 2 \ldots n} = \binom{n + \alpha}{n}, \tag{7}$$

$$P_n(-1; \alpha, \beta) = (-1)^n \frac{(\beta + 1)(\beta + 2) \ldots (\beta + n)}{1 \cdot 2 \ldots n} = (-1)^n \binom{n + \beta}{n}. \tag{8}$$

А теперь рассмотрим очень важное экстремальное свойство многочленов Якоби, которое часто используется при изучении рядов Фурье по многочленам Якоби.

Теорема 7.1. *Если выполняется условие*

$$q = \max\{\alpha, \beta\} \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{9}$$

то максимум абсолютного значения многочлена Якоби на сегменте $[-1, 1]$ *достигается на одном из концов этого сегмента.*

Доказательство. Полагая для краткости $y = P_n(x; \alpha, \beta)$, рассмотрим вспомогательную функцию

$$u(x) = y^2 + \frac{1 - x^2}{n(\alpha + \beta + n + 1)} (y')^2. \tag{10}$$

Дифференцируя, находим

$$u'(x) = 2yy' - \frac{2x(y')^2}{n(\alpha + \beta + n + 1)} + \frac{1 - x^2}{n(\alpha + \beta + n + 1)} 2y'y''. \tag{11}$$

С другой стороны, многочлен Якоби удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.11)

$$(1 - x^2)\, y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\, y' + n(n + \alpha + \beta + 1)\, y = 0.$$

С помощью этого тождества равенство (11) приводится к виду

$$u'(x) = \frac{2y'}{n(\alpha + \beta + n + 1)} [n(\alpha + \beta + n + 1)y - xy' + (1 - x^2)y''] =$$
$$= \frac{2y'}{n(\alpha + \beta + n + 1)} \{-xy' - [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y'\} =$$
$$= \frac{2[(\alpha + \beta + 1)x - (\beta - \alpha)]}{n(\alpha + \beta + n + 1)} (y')^2. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала случай, когда выполняются условия

$$\alpha > -\frac{1}{2}, \qquad \beta > -\frac{1}{2}. \tag{13}$$

В этом случае равенство (12) можно представить в виде

$$u'(x) = \frac{2(\alpha + \beta + 1)}{n(\alpha + \beta + n + 1)} (x - x_0)(y')^2, \tag{14}$$

где для краткости введено обозначение

$$x_0 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1}. \tag{15}$$

Формулу (15) можно представить в следующих видах:

$$x_0 = 1 - \frac{1 + 2\alpha}{\alpha + \beta + 1} = -1 + \frac{1 + 2\beta}{\alpha + \beta + 1}.$$

Следовательно, при условиях (13) точка x_0 находится внутри интервала $(-1, 1)$, т. е. $-1 < x_0 < 1$. Далее, так как при условиях (13) $\alpha + \beta + 1 > 0$, то производная (14) меняет знак в точке x_0. При этом на интервале $(-1, x_0)$ производная отрицательна, а при $x \in (x_0, 1)$ она положительна. Следовательно, функция $u(x)$, определяемая формулой (10), убывает на интервале $(-1, x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0, 1)$. Поскольку эта функция на интервале $(-1, 1)$ положительна, то справедливы неравенства

$$u(x) \leqslant u(1), \qquad x \in (x_0, 1), \tag{16}$$

$$u(x) \leqslant u(-1), \qquad x \in (-1, x_0). \tag{17}$$

С другой стороны, из формулы (10) при $|x| \leqslant 1$ имеем

$$P_n^2(x; \alpha, \beta) \leqslant u(x), \qquad P_n^2(\pm 1; \alpha, \beta) = u(\pm 1). \tag{18}$$

Поэтому, учитывая (16) и (17), находим

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant |P_n(1; \alpha, \beta)|, \qquad x \in (x_0, 1), \tag{19}$$

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant |P_n(-1; \alpha, \beta)|, \qquad x \in (-1, x_0). \tag{20}$$

Таким образом, при условиях (13) теорема 7.1 доказана.

Пусть теперь выполняются условия

$$\alpha \geqslant -\frac{1}{2}, \quad -1 < \beta \leqslant -\frac{1}{2}, \quad \alpha \neq \beta. \tag{21}$$

Тогда, вычисляя значения линейной функции

$$v(x) = (\alpha + \beta + 1)x + \alpha - \beta \tag{22}$$

в точках $x = \pm 1$, найдем, что она положительна в интервале $(-1, 1)$. Поэтому из равенства (12) следует, что производная $u'(x)$ положительна в этом интервале всюду, кроме тех точек, которые являются нулями производной многочлена Якоби. Следовательно, относительные максимумы величины $|P_n(x; \alpha, \beta)|$ возрастают на всем сегменте $[-1, 1]$. Поэтому наибольший из них достигается в точке $x = 1$, ибо условия (18) не зависят от неравенств (13). Таким образом, при условиях (21) имеем

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant |P_n(1; \alpha, \beta)|, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{23}$$

Если же вместо (21) выполняются неравенства

$$\beta \geqslant -\frac{1}{2}, \qquad -1 < \alpha \leqslant -\frac{1}{2}, \tag{24}$$

то функция (22) отрицательна в интервале $(-1, 1)$. Поэтому относительные максимумы функции (10) убывают. Следовательно, убывают также и относительные максимумы величины $|P_n(x; \alpha, \beta)|$ на сегменте ортогональности $[-1, 1]$. Поэтому при условиях (24) имеем

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant |P_n(-1; \alpha, \beta)|, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{25}$$

Следует отметить, что в двух последних случаях, т. е. при условиях (21) и (22), проведенные рассуждения не проходят, если $\alpha = \beta = -1/2$, но в этом случае многочлены Якоби обращаются в многочлены Чебышева первого рода, для которых доказываемое утверждение очевидно.

Таким образом, теорема 7.1 доказана полностью.

Теорема 7.2. *Если выполняются неравенства*

$$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}, \qquad -1 < \beta < -\frac{1}{2}, \tag{26}$$

то максимум абсолютного значения многочлена Якоби на всем сегменте $[-1, 1]$ *достигается в точке относительного максимума, ближайшей к точке* x_0 *слева или справа.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что и при условиях (26) точка x_0, определяемая формулой (15), расположена внутри интервала $(-1, 1)$. И в этом случае можно снова рассматривать формулу (14), из которой в силу условия $\alpha + \beta + 1 < 0$ следует, что производная $u'(x)$ положительна на интервале $(-1, x_0)$ и отрицательна правее точки x_0. Следовательно, относительные максимумы функции $u(x)$ возрастают при приближении точки x к точке x_0 и слева, и справа. То же самое можно утверждать и о величине $|P_n(x; \alpha, \beta)|$. Следовательно, абсолютный максимум на сегменте $[-1, 1]$ величины $|P_n(x; \alpha, \beta)|$ достигается в точке относительного максимума, ближайшей к точке x_0 слева либо справа. Этим теорема 7.2 доказана.

Рассмотрим доказательство теоремы 7.1 подробнее, ибо в нем установлено несколько более того, что утверждает сама теорема.

Прежде всего, в силу формул (5) и (6) неравенства (19) и (20) можно представить в виде

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!\, \Gamma(\alpha + 1)}, \qquad x \in [x_0, 1], \tag{27}$$

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{n!\, \Gamma(\beta + 1)}, \qquad x \in [-1, x_0]. \tag{28}$$

Следовательно, точка x_0, определяемая формулой (15), делит сегмент ортогональности на две части таким образом, что оценка на правом сегменте зависит только от α, а на левом — только от β.

Аналогичным образом неравенство (23) в силу формулы (5) приводится к виду

$$|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!\, \Gamma(\alpha + 1)}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{29}$$

Таким образом, если параметр β удовлетворяет условию $-1 < \beta \leqslant -1/2$, то он фактически не влияет на оценку стандартизованного многочлена Якоби на всем сегменте ортогональности. При этом второй параметр α должен удовлетворять условию $\alpha \geqslant -1/2$. Это обстоятельство становится более ясным, если учесть тот факт, что при условии $\alpha = \beta = -1/2$ мы имеем, так сказать, самый хороший случай, когда относительные максимумы абсолютного значения ортогонального многочлена все равны между собой и распределены по всему сегменту ортогональности.

Неравенства (27), (28) и (29) нетрудно преобразовать в оценки для ортонормированных многочленов Якоби. В самом деле, для дроби, стоящей под знаком корня в формуле (1.24), в силу формулы (IV.7.18) имеем оценку

$$\frac{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)} \leqslant c_1\frac{n\cdot n^{\alpha}}{n^{\alpha}} = c_1 n.$$

Следовательно, из (27) и (28) с помощью равенства (1.24), снова используя (IV.7.18), получаем

$$|\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant c_2(\alpha,\beta)\, n^{\alpha+1/2}, \qquad x\in[x_0,1], \tag{30}$$

$$|\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant c_3(\alpha,\beta)\, n^{\beta+1/2}, \qquad x\in[-1,x_0]. \tag{31}$$

Заметим, что оценка (30) справедлива при условии $\alpha \geqslant -1/2$, а оценка (31) — при условии $\beta \geqslant -1/2$. Если же, например, выполняется условие $-1 < \beta \leqslant -1/2$, но $\alpha \geqslant -1/2$, то из (29) находим неравенство

$$|\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant c_4(\alpha,\beta) n^{\alpha+1/2}, \qquad x\in[-1,1]. \tag{32}$$

А теперь сформулируем самый главный результат настоящего параграфа — равномерную оценку ортонормированных многочленов Якоби на всем сегменте ортогональности при условии (9).

Теорема 7.3. *Если выполнено условие* (9)

$$q = \max\{\alpha,\beta\} \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{33}$$

то для ортонормированных многочленов Якоби имеет место равномерная оценка на всем сегменте ортогональности

$$|\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant c_5(\alpha,\beta)\, n^{q+1/2}, \qquad x\in[-1,1], \tag{34}$$

где постоянная $c_5(\alpha,\beta)$ зависит только от α и β.

Доказательство. В самом деле, если α и β удовлетворяют условиям $\alpha \geqslant -1/2$ и $\beta \geqslant -1/2$, то оценка (34) следует из неравенств (30) и (31). Если же из этих двух условий выполняется только одно, например, первое, то (34) следует из (32). Таким образом, теорема 7.3 доказана.

Оценки (30)–(32) и (34) неулучшаемы в смысле порядка, т. е. ортонормированные многочлены Якоби имеют указанный справа порядок

возрастания по крайней мере на одном из концов сегмента ортогональности. Это следует из формул (1.24), (5) и (6) в силу равенства (IV.7.18). Более того, при любых $\alpha > -1$ и $\beta > -1$ имеем

$$\widehat{P}_n(1;\alpha,\beta) = \frac{P_n(1;\alpha,\beta)}{\sqrt{A_{nn}}} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)\sqrt{A_{nn}}} \approx c_6(\alpha,\beta)n^{\alpha+1/2}, \qquad (35)$$

$$\widehat{P}_n(-1;\alpha,\beta) = \frac{P_n(-1;\alpha,\beta)}{\sqrt{A_{nn}}} = \frac{(-1)^n\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)\sqrt{A_{nn}}} \approx c_7(\alpha,\beta)n^{\beta+1/2}. \quad (36)$$

Все результаты настоящего параграфа рассмотрены при условии, что параметры α и β постоянны.

§ 4. Асимптотические свойства и весовые оценки

В настоящем параграфе для исследования асимптотических свойств многочленов Якоби снова применяется метод Лиувилля–Стеклова. Но в отличие от случая многочленов Лежандра здесь ситуация значительно сложнее, ибо, как и в предыдущей главе, приходится рассматривать уравнение Бесселя и два его линейно независимых решения. В асимптотических формулах для многочленов Якоби можно оценить остаточный член в зависимости от положения точки x на интервале ортогональности аналогично тому, как это сделано для многочленов Лежандра. Но мы не будем проводить неизбежные при этом громоздкие вычисления, а ограничимся лишь тем, что наряду с простейшими асимптотическими формулами получим очень важные весовые оценки для многочленов Якоби на всем сегменте ортогональности.

Как было установлено в § 2, многочлен Якоби $P_n(x;\alpha,\beta)$ удовлетворяет удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,y' + n(n+\alpha+\beta+1)\,y = 0.$$

Полагая в этом уравнениии $x=\cos\theta$, находим тождество

$$\sin^2\theta\,P_n''(\cos\theta;\alpha,\beta) + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\cos\theta]\,P_n'(\cos\theta;\alpha,\beta) + \\ + n(n+\alpha+\beta+1)\,P_n(\cos\theta;\alpha,\beta) \equiv 0. \quad (1)$$

Для применения метода Лиувилля–Стеклова к многочленам Якоби рассмотрим вспомогательную функцию

$$u = u(\theta) = \Bigl(\sin\frac{\theta}{2}\Bigr)^{\alpha+1/2}\Bigl(\cos\frac{\theta}{2}\Bigr)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta). \qquad (2)$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'' + \Bigl[\frac{1/4-\alpha^2}{4\sin^2(\theta/2)} + \frac{1/4-\beta^2}{4\cos^2(\theta/2)} + \Bigl(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\Bigr)^2\Bigr]u = 0. \qquad (3)$$

Первая производная функции (2) имеет вид

$$u'(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta)\times$$
$$\times\left[\frac{(\alpha+1/2)\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} - \frac{(\beta+1/2)\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}\right] -$$
$$- \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n'(\cos\theta;\alpha,\beta)\sin\theta. \quad (4)$$

Первые три сомножителя перед квадратными скобками составляют функцию (2). Поэтому вторую производную этой функции можно представить в виде

$$u''(\theta) = u'(\theta)\left[\frac{(\alpha+1/2)\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} - \frac{(\beta+1/2)\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}\right] -$$
$$- u(\theta)\left[\frac{\alpha+1/2}{4\sin^2(\theta/2)} + \frac{\beta+1/2}{4\cos^2(\theta/2)}\right] - \sin\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}\times$$
$$\times P_n'(\cos\theta;\alpha,\beta)\left[\frac{(\alpha+1/2)\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} - \frac{(\beta+1/2)\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}\right] -$$
$$- \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}[\cos\theta\, P_n'(\cos\theta;\alpha,\beta) - \sin^2\theta\, P_n''(\cos\theta;\alpha,\beta)]. \quad (5)$$

Теперь надо подставить вторую производную (5) и функцию (2) в левую часть уравнения (3). Но сначала заметим, что все слагаемые в правой части (5), а также и функция (2) имеют два одинаковых множителя. Без этих множителей левая часть (3) с учетом (4) имеет вид

$$\left[\frac{(\alpha+1/2)\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} - \frac{(\beta+1/2)\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}\right]^2 P_n -$$
$$- 2\sin\theta\left[\frac{(\alpha+1/2)\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} - \frac{(\beta+1/2)\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}\right] P_n' -$$
$$- \left(\frac{\alpha+1/2}{4\sin^2(\theta/2)} + \frac{\beta+1/2}{4\cos^2(\theta/2)}\right) P_n - (\cos\theta\, P_n' - \sin^2\theta\, P_n'') +$$
$$+ \left[\frac{1/4-\alpha^2}{4\sin^2(\theta/2)} + \frac{1/4-\beta^2}{4\cos^2(\theta/2)} + \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2\right] P_n. \quad (6)$$

Вычисляем отдельно слагаемые, содержащие производные многочлена Якоби. С помощью дифференциального уравнения (1) находим

$$\sin^2\theta\, P_n'' - \left[2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos\theta\right] P_n' =$$
$$= \sin^2\theta\, P_n'' - \left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(1+\cos\theta) - \left(\beta+\frac{1}{2}\right)(1-\cos\theta) + \cos\theta\right] P_n' =$$
$$= \sin^2\theta\, P_n'' - [\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\cos\theta]\, P_n' =$$
$$= -n(n+\alpha+\beta+1)P_n.$$

Следовательно, сумма (6) без множителя P_n имеет вид

$$\frac{(\alpha+1/2)^2\cos^2(\theta/2)}{4\sin^2(\theta/2)}-\frac{(\alpha+1/2)(\beta+1/2)}{2}+\frac{(\beta+1/2)^2\sin^2(\theta/2)}{4\cos^2(\theta/2)}-$$
$$-\frac{\alpha+1/2}{4\sin^2(\theta/2)}-\frac{\beta+1/2}{4\cos^2(\theta/2)}+\frac{1/4-\alpha^2}{4\sin^2(\theta/2)}+\frac{1/4-\beta^2}{4\cos^2(\theta/2)}+$$
$$+\Bigl(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\Bigr)^2-n(n+\alpha+\beta+1)=$$
$$=\frac{(\alpha+1/2)^2-\alpha-1/2+1/4-\alpha^2}{4\sin^2(\theta/2)}-\frac{(\alpha+1/2)^2}{4}-$$
$$-\frac{(\alpha+1/2)(\beta+1/2)}{2}+\frac{(\beta+1/2)^2-\beta-1/2+1/4-\beta^2}{4\cos^2(\theta/2)}-$$
$$-\frac{(\beta+1/2)^2}{4}+\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}=0.$$

Таким образом, функция (2) действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (3).

Далее, для краткости введем обозначение

$$N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}. \tag{7}$$

Представим уравнение (3) в виде

$$u''+\Bigl(\frac{1-4\alpha^2}{4\theta^2}+N^2\Bigr)u=\Bigl[\frac{4\beta^2-1}{16\cos^2(\theta/2)}+\Bigl(\frac14-\alpha^2\Bigr)\Bigl(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{4\sin^2(\theta/2)}\Bigr)\Bigr]u. \tag{8}$$

Докажем, что решением однородного уравнения

$$u''+\Bigl(\frac{1-4\alpha^2}{4\theta^2}+N^2\Bigr)u=0 \tag{9}$$

является функция

$$u_1(\theta)=\sqrt{\theta}\,J_\alpha(N\theta), \tag{10}$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка α. В самом деле, вычисляем вторую производную и подставляем в левую часть (9). В результате получим

$$\sqrt{\theta}\,N^2J_\alpha''(N\theta)+\frac{N}{\sqrt{\theta}}\,J_\alpha'(N\theta)-\frac14\,\theta^{-3/2}J_\alpha(N\theta)+$$
$$+\Bigl(\frac{1-4\alpha^2}{4\theta^2}+N^2\Bigr)\sqrt{\theta}\,J_\alpha(N\theta).$$

После умножения этой суммы на величину $\theta^{3/2}$ и обозначения $N\theta=x$ находим

$$\theta^2N^2J_\alpha''(N\theta)+\theta NJ_\alpha'(N\theta)+(-\alpha^2+\theta^2N^2)J_\alpha(N\theta)=$$
$$=x^2J_\alpha''(x)+xJ_\alpha'(x)+(x^2-\alpha^2)J_\alpha(x)=0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция Бесселя $J_\alpha(x)$ является решением уравнения Бесселя (VI.3.8). Таким образом, функция (10) действительно есть решение уравнения (9). Если α — нецелое число, то второе линейно независимое решение уравнения (9) можно взять в виде

$$u_2(\theta) = \sqrt{\theta}\, J_{-\alpha}(N\theta). \tag{11}$$

Если же α — целое число, то вместо (11) в качестве второго решения можно взять функцию

$$u_2(\theta) = \sqrt{\theta}\, Y_\alpha(N\theta), \tag{12}$$

где $Y_\alpha(x)$ — функция Бесселя второго рода [IV.2, IV.5, IV.6].

Далее надо представить решение уравнения (8) по формуле (IV.4.3), имея в виду, что вместо уравнения (IV.4.1) здесь есть уравнение (9), в котором $B(\theta) \equiv 0$. Следовательно, формула (IV.4.4) в данном случае имеет вид

$$u_1'(\theta)u_2(\theta) - u_2'(\theta)u_1(\theta) = c_3. \tag{13}$$

Для определения постоянной c_3 воспользуемся известными в теории бесселевых функций соотношениями [IV.2, IV.5, IV.6]

$$J_\alpha'(x)J_{-\alpha}(x) - J_{-\alpha}'(x)J_\alpha(x) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi x}, \tag{14}$$

$$J_\alpha'(x)Y_\alpha(x) - Y_\alpha'(x)J_\alpha(x) = -\frac{2}{\pi x}. \tag{15}$$

При этом формула (14) справедлива при нецелых α, а формула (15) — при целых α. Вычисляя производные, найдем, что постоянная c_3 равна $(2/\pi)\sin\alpha\pi$, если α — нецелое число, и $-2/\pi$, если α целое. Таким образом, формула (IV.4.3) в первом случае имеет вид

$$u(\theta) = c_1\sqrt{\theta}\, J_\alpha(N\theta) + c_2\sqrt{\theta}\, J_{-\alpha}(N\theta) + \\ + \sqrt{\theta}\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{t}\,[J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt) - J_{-\alpha}(N\theta)J_\alpha(Nt)]\, F(t)u(t)\, dt, \tag{16}$$

где введено обозначение

$$F(t) = \left[\frac{4\beta^2-1}{16\cos^2(t/2)} + \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4\sin^2(t/2)}\right)\right]\frac{\pi}{2\sin\alpha\pi}. \tag{17}$$

Эта функция равномерно ограничена при условии $0 \leqslant t \leqslant \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

В формуле (16) произвольные постоянные c_1, c_2 и θ_0 надо выбрать таким образом, чтобы вместо $u(\theta)$ можно было бы поставить конкретное решение (2) уравнения (8).

Будем считать, что в формуле (16) функция $u(\theta)$ определяется равенством (2). Так как $\alpha > -1$, то в формуле (16) можно положить $\theta_0 = 0$, и интеграл будет существовать в крайнем случае как

несобственный. Следовательно, равенство (16) после деления его на величину $\theta^{\alpha+1/2}$ можно представить в виде

$$\theta^{-\alpha-1/2}\Big(\sin\frac{\theta}{2}\Big)^{\alpha+1/2}\Big(\cos\frac{\theta}{2}\Big)^{\beta+1/2}P_n(\cos\theta;\alpha,\beta) = \\ = c_1\theta^{-\alpha}J_\alpha(N\theta)+c_2\theta^{-\alpha}J_{-\alpha}(N\theta)+ \\ +\theta^{-\alpha}\int_0^\theta\sqrt{t}\,[J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt)-J_\alpha(Nt)J_{-\alpha}(N\theta)]F(t)\times \\ \times\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^{\alpha+1/2}\Big(\cos\frac{t}{2}\Big)^{\beta+1/2}P_n(\cos t;\alpha,\beta)\,dt. \quad (18)$$

При малых x функция Бесселя $J_\alpha(x)$ эквивалентна величине x^α. Поэтому при фиксированном N интеграл (18) при $\theta\to 0$ имеет порядок убывания величины

$$\int_0^\theta\sqrt{t}\,(\theta^\alpha t^{-\alpha}+\theta^{-\alpha}t^\alpha)t^{\alpha+1/2}\,dt = \\ = \theta^\alpha\int_0^\theta t\,dt+\theta^{-\alpha}\int_0^\theta t^{2\alpha+1}\,dt = \frac{1}{2}\,\theta^{\alpha+2}+\frac{1}{2\alpha+2}\,\theta^{\alpha+2}.$$

Если $\alpha>0$, то при переходе к пределу при $\theta\to 0$ второе слагаемое справа в формуле (18) возрастает по абсолютной величине неограниченно, а все остальные слагаемые, в том числе и левая часть, ограничены. Следовательно, в формуле (18) необходимо положить $c_2=0$. При этом условии, используя формулу для функции Бесселя (IV.2.1), в пределе при $\theta=0$ находим

$$2^{-\alpha-1/2}P_n(1;\alpha,\beta) = c_1\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\frac{N}{2}\Big)^\alpha.$$

Далее, используя формулу (3.7), получаем

$$c_1 = 2^{-1/2}N^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\sqrt{2}\,N^\alpha}. \quad (19)$$

Аналогичный результат получается и в том случае, если $-1<\alpha<$ <0, ибо тогда равенство (18) можно разделить на величину $\theta^{-2\alpha}$ и, переходя к пределу при $\theta\to 0$, получить $c_2=0$. А при условии $c_2=0$ из равенства (18) следует (19), если α отрицательно и $-1<\alpha<0$.

Таким образом, из (18) и (19) следует формула

$$\theta^{-1/2}\Big(\sin\frac{\theta}{2}\Big)^{\alpha+1/2}\Big(\cos\frac{\theta}{2}\Big)^{\beta+1/2}P_n(\cos\theta;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\sqrt{2}\,N^\alpha}\,J_\alpha(N\theta)+ \\ +\int_0^\theta\sqrt{t}\,[J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt)-J_\alpha(Nt)J_{-\alpha}(N\theta)]\,F(t)\times \\ \times\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^{\alpha+1/2}\Big(\cos\frac{t}{2}\Big)^{\beta+1/2}P_n(\cos t;\alpha,\beta)\,dt. \quad (20)$$

Так как асимптотические свойства функций Бесселя $J_{-\alpha}(x)$ и $Y_\alpha(x)$ аналогичны, то доказательство сохраняется и в том случае, когда α — целое число. В этом случае в формуле (20) вместо $J_{-\alpha}(x)$ будет $Y_\alpha(x)$.

Интеграл в формуле (20) обозначим через $A_n(\theta)$, учитывая равенство (7). При условии $0 \leqslant t \leqslant \pi - \varepsilon$ функция (17) ограничена. Будем оценивать интеграл (20) при условии $0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и в зависимости от n.

Применяя неравенство Буняковского–Шварца, находим

$$A_n^2(\theta) \leqslant c_4 A_{nn} \int\limits_0^\theta |J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt) - J_\alpha(Nt)J_{-\alpha}(N\theta)|^2\, t\, dt. \tag{21}$$

Здесь величина A_{nn} определяется формулой (1.21). Для этой величины в силу формул (1.23) и (IV.7.18) имеем оценку

$$A_{nn} = O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{22}$$

Рассмотрим отдельно интеграл в правой части неравенства (21)

$$B_n(\theta) = \int\limits_0^\theta |J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt) - J_\alpha(Nt)J_{-\alpha}(N\theta)|^2 t\, dt. \tag{23}$$

Пусть сначала выполняется условие $0 < N\theta \leqslant 1$. Тогда при $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, используя формулу (VI.3.16) для функций Бесселя, получаем

$$B_n(\theta) \leqslant c_5 \int\limits_0^\theta |(N\theta)^\alpha (Nt)^{-\alpha} + (Nt)^\alpha (N\theta)^{-\alpha}|^2\, t\, dt = \\ = c_5 \int\limits_0^\theta (\theta^{2\alpha} t^{-2\alpha} + 2 + t^{2\alpha}\theta^{-2\alpha}) t\, dt = \\ = c_5\Big(\theta^{2\alpha}\frac{\theta^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} + \theta^2 + \theta^{-2\alpha}\frac{\theta^{2+2\alpha}}{2+2\alpha}\Big) \leqslant c_6\theta^2 \leqslant \frac{c_6}{N^2}.$$

При $\alpha > 1$, используя неравенство (3.27), находим

$$A_n(\theta) \leqslant c_5 \int\limits_0^\theta \sqrt{t}\,[(N\theta)^\alpha (Nt)^{-\alpha} + (N\theta)^{-\alpha}(Nt)^\alpha] t^{\alpha+1/2} n^\alpha\, dt = \\ = c_5 n^\alpha \Big[\theta^\alpha \int\limits_0^\theta t\, dt + \theta^{-\alpha} \int\limits_0^\theta t^{2\alpha+1}\, dt\Big] \leqslant c_6 N^\alpha \theta^{2+\alpha} \leqslant \frac{c_6}{N^2}.$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\alpha = 0$. Следовательно, для интеграла (20) имеем неравенство

$$|A_n(\theta)| \leqslant \frac{c_7}{N^{3/2}}, \qquad 0 < \theta \leqslant \frac{1}{N}. \tag{24}$$

Пусть теперь $1 \leqslant N\theta$. Тогда применяем асимптотическую формулу для функций Бесселя [IV.2, IV.5, IV.6]

$$J_\alpha(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\Bigl(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr) + O\Bigl(\frac{1}{z^{3/2}}\Bigr), \qquad z \geqslant a > 0. \tag{25}$$

Интеграл (23) разобьем на два интеграла по сегментам:

$$\Delta = \Bigl[0, \frac{1}{N}\Bigr], \qquad \sigma = \Bigl[\frac{1}{N}, \theta\Bigr]. \tag{26}$$

Для первого из них имеем

$$B_n(\Delta) \leqslant c_8 \int\limits_\Delta \Bigl| \frac{1}{\sqrt{N\theta}}\,(Nt)^{-\alpha} + (Nt)^\alpha \frac{1}{\sqrt{N\theta}} \Bigr|^2 t\,dt =$$

$$= \frac{c_8}{N\theta}\Bigl(N^{-2\alpha}\frac{N^{-2+2\alpha}}{2-2\alpha} + \frac{1}{N^2} + N^{2\alpha}\frac{N^{-2-2\alpha}}{2+2\alpha}\Bigr) \leqslant \frac{c_9}{N^2},$$

где $\alpha < 1, \alpha \neq 0$. А интеграл по второму сегменту (26) допускает оценку

$$B_n(\sigma) \leqslant c_{10} \int\limits_\sigma \Bigl| \frac{1}{\sqrt{N\theta}\,\sqrt{Nt}} + \frac{1}{\sqrt{N\theta}\,\sqrt{Nt}} \Bigr|^2 t\,dt =$$

$$= \frac{4c_{10}}{N^2\theta} \int\limits_\sigma dt = \frac{4c_{10}}{N^2\theta}\Bigl(\theta - \frac{1}{N}\Bigr) \leqslant \frac{c_{11}}{N^2}.$$

Заметим, что в этом неравенстве не использовано условие $\alpha < 1$.

Следовательно, аналогично (24) имеем оценку

$$|A_n(\theta)| \leqslant \frac{c_{12}}{N^{3/2}}, \qquad \theta \in \Bigl[\frac{1}{N}, \pi - \varepsilon\Bigr]. \tag{27}$$

Если же $\alpha \geqslant 1$, то интеграл (20), который определяет функцию $A_n(\theta)$, оцениваем отдельно на сегментах (26). Оценка на втором сегменте уже фактически получена. А для первого сегмента используем неравенство (3.27). С помощью этого неравенства находим

$$A_n(\Delta) \leqslant c_{14} n^\alpha \int\limits_\Delta |J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt) + J_\alpha(Nt)J_{-\alpha}(N\theta)|\, t^{\alpha+1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{15} n^\alpha \int\limits_\Delta [(N\theta)^{-1/2}(Nt)^{-\alpha} + (N\theta)^{-1/2}(Nt)^{\alpha}]\, t^{\alpha+1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{16} n^{\alpha-1/2} n^{1/2}\Bigl[n^{-\alpha}\frac{1}{n^2} + n^\alpha \frac{1}{n^{2\alpha+2}}\Bigr] = \frac{c_{17}}{n^2}. \tag{28}$$

А теперь можно установить очень важный результат.

Теорема 7.4. *Если $\alpha \geqslant -1/2$, то при фиксированном $\varepsilon > 0$ для многочленов Якоби на сегменте $[1/N, \pi - \varepsilon]$ имеет место формула*

$$\theta^{-1/2}\Bigl(\sin\frac{\theta}{2}\Bigr)^{\alpha+1/2}\Bigl(\cos\frac{\theta}{2}\Bigr)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta; \alpha, \beta) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\sqrt{2}\,N^\alpha}\, J_\alpha(N\theta) + O\Bigl(\frac{1}{n^{3/2}}\Bigr), \qquad \theta \in \Bigl[\frac{1}{N}, \pi - \varepsilon\Bigr], \tag{29}$$

причем постоянная в оценке остаточного члена не зависит от θ.

В самом деле, при условии $1 \leqslant N\theta$ интеграл (20) оценивается на основе неравенства (27). Поэтому из формулы (20) получается формула (29). Этим теорема 7.4 доказана.

Формула (29) справедлива и в случае целого α, ибо в этом случае в доказательствах вместо $J_{-\alpha}(x)$ будет фигурировать функция $Y_\alpha(x)$, асимптотические свойства которой аналогичны свойствам функции $J_{-\alpha}(x)$.

Асимптотическую формулу (29) можно преобразовать с помощью равенства (25). В самом деле, так как $N\theta \geqslant 1$, то, подставляя значение (25) в правую часть (29), находим

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta) = \\ = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\sqrt{\pi}\,N^{\alpha+1/2}}\cos\left(N\theta - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \qquad \theta \in \left[\frac{1}{N}, \pi - \varepsilon\right]. \tag{30}$$

Главные члены в асимптотических формулах (29) и (30) можно несколько упростить. Для этого надо вместо N подставить его значение из формулы (7), а затем проделать над гамма-функцией такие же преобразования, какие были выполнены в гл. IV при выводе асимптотической формулы для многочленов Лежандра.

Разумеется, для сегмента $[\varepsilon, \pi - 1/N]$ многочлены Якоби имеют аналогичные формулам (29) и (30) представления с той лишь разницей, что вместо α в правых частях надо поставить β.

А теперь рассмотрим очень важные весовые оценки многочленов Якоби на всем сегменте ортогональности.

Т е о р е м а 7.5 (С.Н. Бернштейн). *Если выполняются условия*

$$\alpha \geqslant -\frac{1}{2}, \qquad \beta \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{31}$$

то существует такая постоянная $c_{18} > 0$, *зависящая от* α *и* β, *что на сегменте* $[0,\pi]$ *выполняется неравенство*

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} |P_n(\cos\theta;\alpha,\beta)| \leqslant \frac{c_{18}}{\sqrt{n}}, \qquad \theta \in [0,\pi]. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Главный член в формуле (30) по абсолютной величине не превосходит $c_{19}/\sqrt{n}$. Следовательно, оценка (32) для сегмента $[1/N, \pi/2]$ следует из асимптотической формулы (30). Пусть теперь $\theta \in [0, 1/N]$. Тогда функцию Бесселя можно оценить сверху величиной $c_{20}(N\theta)^\alpha$. А интеграл $A_n(\theta)$ в формуле (20) оцениваем на основании неравенств (21), (22) и (24). В результате этого из формулы (20) при $\theta \in [0, 1/N]$ находим

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} |P_n(\cos\theta;\alpha,\beta)| \leqslant \\ \leqslant c_{21}\theta^{1/2}(N\theta)^\alpha + c_{22}\,\frac{\sqrt{\theta}}{n^{3/2}}\,\theta \leqslant \frac{c_{23}}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, неравенство (32) для сегмента $[0, \pi/2]$ доказано. Далее воспользуемся формулой (3.4), которую можно представить в виде

$$P_n(\cos\theta; \alpha, \beta) = (-1)^n P_n(-\cos\theta; \beta, \alpha).$$

Если θ изменяется от $\pi/2$ до π, то величина $t = \pi - \theta$ изменяется от $\pi/2$ до 0. Так как $\cos t = -\cos\theta$, то имеем

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta; \alpha, \beta) = \\ = (-1)^n \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos t; \beta, \alpha).$$

Здесь в правой части переменное t изменяется на сегменте $[0, \pi/2]$. Следовательно, неравенство (32) имеет место и на сегменте $[\pi/2, \pi]$. Этим теорема 7.5 доказана.

Замена переменного по формуле $x = \cos\theta$ приводит неравенство (32) к виду

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\,|P_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant \frac{c_{18}}{\sqrt{n}}, \qquad x \in [-1, 1]. \quad (33)$$

Из этой оценки следует, что стандартизованные многочлены Якоби внутри интервала ортогональности убывают со скоростью $1/\sqrt{n}$.

С помощью формулы (1.24) нетрудно получить аналогичные оценкам (32) и (33) неравенства для ортонормированных многочленов Якоби. В самом деле, так как подкоренное выражение в формуле (1.24) возрастает со скоростью n, то из (32) и (33) имеем неравенства

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} |\widehat{P}_n(\cos\theta; \alpha, \beta)| \leqslant c_{24}, \qquad \theta \in [0, \pi]. \quad (34)$$

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\,|\widehat{P}_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant c_{24}, \qquad x \in [-1, 1]. \quad (35)$$

Еще раз заметим, что все эти неравенства справедливы при условиях (31), т. е. при $\alpha \geqslant -1/2$ и $\beta \geqslant -1/2$.

Таковы весовые оценки многочленов Якоби на всем сегменте ортогональности.

§ 5. Ряды Фурье по многочленам Якоби

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[-1, 1]$ и ее квадрат интегрируем на этом сегменте с весом Якоби, т. е. выполняется условие

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta |f(t)|^2\, dt < \infty. \quad (1)$$

Тогда можно определить коэффициенты Фурье–Якоби по формуле

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) \widehat{P}_n(t;\alpha,\beta)\,dt, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

В результате функции $f(x)$ ставится в соответствие ряд Фурье по многочленам Якоби, или, коротко, ряд Фурье–Якоби

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x;\alpha,\beta). \tag{3}$$

Из асимптотических свойств многочленов Якоби, рассмотренных в предыдущих параграфах, следует, что свойства рядов (3) внутри интервала ортогональности $(-1,1)$ во многом аналогичны свойствам рядов Фурье по многочленам Лежандра. Так, например, аналогично теореме 4.6, если функция $f(t)$ помимо существования интеграла (1) в фиксированной точке $x \in (-1,1)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]^2 dt < \infty, \tag{4}$$

то в данной точке x ряд (3) сходится к функции $f(x)$, т. е. имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x;\alpha,\beta). \tag{5}$$

В самом деле, так как в силу неравенства (4.35) ортонормированные многочлены Якоби ограничены во всякой внутренней точке интервала ортогональности, то в данном случае можно применить общую теорему 1.11.

Далее, теорема 4.7 также переносится на ряды Фурье–Якоби. А именно, если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1,1]$ и удовлетворяет на этом сегменте условию Дини (IV.5.5), то разложение Фурье–Якоби (5) сходится равномерно на сегменте $[-1+\varepsilon,\, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ и ε зафиксировано произвольно малым. Доказательство этого утверждения проводится с помощью равномерной и весовой оценок ортонормированных многочленов Якоби аналогично доказательству теоремы 4.7, но необходимые оценки получаются значительно сложнее.

Более того, аналогично рядам Фурье–Лежандра для рядов Фурье–Якоби имеет место некоторая теорема о равносходимости, аналогичная теореме 4.11. Эта теорема доказывается в монографии Г. Сегё [I.6].

Из всего вышесказанного следует, что ряды Фурье–Якоби внутри интервала ортогональности $(-1,1)$ аналогичны рядам Фурье–Лежандра и даже рядам Фурье по тригонометрической системе. Но совершенно иная ситуация возникает, если рассматривать условия

равномерной сходимости рядов Фурье–Якоби на всем сегменте ортогональности $[-1,1]$ или даже только условия сходимости этого ряда в точках $x=\pm 1$. В самом деле, из формул (3.34) и (3.35) следует, что ортонормированные многочлены Якоби при условиях $\alpha > -1/2$ и $\beta > -1/2$ в точках $x=\pm 1$ возрастают со скоростью $n^{\alpha+1/2}$ и $n^{\beta+1/2}$ соответственно. Следовательно, даже для стремления к нулю общего члена ряда (3) в этих точках коэффициенты Фурье–Якоби (2) должны удовлетворять условию

$$\lim_{n\to\infty} n^{q+1/2} a_n(\alpha,\beta) = 0, \tag{6}$$

где, как обычно, q есть наибольшее из чисел α и β.

Докажем, что условие (6) выполняется, если, например, функция $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ имеет p непрерывных производных, где $p \geqslant q+1/2$. В самом деле, обозначим через $Q_{n-1}(x)$ многочлен наилучшего равномерного приближения порядка $n-1$ функции $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$. Тогда в силу непрерывности производной $f^{(p)}(x)$ аналогично (IV.5.14) по теореме 12.10 выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_{n-1}(f) = 0.$$

С другой стороны, используя ортогональность многочленов Якоби, имеем равенство

$$a_n(\alpha,\beta) = \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) \widehat{P}_n(t;\alpha,\beta)\, dt = \\ = \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \left[f(t) - Q_{n-1}(t)\right] \widehat{P}_n(t;\alpha,\beta)\, dt.$$

Далее, в силу неравенства Буняковского–Шварца, находим

$$a_n^2(\alpha,\beta) \leqslant \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \left[f(t) - Q_{n-1}(t)\right]^2 dt \leqslant c_1 E_{n-1}^2(f).$$

Таким образом, в данном случае при условии $p \geqslant q + 1/2$ предельное соотношение (6) выполняется.

Этот пример показывает, что при изучении достаточных условий равномерной сходимости ряда (3) на сегменте ортогональности $[-1,1]$ естественно предполагать непрерывную дифференцируемость функции $f(x)$ на всем сегменте. Рассмотрим простейшее достаточное условие равномерной сходимости ряда (3) на сегменте $[-1,1]$, обобщающее теорему 4.8.

Теорема 7.6. *Пусть $q = \max\{\alpha,\beta\} \geqslant -1/2$. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$ и $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\gamma$, где $0 < \gamma \leqslant 1$, причем выполняется условие*

$$p + \gamma > q + 1, \tag{7}$$

то ряд Фурье–Якоби функции $f(x)$ *сходится к ней равномерно на всем сегменте* $[-1,1]$, *т. е. имеем*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta),\qquad x\in[-1,1]. \tag{8}$$

Доказательство. В силу неравенства (I.5.8) имеем

$$E_n(f)\leqslant\frac{c_2}{n^{p+\gamma}},\qquad 0<\gamma\leqslant 1. \tag{9}$$

Оценим функцию Лебега для многочленов Якоби. В силу формулы (I.5.16), учитывая равномерную оценку многочленов Якоби на всем сегменте ортогональности (3.34), находим

$$L_n^2(x)\leqslant\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,dt\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\left|\sum_{k=0}^{n}\widehat{P}_k(t;\alpha,\beta)\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right|^2dt=$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,dt\sum_{k=0}^{n}|\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)|^2\leqslant c_3\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{2q+1}\leqslant c_4n^{2q+2},$$
$$x\in[-1,1]. \tag{10}$$

Таким образом, для постоянных Лебега в случае многочленов Якоби имеем неравенство

$$L_n\leqslant c_5n^{q+1}.$$

Следовательно, из неравенства Лебега

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right|\leqslant c_6(1+L_n)E_n(f),\qquad x\in[-1,1], \tag{11}$$

учитывая оценку (9), получим

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right|\leqslant\frac{c_7n^{q+1}}{n^{p+\gamma}},\qquad x\in[-1,1]. \tag{12}$$

В силу неравенства (7) теорема 7.6 доказана.

Равномерная сходимость ряда (8) на сегменте $[-1,1]$ на самом деле имеет место и при более общем условии $p+\gamma>q+1/2$. Однако доказательство теоремы при этом условии весьма громоздко и технически значительно сложнее, чем доказательство теорем 7.6 и 4.9.

Рассмотрим теперь так называемую весовую сходимость рядов Фурье на всем сегменте ортогональности.

Теорема 7.7. *Если* $\alpha \geqslant -1/2$ *и* $\beta \geqslant -1/2$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[-1,1]$, *то имеет место неравенство*

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right| \leqslant \leqslant c_8\sqrt{n}E_n(f), \qquad x\in[-1,1]. \quad (13)$$

Доказательство. Прежде всего, из первой части неравенства (10), учитывая весовую оценку многочлена Якоби (4.35), имеем

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}L_n(x) \leqslant \leqslant c_9\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(1-x)^{\alpha+1/2}(1+x)^{\beta+1/2}|\,\widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)|^2} \leqslant c_{10}\sqrt{n}, \qquad x\in[-1,1]. \quad (14)$$

С другой стороны, имеем поточечное неравенство Лебега

$$|f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)| \leqslant [1+L_n(x)]\,E_n(f), \qquad x\in[-1,1]. \quad (15)$$

Умножая это неравенство на весовой множитель и учитывая неравенство (14), получим оценку (13). Этим теорема 7.7 доказана.

В частности, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$, причем $f^{(p)}(x)\in \operatorname{Lip}\gamma$, то в силу неравенства (9) из (13) находим неравенство

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right| \leqslant \frac{c_{11}\sqrt{n}}{n^{p+\gamma}}, \qquad x\in[-1,1], \qquad n>p. \quad (16)$$

Следовательно, если $p+\gamma>1/2$, то ряд Фурье–Якоби сходится с весом на всем сегменте ортогональности к функции $f(x)$.

Весовую оценку функции Лебега (14) мы установили с помощью неравенства (4.35). Более тонкими и громоздкими построениями доказывается, что на самом деле в правой части неравенства (14) вместо $\sqrt{n}$ можно поставить $\ln n$. Следовательно, таким же образом можно улучшить и неравенства (13) и (16). Этот законченный результат о скорости весовой сходимости рядов Фурье–Якоби был установлен С.Н. Бернштейном в 1930 г.

Наиболее общие результаты о скорости сходимости рядов Фурье–Якоби на всем сегменте ортогональности в недавнее время получили В.М. Бадков, Г.И. Натансон, А.В. Зорщиков и С.А. Агаханов.

§ 6. Ультрасферические многочлены Гегенбауэра

Если у многочленов Якоби параметры α и β совпадают, то такие ортогональные многочлены называются *ультрасферическими* или *многочленами Гегенбауэра.* Таким образом, многочлены Гегенбауэра

$$\widehat{P}_n(x;\alpha,\alpha)=\widehat{P}_n(x;\alpha),\qquad \alpha>-1,\quad n=0,1,\ldots,\tag{1}$$

ортогональны с весовой функцией

$$h(x)=(1-x^2)^{\alpha},\qquad x\in(-1,1),\quad \alpha>-1.\tag{2}$$

Но в математической литературе закрепилось другое соответствие параметра весовой функции и параметра в обозначении ортогональных многочленов Гегенбауэра.

Рассматривается весовая функция

$$h(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2},\qquad x\in(-1,1),\quad \lambda>-\frac{1}{2}.\tag{3}$$

Эта весовая функция определяет *ортонормированные многочлены Гегенбауэра*

$$\{\widehat{G}_n(x;\lambda)\}.\tag{4}$$

Таким образом, имеем равенство

$$\widehat{G}_n(x;\lambda)=\widehat{P}_n\Big(x;\lambda-\frac{1}{2}\Big).\tag{5}$$

Но стандартизация многочленов Гегенбауэра не является частным случаем стандартизации многочленов Якоби, а производится по-другому. А именно, стандартизованные многочлены Гегенбауэра определяются по формуле

$$G_n(x;\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)}\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1/2)}\,P_n\Big(x;\lambda-\frac{1}{2}\Big).\tag{6}$$

В силу формул (5) и (6) на многочлены Гегенбауэра переносятся все свойства многочленов Якоби. Но поскольку в этом случае $\alpha=\beta$, то многие формулы упрощаются.

Из формулы (2.10) следует, что многочлены Гегенбауэра (4) и (6) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y''-(2\lambda+1)\,xy'+n(n+2\lambda)\,y=0.\tag{7}$$

Наиболее употребительны формулы

$$G_n(x;\lambda)=\frac{(-2)^n\Gamma(n+\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-1/2}}\,[(1-x^2)^{n+\lambda-1/2}]^{(n)},\tag{8}$$

$$(n+1)G_{n+1}(x;\lambda)=2(n+\lambda)xG_n(x;\lambda)-(n+2\lambda-1)G_{n-1}(x;\lambda),\tag{9}$$

$$G_0(x;\lambda)=1,\qquad G_1(x;\lambda)=2\lambda x,$$

$$G_n(-x;\lambda)=(-1)^nG_n(x;\lambda),\tag{10}$$

$$G_n'(x;\lambda)=2\lambda G_{n-1}(x;\lambda+1),\tag{11}$$

$$(1-x^2)G'_n(x;\lambda) = -nxG_n(x;\lambda) + (n+2\lambda-1)G_{n-1}(x;\lambda) = \\ = (n+2\lambda)xG_n(x;\lambda) - (n+1)G_{n+1}(x;\lambda), \quad (12)$$

$$G_n(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}, \quad (13)$$

$$G_n(\cos\theta;\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(\lambda)_m(\lambda)_{(n-m)}}{m!\,(n-m)!}\cos[(n-2m)\theta], \quad (14)$$

$$G_n(\pm 1;\lambda) = (\pm 1)^n \frac{(2\lambda)_n}{n!} = (\pm 1)^n \binom{n+2\lambda-1}{n}, \quad (15)$$

$$G_{2m}(0;\lambda) = \frac{(-1)^m(\lambda)_m}{m!}, \qquad G_{2m+1}(0;\lambda) = 0. \quad (16)$$

Некоторые из этих формул являются следствием формулы (6). В их доказательствах применяются свойства гамма-функции Эйлера. Напомним, что в последних формулах применяется символ Похгаммера

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1).$$

Кроме того, через $[a]$ в формуле (13), как обычно, обозначается целая часть числа a.

Если $\lambda = 0$, то в силу (3) имеем многочлены Чебышева первого рода, для которых принимается другая стандартизация. Поэтому здесь случай $\lambda = 0$ исключается.

Далее, из производящей функции для многочленов Якоби (2.5), полагая в ней $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, находим формулу

$$\frac{2^{\lambda-1/2}}{A(1-xw+A)^{\lambda-1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\Big(x;\lambda-\frac{1}{2}\Big)\,w^n.$$

Заменяя здесь многочлен Якоби по формуле (6), получим

$$\frac{\Gamma(\lambda+1/2)2^{\lambda-1/2}}{\Gamma(2\lambda)A(1-xw+A)^{\lambda-1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda+1/2)}{\Gamma(n+2\lambda)}\,G_n(x;\lambda)\,w^n. \quad (17)$$

Еще одна производящая функция для многочленов Гегенбауэра определяется формулой

$$\frac{1}{(1-2xw+w^2)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x;\lambda)w^n. \quad (18)$$

Доказательство этой формулы проводится так же, как доказательство формулы (IV.1.11) для многочленов Лежандра. Вообще почти все формулы настоящего параграфа являются обобщением некоторых свойств многочленов Лежандра, которые соответствуют случаю $\lambda = 1/2$.

Формула (18) свидетельствует о том, что стандартизация многочленов Гегенбауэра по формуле (6) выбрана удачно, ибо, как известно, стандартизация выбирается таким образом, чтобы упростить основные формулы для ортогональных многочленов.

На многочлены Гегенбауэра нетрудно перенести и некоторые другие результаты о многочленах Лежандра, изложенные в гл. IV. Например, метод Лиувилля–Стеклова можно применять без использования функций Бесселя. Для многочленов Гегенбауэра получается формула вида (IV.4.10), в которой коэффициенты c_1 и c_2 определяются с помощью формул (11) и (16). В результате получается обобщение теоремы 4.5 на случай многочленов Гегенбауэра. При этом равномерные оценки для многочленов Гегенбауэра на всем сегменте ортогональности и весовые оценки получаются с конкретными постоянными.

§ 7. Некоторые дополнения и задачи

1. Сначала рассмотрим связь многочленов Якоби с гипергеометрической функцией Гаусса.

Как известно [IV.1, IV.5, IV.6], гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(z;a,b,c)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{k!\,(c)_k}\,z^k=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)b(b+1)\ldots(b+k-1)}{k!\,c(c+1)\ldots(c+k-1)}\,z^k \quad (1)$$

является решением гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)\,u''_{zz}+[c-(a+b+1)z]\,u'_z-abu=0. \quad (2)$$

С другой стороны, многочлен Якоби $P_n(x;\alpha,\beta)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\,y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,y'+n(n+\alpha+\beta+1)\,y=0. \quad (3)$$

В уравнении (3) сделаем замену независимого переменного по формуле $x=1-2z$. В результате получаем уравнение

$$z(1-z)\,y''_{zz}+[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)z]\,y'_z+n(n+\alpha+\beta+1)\,y=0. \quad (4)$$

Сравнивая уравнения (2) и (4), находим

$$a=-n,\quad b=n+\alpha+\beta+1,\quad c=\alpha+1. \quad (5)$$

Следовательно, при условиях (5) имеем

$$P_n(1-2z;\alpha,\beta)=AF(z;-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1). \quad (6)$$

Поскольку $F(0;-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1)=1$ и

$$P_n(1;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}=\binom{n+\alpha}{n},$$

то имеем $A = \binom{n+\alpha}{n}$. Следовательно, формулу (6) после замены $x = 1 - 2z$ можно представить в виде

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \binom{n+\alpha}{n} F\Big(\frac{1-x}{2}; -n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1\Big). \qquad (7)$$

А теперь рассмотрим первое из условий (5). Так как

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = (-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1),$$

то это произведение равно нулю при $k \geqslant n+1$. Следовательно, разложение (1) в этом случае содержит лишь $n+1$ слагаемых. Таким образом, из формул (1) и (7) находим

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k!\,(\alpha+1)_k} \Big(\frac{1-x}{2}\Big)^k. \qquad (8)$$

Раскрывая символ Похгаммера для коэффициента разложения (8), получаем

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)} \times$$
$$\times (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\dots(n+\alpha+\beta+k) =$$
$$= \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\dots(n+\alpha+\beta+k) \times$$
$$\times (\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n).$$

Следовательно, равенство (8) можно представить в виде

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{n!}\Big[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (n+\alpha+\beta+1)\dots$$
$$\dots(n+\alpha+\beta+k)(\alpha+k+1)\dots(\alpha+n)\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^k +$$
$$+ (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\dots(2n+\alpha+\beta)\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^n\Big]. \qquad (9)$$

2. Рассмотрим теперь функции второго рода для многочленов Якоби. Как обычно, при $x \in [-1,1]$ и $t \notin [-1,1]$ имеем разложение ядра Коши

$$\frac{1}{t-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n(\alpha,\beta)} P_n(x;\alpha,\beta)\, Q_n(t;\alpha,\beta). \qquad (10)$$

Если $x \in [-1,1]$, а t фиксировано и не принадлежит сегменту $[-1,1]$, то левая часть (10) есть аналитическая функция по x. Следовательно, ряд (10) сходится равномерно на сегменте $[-1,1]$ и даже равномерно по переменному t, изменяющемуся на некотором компакте, расположенном в дополнении сегмента $[-1,1]$ на комплексной плоскости.

Как обычно, коэффициенты разложения (10) определяются формулой

$$Q_n(t;\alpha,\beta) = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, \frac{P_n(x;\alpha,\beta)}{t-x} \, dx. \tag{11}$$

Фактически интеграл (11) есть интеграл типа Коши с функцией распределения на сегменте $[-1,1]$ и определенный вне этого сегмента. Для изучения функций (11) на сегменте $[-1,1]$ можно применять все теоремы о граничных свойствах интегралов типа Коши [III.14, VIII.2].

С помощью формулы Родрига для многочленов Якоби (1.2) после интегрирования по частям равенство (11) приводится к виду

$$Q_n(t;\alpha,\beta) = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}}{(t-x)^{n+1}} \, dx. \tag{12}$$

Рассмотрим канонический эллипс Γ_R, который определяется уравнением

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} = 1. \tag{13}$$

Как обычно, через G_R обозначим внутренность эллипса (13), а через D_R — внешность.

Многочлены Якоби и их функции второго рода биортогональны на любом эллипсе (13). В самом деле, в силу формулы (11) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_R} P_n(t;\alpha,\beta) Q_m(t;\alpha,\beta)\, dt = \\
&\quad = \int_{\Gamma_R} P_n(t;\alpha,\beta) \left[\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \frac{P_m(x;\alpha,\beta)}{t-x}\, dx \right] dt = \\
&\quad = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m(x;\alpha,\beta) \left[\int_{\Gamma_R} P_n(t;\alpha,\beta)\, \frac{dt}{t-x} \right] dx = \\
&\quad = 2\pi i \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m(x;\alpha,\beta) P_n(x;\alpha,\beta)\, dx = 0, \qquad n \neq m.
\end{aligned}$$

Аналогично степенным рядам можно рассматривать ряды по многочленам Якоби

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x;\alpha,\beta). \tag{14}$$

На эти ряды переносятся многие теоремы о степенных рядах. Например, если для коэффициентов ряда (14) выполняется условие

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < 1, \tag{15}$$

то этот ряд сходится в области G_R и расходится в области D_R, причем сходимость равномерна на любом компакте в G_R. Справедлив также и аналог первой теоремы Абеля о степенных рядах. Если ряд (14) сходится в некоторой точке z_0 комплексной плоскости, причем $|\Phi(z_0)| = R > 1$, где функция $w = \Phi(z)$ отображает конформно и однолистно внешность сегмента $[-1, 1]$ на дополнение единичного круга, то ряд (14) сходится внутри области G_R.

В монографии П.К. Русева [II.6] подробно исследованы ряды Фурье–Якоби для функций, аналитических в канонических областях G_R, $R > 1$.

В работе Р.В. Арутюняна [XI.6] приведены различные результаты о максимальной сходимости рядов Фурье–Якоби.

3. Рассмотрим теперь производящую функцию многочленов Якоби (2.5)

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{A(1-t+A)^{\alpha}(1+t+A)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x;\alpha,\beta)\, t^n, \tag{16}$$

где

$$A = \sqrt{1-2tx+t^2}, \qquad |t| < 1, \quad |x| < 1, \tag{17}$$

и имеется в виду главное значение корня. В силу неравенства (4.32) имеем оценку

$$|P_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant \frac{c_0(x)}{\sqrt{n}}, \qquad |x| < 1. \tag{18}$$

Умножим разложение (16) на некоторую функцию $\varphi(t)$, интегрируемую на сегменте $[-1, 1]$, и проинтегрируем разложение (16) почленно. В результате получим

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2^{\alpha+\beta}\varphi(t)\,dt}{A(1-t+A)^{\alpha}(1+t+A)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x;\alpha,\beta), \tag{19}$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$b_n(\varphi) = \int_{-1}^{1} t^n \varphi(t)\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Интеграл (19) можно назвать *интегралом типа Якоби*, ибо ядро этого интеграла есть производящая функция многочленов Якоби. Формулы (19) и (20) указывают новый способ разложения функций в ряды Фурье–Якоби. При этом способе очень легко вычисляются

коэффициенты разложения (20). Было бы интересно рассмотреть свойства интегралов типа Якоби (19).

4. В весовом неравенстве С.Н. Бернштейна для многочленов Якоби (4.35)

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}|\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant c_{17}(\alpha,\beta), \qquad x\in[-1,1], \tag{21}$$

постоянная $c_{17}(\alpha,\beta)$ зависит от α и β. Было бы интересно найти эту зависимость или хотя бы определить скорость возрастания величины $c_{17}(\alpha,\beta)$ при $\alpha\to\infty$ и $\beta\to\infty$. Эта задача ставилась в работе автора [XI.46].

5. Приведем еще некоторые формулы для многочленов Якоби, которые могут оказаться полезными в каких-либо применениях. С помощью вышеизложенных результатов получаются формулы

$$(1-x)P_n(x;\alpha+1,\beta)+(1+x)P_n(x;\alpha,\beta+1)=2P_n(x;\alpha,\beta),$$

$$(2n+\alpha+\beta)P_n(x;\alpha-1,\beta) = \\ =(n+\alpha+\beta)P_n(x;\alpha,\beta)-(n+\beta)P_{n-1}(x;\alpha,\beta),$$

$$(2n+\alpha+\beta)P_n(x;\alpha,\beta-1) = \\ =(n+\alpha+\beta)P_n(x;\alpha,\beta)+(n+\alpha)P_{n-1}(x;\alpha,\beta),$$

$$P_n(x;\alpha,\beta-1)-P_n(x;\alpha-1,\beta)=P_{n-1}(x;\alpha,\beta),$$

$$\Big(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\Big)(1-x)P_n(x;\alpha+1,\beta) = \\ =(n+\alpha+1)P_n(x;\alpha,\beta)-(n+1)P_{n+1}(x;\alpha,\beta),$$

$$\Big(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\Big)(1+x)P_n(x;\alpha,\beta+1) = \\ =(n+\beta+1)P_n(x;\alpha,\beta)+(n+1)P_{n+1}(x;\alpha,\beta).$$

Глава VIII

ОТДЕЛЬНЫЕ ВАЖНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. Ортогональные на окружности многочлены

Теория ортогональных многочленов состоит из двух различных по результатам и по методам исследований частей: ортогональность в действительной области и ортогональность в комплексной области. В первом случае имеются в виду алгебраические многочлены с действительными коэффициентами, ортогональные на некотором конечном или бесконечном интервале (a, b) действительной оси. Во втором случае имеются в виду алгебраические многочлены с комплексными коэффициентами, ортогональные либо на единичной окружности $|z| = 1$, либо на произвольной кривой Γ комплексной плоскости, либо по площади некоторой области G, расположенной в комплексной плоскости. В настоящем параграфе рассматривается простейший случай ортогональности в комплексной области — ортогональность по единичной окружности.

Неотрицательная периодическая функция $g(\theta)$ называется *весовой функцией* на единичной окружности $|z| = 1$, где $z = e^{i\theta}$, если выполняются два условия:

$$0 < \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta < \infty. \tag{1}$$

Эти условия, в частности, выполняются, если функция $g(\theta)$ кусочно непрерывна и имеет только конечное число нулей на сегменте $[0, 2\pi]$.

Система алгебраических многочленов $\{\varphi_n(z)\}$ с комплексными коэффициентами называется *ортогональной по окружности* $|z| = 1$ с весовой функцией $g(\theta)$, если каждый многочлен $\varphi_n(z)$ имеет степень n и выполняются условия

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)}\, d\theta = 0, \qquad n \neq m, \quad z = e^{i\theta}. \tag{2}$$

Как обычно, рассматриваются *ортогональные на окружности многочлены с единичным старшим коэффициентом*

$$\widetilde{\varphi}_n(z) = z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots + a_0^{(n)}. \tag{3}$$

Для этих многочленов выполняются условия (2). А теперь будем считать, что многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ ортонормированы, т. е. полагаем

$$\varphi_n(z) = \widehat{\varphi}_n(z) = \alpha_n \widetilde{\varphi}_n(z), \qquad \alpha_n > 0. \tag{4}$$

Тогда вместо (2) имеем условия

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\,d\theta = \delta_{nm}. \tag{5}$$

Теорема существования для многочленов (3) доказывается аналогично теореме 1.1 Но можно поступить по-иному.

Вводим комплексные моменты весовой функции

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Из этой формулы следуют равенства

$$c_{-n} = \overline{c}_n, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

В связи с этими равенствами рассмотрим определители

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{vmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Если перейти к сопряженным комплексным величинам, то в силу равенств (7) определитель (8) будет лишь транспонирован. Следовательно, все определители (8) — действительные числа. Далее, как и в гл. I, нетрудно доказать, что все определители (8) положительны. Следовательно, для ортонормированных многочленов имеем формулу

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & c_{-1} \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^n \end{vmatrix}, \qquad n \geqslant 1. \tag{9}$$

При этом старший коэффициент определяется равенством

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Ортогональные многочлены (3) и (9) по своим свойствам аналогичны многочленам, ортогональным на интервале (a, b).

Сначала отметим первый критерий ортогональности, который заключается в том, что вместо (2) можно рассматривать условия

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\varphi_n(z)\bar{z}^k\,d\theta = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Во-вторых, для многочлена (3) имеет место второй критерий ортогональности. В самом деле, обозначим через $\widetilde{W}_n(c)$ множество всех алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами степени n с единичным старшим коэффициентом. Тогда для всякого многочлена $\widetilde{Q}_n(z) \in \widetilde{W}_n(c)$ можно ввести разложение

$$\widetilde{Q}_n(z) = \frac{1}{\alpha_n}\,\varphi_n(z) + b_{n-1}\varphi_{n-1}(z) + \ldots + b_0\varphi_0(z). \tag{12}$$

Рассмотрим задачу на минимум интеграла

$$A(\widetilde{Q}_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)|\widetilde{Q}_n(z)|^2\,d\theta \tag{13}$$

на множестве многочленов $\widetilde{W}_n(c)$. Применяя разложение (12), получаем

$$A(\widetilde{Q}_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\left|\frac{1}{\alpha_n}\,\varphi_n(z) + b_{n-1}\varphi_{n-1}(z) + \ldots + b_0\varphi_0(z)\right|^2 d\theta = \\ = \frac{1}{\alpha_n^2} + |b_{n-1}|^2 + \ldots + |b_0|^2. \tag{14}$$

Таким образом, минимум интеграла (13) достигается только при условии $\widetilde{Q}_n(z) = \widetilde{\varphi}_n(z)$, и второй критерий ортогональности доказан.

Далее, во многих формулах и теоремах для ортонормированных многочленов (9) фигурируют специальные вспомогательные многочлены

$$\psi_n(z) = z^n\,\overline{\varphi}_n\Big(\frac{1}{z}\Big), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

Здесь $\overline{\varphi}_n$ означает замену всех коэффициентов многочлена $\varphi_n(z)$ сопряженными комплексными числами. Из формулы (15) имеем

$$\psi_n(0) = \alpha_n, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

Рассмотрим разложение

$$\frac{\varphi_n(z) - \alpha_n z^n}{z^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)}\overline{\varphi}_k\Big(\frac{1}{z}\Big). \tag{17}$$

Умножаем это равенство почленно на $\varphi_k(z)$ и интегрируем, полагая $z = e^{i\theta}$. В результате при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ получаем равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\varphi_n(z)\,\frac{\varphi_k(z)}{z^{n-1}}\,d\theta - \frac{\alpha_n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} z\varphi_k(z)g(\theta)\,d\theta = a_k^{(n)}. \tag{18}$$

Вводим обозначение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)z\,\varphi_k(z)\,d\theta = \lambda_k. \tag{19}$$

Поскольку первый интеграл слева в равенстве (18) равен нулю в силу

ортогональности многочлена (9), то равенство (18) приводится к виду $a_k^{(n)} = -\alpha_n\lambda_k$. Следовательно, из (17) имеем формулу

$$\frac{\varphi_n(z)}{\alpha_n} = z^n - z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right). \tag{20}$$

Заменяя здесь n на $n+1$, находим

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\alpha_{n+1}} = z^{n+1} - z^{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right). \tag{21}$$

Заметим, что в силу определения (19) λ_k не зависят от n. Следовательно, умножая равенство (20) на z и результат вычитая из равенства (21), получаем

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\alpha_{n+1}} - \frac{z\varphi_n(z)}{\alpha_n} = -\lambda_n z^n\,\overline{\varphi}_n\left(\frac{1}{z}\right) = -\lambda_n\psi_n(z). \tag{22}$$

Для определения величины λ_n положим в этом равенстве $z=0$. В результате имеем

$$\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\alpha_{n+1}} = -\lambda_n\alpha_n, \qquad \lambda_n = -\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\alpha_n\alpha_{n+1}}. \tag{23}$$

Подставляя значение (23) в формулу (22), находим

$$\alpha_n\varphi_{n+1}(z) = \alpha_{n+1}z\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\psi_n(z). \tag{24}$$

Это рекуррентная формула для вычисления многочленов $\{\varphi_n(z)\}$. Здесь вспомогательный многочлен $\psi_n(z)$ определяется равенством (15).

Аналогично доказывается рекуррентная формула для вспомогательных многочленов (15)

$$\alpha_n\psi_{n+1}(z) = \alpha_{n+1}\psi_n(z) + \overline{\varphi_{n+1}(0)}z\varphi_n(z). \tag{25}$$

С помощью рекуррентных формул (24) и (25) устанавливается много различных свойств многочленов (9). Отметим только аналог формулы Кристоффеля–Дарбу

$$K_n(z,w) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(w)} = \frac{\psi_n(z)\overline{\psi_n(w)} - z\overline{w}\,\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}}{1 - z\overline{w}}. \tag{26}$$

Рассмотрим один весьма характерный пример, когда многочлены (9) вычисляются, начиная с некоторого номера.

Пусть многочлен $h_m(z)$ степени m отличен от нуля в замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$. Весовую функцию определим по формуле

$$g(\theta) = \frac{1}{|h_m(z)|^2}, \qquad z = e^{i\theta}. \tag{27}$$

Докажем, что для соответствующих весу (27) ортогональных многочленов имеет место формула

$$\varphi_n(z) = z^n\overline{h}_m\left(\frac{1}{z}\right), \qquad n = m, m+1, \ldots \tag{28}$$

В самом деле, пусть $Q_k(z)$ — произвольный многочлен степени $k < n$. Тогда имеем последовательно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\varphi_n(z)\overline{Q_k(z)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{n-1}\overline{h}_m\Big(\frac{1}{z}\Big)\frac{\overline{Q_k(z)}\,dz}{h_m(z)\overline{h_m(z)}} = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^{n-1}\overline{Q}_k(1/z)}{h_m(z)}\,dz = 0.$$

Кроме того, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|\varphi_n(z)|^2\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\overline{h}_m(1/z)|^2}{|h_m(z)|^2}\,|dz| = 1.$$

Рассмотрим теперь ряды Фурье по многочленам, ортогональным на единичной окружности.

Пусть в единичном круге $|z| < 1$ дана аналитическая функция $f(z)$. Предположим, что эта функция $f(z)$ имеет на окружности угловые граничные значения $f(\zeta)$ при $|\zeta| = 1$, причем, например, по этим значениям она представима интегралом Коши, т. е. справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad |z| < 1. \tag{29}$$

Это все выполняется, если, например, функция $f(z)$ входит в класс H_2 [I.2, III.1]. Кроме того, предположим, что существует интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|f(z)|^2\,d\theta. \tag{30}$$

Тогда для этой функции можно определить коэффициенты Фурье по формуле

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)f(z)\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

и рассматривать ряд Фурье по ортогональным многочленам

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(z), \qquad |z| < 1. \tag{32}$$

На эти ряды переносятся многие известные свойства степенных рядов. В частности, частичные суммы ряда (32) минимизируют интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|f(z) - Q_n(z)|^2\,d\theta \tag{33}$$

в классе всех многочленов $Q_n(z)$ степени не выше n, т. е. справедливо

неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|f(z)-S_n(z;f)|^2\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|f(z)-Q_n(z)|^2\,d\theta. \qquad (34)$$

Отсюда сразу следует неравенство Бесселя для рядов (32)

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|f(z)|^2\,d\theta. \qquad (35)$$

Вопрос о сходимости ряда (32) внутри круга $|z|<1$ решается довольно просто. Но значительно труднее решается вопрос о сходимости ряда (32) в точках окружности $|z|=1$. При этом в теоремах об условиях сходимости ряда (32) фигурируют различные свойства весовой функции $g(\theta)$.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос, который математики обычно задают при введении какой-либо новой и сложной конструкции: а что это будет в самом простом но нетривиальном случае?

Если $g(\theta)\equiv 1$, то имеем

$$\varphi_n(z)=z^n, \qquad n=0,1,\ldots \qquad (36)$$

Следовательно, ряды (32) являются обобщением рядов Тейлора для функций, аналитических в единичном круге $|z|<1$. Именно поэтому при рассмотрении рядов Фурье (32) надо предполагать, что функция $f(z)$ аналитическая в единичном круге. И поэтому также во многих исследованиях рядов (32) пытаются перенести на эти ряды известные свойства рядов Тейлора.

Многочлены (9) впервые рассмотрел Г. Сегё в 1921 г. Дальнейшие результаты получили В.И. Смирнов, Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн, Я.Л. Геронимус. Подробное изложение основных свойств многочленов, ортогональных на единичной окружности, содержится в монографиях Г. Сегё [I.6] и Я.Л. Геронимуса [I.2].

В работах [XI.27, XI.30] рассмотрены многие свойства многочленов, ортогональных по контуру. В монографии [I.8] изложена теория многочленов, ортогональных по площади области.

Теория ортогональных многочленов в комплексной области подробно рассмотрена в монографии В.И. Смирнова и Н.А. Лебедева [III.10].

§ 2. Главные формулы Сегё в теории ортогональных многочленов

Пусть на сегменте $[-1,1]$ определена весовая функция $h(x)$ и соответствующие ортонормированные многочлены $\{B_n(x)\}$. Имеем равенства

$$\int_{-1}^{1} h(x)B_n(x)B_m(x)\,dx=\delta_{nm}. \qquad (1)$$

С другой стороны, пусть на плоскости w на единичной окружности $|w| = 1$ определена весовая функция

$$g(\theta) = h(\cos\theta)|\sin\theta|, \tag{2}$$

и этой весовой функции соответствуют ортонормированные многочлены $\{\varphi_n(w)\}$, для которых выполняются условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\varphi_n(w)\overline{\varphi_m(w)}\,d\theta = \delta_{nm}, \qquad w = e^{i\theta}. \tag{3}$$

Между плоскостями z и w устанавливаем соответствие

$$z = \frac{1}{2}\Big(w + \frac{1}{w}\Big). \tag{4}$$

Тогда при условии $w = e^{i\theta}$ имеем $x = \cos\theta$.

Весовая функция (2) является четной функцией. Следовательно, все моменты (1.6) суть действительные числа. Поэтому из формулы (1.9) следует, что все коэффициенты ортогонального многочлена $\varphi_n(z)$ — действительные числа.

Рассмотрим многочлен

$$Q_n(x) = w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^n\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big), \qquad w = e^{i\theta}. \tag{5}$$

Докажем сначала, что правая часть равенства (5) есть действительно многочлен степени n по переменному x при условии $x = \cos\theta$. Вводим разложение

$$\varphi_{2n}(w) = \sum_{k=0}^{2n} a_k^{(2n)} w^k.$$

При $w = e^{i\theta}$ имеем

$$e^{-in\theta}\varphi_{2n}(e^{i\theta}) + e^{in\theta}\varphi_{2n}(e^{-i\theta}) = \sum_{k=0}^{2n} a_k^{(2n)}[e^{-in\theta+ik\theta} + e^{in\theta-ik\theta}] =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{2n} a_k^{(2n)}\cos(n-k)\theta = 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2n)}\cos(n-k)\theta + 2a_n^{(2n)} +$$

$$+ 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k^{(2n)}\cos(n-k)\theta = 2a_n^{(2n)} + 2\sum_{k=0}^{n-1}(a_k^{(2n)} + a_{2n-k}^{(2n)})\cos(n-k)\theta =$$

$$= 2a_n^{(2n)} + 2\sum_{k=0}^{n-1}(a_k^{(2n)} + a_{2n-k}^{(2n)})T_{n-k}(x). \tag{6}$$

Здесь $T_m(x)$ — многочлен Чебышева первого рода. Таким образом, формула (5) действительно определяет некоторый многочлен степени n.

Докажем, что многочлен (5) ортогонален всем многочленам младших степеней. Имеем последовательно

$$\int_{-1}^{1} h(x)Q_n(x)T_k(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} Q_n(\cos\theta)\cos(k\theta)\,h(\cos\theta)|\sin\theta|\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\Big[w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^n\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big]\Big(w^k + \frac{1}{w^k}\Big)g(\theta)\,d\theta. \quad (7)$$

Но ведь многочлены $\varphi_n(w)$ ортогональны с четным весом $g(\theta)$. Поэтому имеем очевидные равенства

$$\int_{0}^{\pi} w^{-n\pm k}\varphi_{2n}(w)g(\theta)\,d\theta = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$
$$\int_{0}^{\pi} w^{n\pm k}\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)g(\theta)\,d\theta = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Следовательно, имеем

$$\int_{-1}^{1} h(x)Q_n(x)T_k(x)\,dx = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Таким образом, многочлен (5) действительно является многочленом, ортогональным с весом $h(x)$.

Вычислим норму этого многочлена. Имеем

$$\int_{-1}^{1} h(x)Q_n^2(x)\,dx = \int_{0}^{\pi}\Big|\,w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^n\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big|^2 g(\theta)\,d\theta =$$
$$= \pi\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\Big|\,w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^n\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big|^2 g(\theta)\,d\theta =$$
$$= \pi + \pi + \mathrm{Re}\int_{0}^{2\pi}\varphi_{2n}(w)\overline{w^{2n}\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)}g(\theta)\,d\theta =$$
$$= 2\pi + 2\pi\,\frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}} = 2\pi\Big[1 + \frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\Big], \quad (8)$$

ибо справедлива формула

$$w^{2n}\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big) = \frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\,[\varphi_{2n}(w) + R_{2n-1}(w)],$$

где $R_{2n-1}(w)$ есть некоторый многочлен степени не более $2n-1$ и $\alpha_{2n} = a_{2n}^{(2n)}$. Следовательно, для ортонормированного многочлена

имеем равенство

$$B_n(x) = A_n\Big[w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^n\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big], \qquad w = e^{i\theta}, \tag{9}$$

где

$$A_n = (2\pi)^{-1/2}\Big[1 + \frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\Big]^{-1/2}. \tag{10}$$

Разумеется, в формуле (9) с сегмента $[-1,1]$ можно перейти на всю плоскость, т. е. имеем

$$B_n(z) = A_n\Big[w^{-n}\varphi_{2n}(w) + w^n\varphi_{2n}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big], \tag{11}$$

где z и w связаны условием (4).

Аналогично доказывается формула

$$B_n(x) = c_n\Big[w^{-n+1}\varphi_{2n-1}(w) + w^{n-1}\varphi_{2n-1}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big], \tag{12}$$

где

$$c_n = (2\pi)^{-1/2}\Big[1 - \frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\Big]^{-1/2}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь весовую функцию

$$h_1(x) = (1-x^2)h(x), \qquad x \in [-1,1]. \tag{14}$$

Соответствующие этой весовой функции ортонормированные многочлены обозначим через $\{F_n(x)\}$. Тогда аналогично формулам (9) и (12) имеем формулы

$$F_n(x) = D_n\Big[\frac{w^{-n}\varphi_{2n+2}(w) - w^{n+2}\varphi_{2n+2}(1/w)}{w^2-1}\Big], \tag{15}$$

$$F_n(x) = H_n\Big[\frac{w^{-n+1}\varphi_{2n+1}(w) - w^{n+1}\varphi_{2n+1}(1/w)}{w^2-1}\Big], \tag{16}$$

где

$$D_n = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2}\Big[1 - \frac{\varphi_{2n+2}(0)}{\alpha_{2n+2}}\Big]^{-1/2}, \tag{17}$$

$$H_n = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2}\Big[1 + \frac{\varphi_{2n+2}(0)}{\alpha_{2n+2}}\Big]^{-1/2}. \tag{18}$$

При доказательстве формулы (15) надо вместо многочленов Чебышева первого рода использовать многочлены Чебышева второго рода. Аналогично формуле (7) имеем

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)U_k(x)h(x)(1-x^2)\,dx = \\ = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\cos\theta)\,\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}\,\sin^2\theta\,h(\cos\theta)|\sin\theta|\,d\theta = 0.$$

Нетрудно доказать, что все коэффициенты (10), (13), (17) и (18) отличны от нуля.

Формулы (9) и (15) называются *формулами Сегё*. Эти формулы представляют многочлены, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$, через многочлены, ортогональные на окружности. Теоретически ясно, что случай ортогональности на окружности является более простым, потому что линия ортогональности не имеет особых точек и, во-вторых, в этом случае можно применять многочисленные результаты о приближении периодических функций тригонометрическими полиномами. Именно поэтому асимптотические свойства многочленов, ортогональных на окружности, изучены очень подробно. И значение формул Сегё заключается в том, что многие асимптотические свойства многочленов, ортогональных на окружности, переносятся на многочлены, ортогональные на сегменте.

Формулы Сегё допускают обращение. А именно, можно выразить многочлены $\{\varphi_n(w)\}$ через многочлены (9) и (15). В самом деле, в формулах (15) и (16) надо заменить n на $n-1$. А тогда многочлены $w^{-n}\varphi_{2n}(w)$ и $w^{-n+1}\varphi_{2n-1}(w)$ можно представить как линейные комбинации многочленов $B_n(x)$ и $(1-x^2)F_{n-1}(x)$.

С помощью формул Сегё нетрудно определить аналоги многочленов Якоби на единичной окружности.

В заключение параграфа заметим, что если в формуле (2) положить $g(\theta) \equiv 1$, то получим $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Следовательно, ряды Фурье по многочленам Чебышева первого рода есть аналог рядов Тейлора для сегмента $[-1, 1]$.

§ 3. Теорема Корауса о преобразовании весовой функции

Из результатов гл. I следует, что для рассмотрения условий сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам очень важно установить ограниченность последовательности ортонормированных многочленов в отдельной точке, на некотором множестве или на всем сегменте ортогональности. В гл. VII было доказано, что ортонормированные многочлены Якоби ограничены внутри интервала ортогональности, т. е. в каждой точке интервала $(-1, 1)$, и равномерно ограничены на всяком сегменте, расположенном целиком внутри этого интервала $(-1, 1)$. А многочлены Чебышева первого рода ограничены равномерно на всем сегменте ортогональности. В связи с этими фактами возникает естественный вопрос о распространении результатов, установленных для классических ортогональных многочленов, на более общие системы многочленов, ортонормированных с произвольной весовой функцией. В настоящем параграфе рассматриваются простейшие преобразования весовой функции, при которых оценки

с одной системы ортогональных многочленов переносятся на другие системы.

Пусть многочлены $\{\psi_n(x)\}$ ортонормированы на сегменте $[a, b]$ с весом $p(x)$, причем в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ либо на некотором множестве $A \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$|\psi_n(x_0)| \leqslant M, \qquad x_0 \in A. \tag{1}$$

Спрашивается, какими свойствами должна обладать неотрицательная функция $\sigma(x)$ на сегменте $[a, b]$, чтобы последовательность многочленов $\{B_n(x)\}$, ортонормированных на том же сегменте с весом

$$h(x) = p(x)\sigma(x), \qquad x \in [a, b], \tag{2}$$

была бы ограниченной в точке x_0 или на всем множестве A?

Теорема 8.1. *Если $\sigma(x)$ есть неотрицательная на сегменте $[a, b]$ дробно-рациональная функция, т. е.*

$$\sigma(x) = \frac{R_m(x)}{Q_s(x)} \geqslant 0, \qquad x \in [a, b], \tag{3}$$

причем $R_m(x) > 0$ при $x \in A$, то из условия (1) *следует неравенство*

$$|B_n(x_0)| \leqslant \frac{\sqrt{m+s+1}}{R_m(x_0)} M \sqrt{M_0}, \qquad x_0 \in A, \tag{4}$$

где введено обозначение

$$M_0 = \max_{x \in [a,b]} R_m(x) Q_s(x). \tag{5}$$

Доказательство. Так как $R_m(x)$ есть многочлен степени m, то имеем разложение

$$R_m(x)B_n(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \ldots + c_{n+m}\psi_{n+m}(x), \tag{6}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_k = \int\limits_a^b p(x)R_m(x)B_n(x)\psi_k(x)\,dx = \int\limits_a^b h(x)Q_s(x)B_n(x)\psi_k(x)\,dx.$$

Но ведь многочлены $\{B_n(x)\}$ ортогональны с весом $h(x)$. Поэтому при $s + k < n$ имеем $c_k = 0$. Следовательно, вместо (6) получаем равенство

$$R_m(x)B_n(x) = c_{n-s}\psi_{n-s}(x) + c_{n-s+1}\psi_{n-s+1}(x) + \ldots + c_{n+m}\psi_{n+m}(x). \tag{7}$$

С другой стороны, учитывая обозначение (5), находим

$$\sum_{k=n-s}^{n+m} c_k^2 = \int\limits_a^b p(x)[R_m(x)B_n(x)]^2\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b p(x)\frac{R_m(x)}{Q_s(x)}\,[R_m(x)Q_s(x)]B_n^2(x)\,dx \leqslant M_0.$$

А теперь к правой части (7) применяем неравенство Коши–Шварца. В результате, учитывая (1), имеем

$$|R_m(x_0)B_n(x_0)|^2 \leqslant \sum_{k=n-s}^{n+m} c_k^2 \sum_{k=n-s}^{n+m} |\psi_k(x_0)|^2 \leqslant M_0 M^2(m+s+1).$$

Этим неравенство (4) доказано.

Если R есть минимум многочлена $R_m(x)$ на множестве A, причем $R > 0$, то вместо (4) получим неравенство

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{1}{R}\sqrt{m+s+1}\,M\sqrt{M_0}, \qquad x \in A.$$

В частности, неравенство (4) сохраняется, если весовая функция только умножается или только делится на положительный многочлен.

Можно рассматривать более общий случай, когда вместо (1) выполняется неравенство

$$|\psi_n(x_0)| \leqslant M_n \tag{8}$$

при условии, что последовательность $\{M_n\}$ монотонно возрастает или монотонно убывает. В самом деле, так как в разложении (7) содержится только конечное число $m+s+1$ слагаемых, не зависящее от n, то при этих условиях в неравенстве (4) вместо M можно поставить наибольшее из чисел $M_{n-s}, M_{n-s+1}, \ldots, M_{n+m}$. Следовательно, правая часть (4) будет изменяться аналогично правой части неравенства (8).

Если оба многочлена $R_m(x)$ и $Q_s(x)$ в формуле (3) положительны, то теорему 8.1 можно обратить, т. е. можно оценить многочлены $\{\psi_n(x)\}$ через многочлены $\{B_n(x)\}$. Таким образом, умножение или деление весовой функции на положительный многочлен сохраняет ограниченность, а в некоторых случаях и скорость возрастания либо убывания последовательности ортонормированных многочленов.

А теперь рассмотрим основной результат о преобразовании весовой функции.

Теорема 8.2 (Дж. Кораус). *Если дополнительный множитель $\sigma(x)$ в формуле (2) положителен и удовлетворяет на конечном сегменте $[a,b]$ условию Липшица порядка $\alpha = 1$, т. е.*

$$|\sigma(x) - \sigma(t)| \leqslant M_0\,|x-t|, \qquad x,t \in [a,b], \tag{9}$$

то при всех $x \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sigma_0}\,|\psi_n(x)| + \frac{c_1 M_0}{\sigma_0^{3/2}}\,[|\psi_n(x)| + |\psi_{n-1}(x)|], \tag{10}$$

где

$$\sigma_0 = \min_{x\in[a,b]} \sigma(x), \qquad c_1 = \max\{|a|,|b|\}. \tag{11}$$

Доказательство. Разлагая многочлен $B_n(x)$ по системе многочленов $\{\psi_n(x)\}$, находим

$$B_n(x) = \int_a^b p(t)B_n(t)\Big[\sum_{k=0}^{n}\psi_k(x)\psi_k(t)\Big]\,dt =$$
$$= \psi_n(x)\int_a^b p(t)B_n(t)\psi_n(t)\,dt + \int_a^b p(t)B_n(t)K_{n-1}(x,t)\,dt, \quad (12)$$

где, как обычно, введено обозначение

$$K_{n-1}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1}\psi_k(x)\psi_k(t).$$

Далее, так как многочлены $\{B_n(x)\}$ ортонормированы с весом

$$h(x) = p(x)\sigma(x),$$

то имеем равенство

$$\int_a^b p(t)\sigma(t)B_n(t)K_{n-1}(x,t)\,dt = 0,$$

с помощью которого, используя формулу Кристоффеля–Дарбу (I.2.10), получаем

$$\sigma(x)\int_a^b p(t)B_n(t)K_{n-1}(x,t)\,dt = \int_a^b p(t)B_n(t)[\sigma(x)-\sigma(t)]K_{n-1}(x,t)\,dt =$$
$$= \lambda_{n-1}\int_a^b p(t)B_n(t)[\sigma(x)-\sigma(t)]\Big[\frac{\psi_n(x)\psi_{n-1}(t)-\psi_n(t)\psi_{n-1}(x)}{x-t}\Big]\,dt.$$

Подставляем это выражение в формулу (12) и переходим к оценкам. В результате находим

$$|B_n(x)| \leqslant |\psi_n(x)|\int_a^b p(t)|B_n(t)||\psi_n(t)|\,dt +$$
$$+\frac{\lambda_{n-1}}{\sigma(x)}\int_a^b p(t)|B_n(t)|\Big|\frac{\sigma(x)-\sigma(t)}{x-t}\Big|[|\psi_n(x)||\psi_{n-1}(t)| + |\psi_n(t)||\psi_{n-1}(x)|]\,dt. \quad (13)$$

Разностное отношение под знаком второго интеграла оценивается в силу неравенства (9). Следовательно, остается оценить три аналогичных между собой интеграла. Для первого из них, используя

ортонормированность многочленов и обозначение (11), находим

$$\int_a^b p(t)|B_n(t)|\,|\psi_n(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \int_a^b p(t)\sqrt{\sigma(t)}\,|B_n(t)|\,|\psi_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \left[\int_a^b p(t)\sigma(t)B_n^2(t)\,dt\right]^{1/2} \left[\int_a^b p(t)\psi_n^2(t)\,dt\right]^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}.$$

Учитывая аналогичные оценки для второго и третьего интегралов, из (13) получаем

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}\,|\psi_n(x)| + \frac{\lambda_{n-1}M_0}{\sigma_0^{3/2}}\,[|\psi_n(x)| + |\psi_{n-1}(x)|].$$

Остается учесть неравенство (I.2.7) для коэффициента λ_{n-1}. Таким образом, теорема Корауса доказана.

Неравенство (10) можно записать в виде

$$|B_n(x)| \leqslant c_2[|\psi_{n-1}(x)| + |\psi_n(x)|], \qquad x \in [a,b]. \tag{14}$$

В частном случае, когда многочлены $\{\psi_n(x)\}$ ограничены, т. е. выполняется условие (1), из неравенства (10) имеем

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{\sigma_0 + 2c_1M_0}{\sigma_0^{3/2}}\,M, \qquad x \in [a,b]. \tag{15}$$

Далее, можно рассматривать случай, когда в некоторой точке x_0 имеет место оценка (8). Тогда в силу (14) многочлен $B_n(x)$ в этой точке допускает аналогичную оценку сверху.

Наконец, поскольку функция $\sigma(x)$ положительна и, следовательно, ее минимум положителен, то при условии (9) можно составить оценки многочленов $\{\psi_n(x)\}$ через многочлены $\{B_n(x)\}$. Таким образом, весовую функцию можно не только умножать, но и делить на достаточно хорошую функцию $\sigma(x)$.

Рассмотрим теперь простейшие следствия из теоремы Корауса.

Пусть многочлены $\{B_n(x)\}$ ортонормированы на сегменте $[-1,1]$ с весовой функцией

$$h(x) = \frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{16}$$

Если положительная функция $h_0(x)$ удовлетворяет на сегменте $[-1,1]$ условию Липшица порядка $\alpha = 1$, то многочлены $\{B_n(x)\}$ можно оценить через многочлены Чебышева первого рода. В самом деле, учитывая оценку (III.2.2), из (15) находим

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{\sigma_0 + 2M_0}{\sigma_0^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad x \in [-1,1].$$

Функция $h_0(x)$ в формуле (16) называется иногда *тригонометрическим весом.* А многочлены, ортогональные с весом (16) при положительной и непрерывной функции $h_0(x)$, можно рассматривать как

непосредственное *обобщение многочленов Чебышева первого рода*, для которых $h_0(x) \equiv 1$.

Аналогичным образом многочлены, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией $h(x)$, которая положительна и непрерывна на этом сегменте, называются *обобщенными многочленами Лежандра*. К этим многочленам можно применить теорему Корауса.

Теорема 8.3. *Если весовая функция $h(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ положительна и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$, то для обобщенных многочленов Лежандра имеют место неравенства*

$$|B_n(x)| \leqslant c_3\sqrt{n+1}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{17}$$

$$(1 - x^2)^{1/4}|B_n(x)| \leqslant c_4, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{18}$$

В самом деле, весовую функцию $h(x)$ многочленов $\{B_n(x)\}$ можно рассматривать как результат умножения весовой функции многочленов Лежандра на дополнительный множитель $\sigma(x) \equiv h(x)$. Следовательно, в этом случае можно применить теорему Корауса. И поскольку многочлены Лежандра удовлетворяют аналогичным и даже более точным неравенствам (IV.2.4) и (IV.3.4), то с помощью этих последних из неравенства (10) получаются неравенства (17) и (18). При этом можно, конечно, вычислить конкретные значения постоянных c_3 и c_4.

Далее, в § 5 гл. IV при рассмотрении рядов Фурье–Лежандра в доказательствах всех теорем из свойств многочленов Лежандра используются только неравенства (IV.2.4) и (IV.3.4). Следовательно, все результаты § 5 гл. IV переносятся и на ряды Фурье по обобщенным многочленам Лежандра. В частности, для остатков таких рядов справедливы неравенства вида (IV.5.16) и (IV.5.29), если, конечно, весовая функция $h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 8.3.

С помощью теоремы Корауса можно рассмотреть также *обобщенные многочлены Якоби*, ортогональные с весовой функцией

$$h(x) = h_0(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \qquad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad x \in [-1, 1].$$

Если весовая функция $h_0(x)$ положительна на сегменте $[-1, 1]$ и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$, то на соответствующие ортонормированные многочлены Якоби и ряды Фурье по ним переносятся многие результаты, установленные в гл. VII.

§ 4. Формула Кристоффеля

Пусть многочлены $\{\psi_n(x)\}$ ортогональны на сегменте $[a, b]$ с весовой функцией $p(x)$. Предположим, что многочлен

$$\sigma_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m) \tag{1}$$

неотрицателен на сегменте $[a,b]$, и рассмотрим новую весовую функцию

$$h(x) = \sigma_m(x)p(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{2}$$

Рассмотрим многочлены $\{B_n(x)\}$, определяемые формулой

$$\sigma_m(x)B_n(x) = \begin{vmatrix} \psi_n(x_1) & \psi_{n+1}(x_1) & \ldots & \psi_{n+m}(x_1) \\ \psi_n(x_2) & \psi_{n+1}(x_2) & \ldots & \psi_{n+m}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_n(x_m) & \psi_{n+1}(x_m) & \ldots & \psi_{n+m}(x_m) \\ \psi_n(x) & \psi_{n+1}(x) & \ldots & \psi_{n+m}(x) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Разлагая определитель по элементам последней строки, имеем

$$\sigma_m(x)B_n(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k\psi_{n+k}(x). \tag{4}$$

Если в определителе (3) положить $x = x_k$, где $k = 1, 2, \ldots, m$, то две строки определителя будут одинаковые. Следовательно, многочлен (4) действительно делится на многочлен $\sigma_m(x)$.

Далее, пусть $Q_k(x)$ — многочлен степени $k < n$. Тогда в силу формулы (4) имеем

$$\int_a^b \sigma_m(x)B_n(x)Q_k(x)p(x)\,dx = 0, \qquad k < n.$$

С другой стороны, тот же интеграл представляем в виде

$$\int_a^b [\sigma_m(x)p(x)]B_n(x)Q_k(x)\,dx = \int_a^b h(x)B_n(x)Q_k(x)\,dx = 0.$$

Следовательно, многочлены $\{B_n(x)\}$, определяемые формулой (3), ортогональны с весом $h(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Докажем, что старший коэффициент многочлена $B_n(x)$ отличен от нуля. Для этого достаточно доказать, что коэффициент A_m при $\psi_{n+m}(x)$ в формуле (4) отличен от нуля. Из формулы (3) для этого коэффициента имеем формулу

$$A_m = \begin{vmatrix} \psi_n(x_1) & \psi_{n+1}(x_1) & \ldots & \psi_{n+m-1}(x_1) \\ \psi_n(x_2) & \psi_{n+1}(x_2) & \ldots & \psi_{n+m-1}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_n(x_m) & \psi_{n+1}(x_m) & \ldots & \psi_{n+m-1}(x_m) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Рассмотрим многочлен

$$R_{n+m-1}(x) = c_0\psi_n(x) + c_1\psi_{n+1}(x) + \ldots + c_{m-1}\psi_{n+m-1}(x). \tag{6}$$

Предположим, что определитель (5) равен нулю. Тогда для многочлена (6) можно ввести m условий

$$c_0\psi_n(x_k) + c_1\psi_{n+1}(x_k) + \ldots + c_{m-1}\psi_{n+m-1}(x_k) = 0, \tag{7}$$

где $1 \leqslant k \leqslant m$. Если определитель (5) однородной системы (7) равен нулю, то существует нетривиальное решение $\{c_k^{(0)}\}$ этой системы. А тогда многочлен (6) представляется в виде

$$R_{n+m-1}(x) = \sigma_m(x) Q_{n-1}(x). \tag{8}$$

Многочлен (6) ортогонален с весом $p(x)$ любому многочлену степени $n-1$. Следовательно, справедливо равенство

$$\int_a^b p(x) R_{n+m-1}(x) Q_{n-1}(x)\, dx = 0.$$

Но в силу формулы (8) имеем

$$\int_a^b p(x) \sigma_m(x) Q_{n-1}^2(x)\, dx = \int_a^b h(x) Q_{n-1}^2(x)\, dx = 0. \tag{9}$$

Поскольку $h(x)$ — весовая функция, то из условия (9) находим тождество $Q_{n-1}(x) \equiv 0$. Следовательно, в формуле (6) имеем $c_k \equiv 0$. А это противоречит условию $A_m = 0$. Следовательно, $A_m \neq 0$. И каждый многочлен $B_n(x)$, определяемый формулой (3), имеет степень n. Но, конечно, этот ортогональный многочлен надо еще нормировать.

Формула Кристоффеля (3) обобщается и на тот случай, когда многочлен $\sigma_m(x)$ имеет не простые, а кратные корни. Например, если вместо (1) имеем

$$\sigma_m(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_{m-1}), \tag{10}$$

то вместо формулы (3) получается формула

$$\sigma_m(x) B_n(x) = \begin{vmatrix} \psi_n(x_1) & \psi_{n+1}(x_1) & \ldots & \psi_{n+m}(x_1) \\ \psi_n'(x_1) & \psi_{n+1}'(x_1) & \ldots & \psi_{n+m}'(x_1) \\ \psi_n(x_2) & \psi_{n+1}(x_2) & \ldots & \psi_{n+m}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_n(x_{m-1}) & \psi_{n+1}(x_{m-1}) & \ldots & \psi_{n+m}(x_{m-1}) \\ \psi_n(x) & \psi_{n+1}(x) & \ldots & \psi_{n+m}(x) \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Аналогично, если некоторый нуль x_k многочлена $\sigma_m(x)$ имеет кратность s, то в определителе этому нулю будут соответствовать s строк вида

$$\begin{matrix} \psi_n(x_k) & \psi_{n+1}(x_k) & \ldots & \psi_{n+m}(x_k) \\ \psi_n'(x_k) & \psi_{n+1}'(x_k) & \ldots & \psi_{n+m}'(x_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_n^{(s-1)}(x_k) & \psi_{n+1}^{(s-1)}(x_k) & \ldots & \psi_{n+m}^{(s-1)}(x_k). \end{matrix}$$

Рассмотрим весовую функцию многочленов Якоби

$$h(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta. \tag{12}$$

Если α и β натуральные, то можно положить

$$\sigma_{\alpha+\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Следовательно, в этом случае многочлены Якоби можно представить по формуле (3) через многочлены Лежандра.

А если натуральными являются числа $\alpha + 1/2$ и $\beta + 1/2$, то многочлены Якоби можно представить через многочлены Чебышева первого рода.

Формула Кристоффеля (3) допускает различные упрощения и модификации. Если, например, функция $p(x)$ и многочлен (1) — четные функции на симметричном сегменте $[-b, b]$, то вместо (3) имеем формулу

$$\sigma_{2m}(x)B_n(x) = \begin{vmatrix} \psi_n(x_1) & \psi_{n+2}(x_1) & \dots & \psi_{n+2m}(x_1) \\ \psi_n(x_2) & \psi_{n+2}(x_2) & \dots & \psi_{n+2m}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(x_m) & \psi_{n+2}(x_m) & \dots & \psi_{n+2m}(x_m) \\ \psi_n(x) & \psi_{n+2}(x) & \dots & \psi_{n+2m}(x) \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

С.Н. Бернштейн и Г. Сегё [I.6] рассмотрели некоторые случаи, когда весовая функция не умножается, а делится на многочлен, и при этом для соответствующих ортогональных многочленов получаются компактные формулы.

§ 5. Ортогональные многочлены дискретного переменного

Пусть на сегменте $[a, b]$ фиксирована система $n+1$ точек

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n, \qquad (1)$$

и, кроме того, определена система весов $\{p_k\}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1, \qquad p_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \qquad (2)$$

Тогда для двух функций, определенных по крайней мере в точках (1), можно ввести скалярное произведение

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k)\varphi(x_k). \qquad (3)$$

Если сумма (3) равна нулю, то эти две функции называются *ортогональными.* Норму и расстояние здесь можно определить соответственно по формулам

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k f^2(x_k)}, \qquad (4)$$

$$\rho(f, \varphi) = \|f - \varphi\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2}. \qquad (5)$$

Докажем, что при условиях (2) однозначно определяется система $n+1$ многочленов

$$B_0(x),\ B_1(x),\ \ldots,\ B_n(x), \qquad (6)$$

удовлетворяющих условию ортонормированности

$$(B_m, B_s) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_m(x_k) B_s(x_k) = \delta_{ms}, \qquad (7)$$

причем старший коэффициент у каждого многочлена (6) положителен.

В самом деле, для нулевого многочлена, полагая $B_0(x) = \mu_0 > 0$, из (7) находим

$$\sum_{k=0}^{n} p_k B_0^2(x_k) = \mu_0^2 \sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

И, следовательно, коэффициент $\mu_0 = 1$ определен. Далее применяем индукцию. Допустим, определены многочлены $B_0(x), B_1(x), \ldots$ $\ldots, B_{m-1}(x)$, удовлетворяющие условиям (7). Тогда следующий многочлен ищем в виде

$$B_m(x) = \mu_m [x^m + c_0 B_0(x) + c_1 B_1(x) + \ldots + c_{m-1} B_{m-1}(x)]. \qquad (8)$$

Умножаем это равенство на $B_s(x)$ и суммируем. В результате имеем

$$\sum_{k=0}^{n} p_k B_m(x_k) B_s(x_k) = \mu_m \sum_{k=0}^{n} p_k x_k^m B_s(x_k) + \mu_m c_s = \mu_m(\alpha_{ms} + c_s).$$

Чтобы эта сумма была равна нулю, достаточно положить

$$c_s = -\alpha_{ms} = -\sum_{k=0}^{n} p_k x_k^m B_s(x_k), \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно, вместо (8) имеем равенство

$$B_m(x) = \mu_m \left[x^m - \sum_{s=0}^{m-1} \alpha_{ms} B_s(x) \right] = \mu_m Q_m(x),$$

где многочлен $Q_m(x)$ определен. Далее, в силу условия нормировки

$$\sum_{k=0}^{n} p_k B_m^2(x_k) = \mu_m^2 \sum_{k=0}^{n} p_k Q_m^2(x_k) = 1$$

определяется положительный коэффициент μ_m, ибо выполняется условие
$$\sum_{k=0}^{n} p_k Q_m^2(x_k) > 0. \tag{9}$$

Это условие имеет место, потому что $p_k > 0$ и многочлен $Q_m(x)$ степени m не может обращаться в нуль в $n+1$ точках (1). Таким образом, индукция проведена и существование многочленов доказано.

Индуктивный переход от n к $n+1$ сделать, вообще говоря, нельзя, ибо в этом случае многочлен $Q_{n+1}(x)$ имеет степень $n+1$, и условие (9) может не выполняться. Но если вместо конечной системы точек (1) рассмотреть бесконечную последовательность различных точек $\{x_k\}$, то однозначно определяется бесконечная система ортонормированных многочленов. При этом вместо (2) вводится условие
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \qquad p_k > 0. \tag{10}$$

Здесь фактически доказан аналог теоремы 1.1 для случая ортогональности по дискретному множеству. Для многочленов (6) нетрудно установить и другие аналоги свойств, рассмотренных в гл. I. Так, например, для этих многочленов имеют место рекуррентная формула и формула Кристоффеля–Дарбу, критерии ортогональности и теоремы о расположении нулей. Справедлива также и формула (I.2.15), представляющая ортогональные многочлены через моменты весовой функции, которые здесь имеют вид
$$h_m = \sum_{k=0}^{n} p_k x_k^m.$$

Рассмотрим теперь ряды Фурье по ортогональным многочленам в случае дискретного множества ортогональности.

Пусть некоторая функция $f(x)$ определена в узлах ортогональности. Вводим ее коэффициенты Фурье по системе многочленов (6)
$$a_q = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k) B_q(x_k), \qquad q = 0, 1, \ldots, n, \tag{11}$$
и частичные суммы Фурье
$$S_m(x; f) = \sum_{q=0}^{m} a_q B_q(x), \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Аналогично общему случаю суммы (12) приближают функцию $f(x)$ наилучшим образом в смысле метрики (5). В самом деле, для произвольного многочлена
$$Q_m(x) = \sum_{q=0}^{m} b_q B_q(x),$$

используя формулы (3), (5) и (12), имеем

$$\|f-Q_m\|^2 = (f-Q_m, f-Q_m) = (f,f) - 2(f,Q_m) + (Q_m,Q_m) =$$
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k) Q_m(x_k) + \sum_{k=0}^{n} p_k Q_m^2(x_k) =$$
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{q=0}^{m} a_q b_q + \sum_{q=0}^{m} b_q^2 = \|f\|^2 + \sum_{q=0}^{m}(b_q-a_q)^2 - \sum_{q=0}^{m} a_q^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|f\|^2 - \sum_{q=0}^{m} a_q^2 = \|f-S_m\|^2. \quad (13)$$

Как известно, в вычислительной математике часто применяется *метод наименьших квадратов*. Этот метод заключается в том, что для функции $f(x)$, заданной таблицей в точках $\{x_k\}$, ищется многочлен, минимизирующий величину

$$\rho(f,Q_m) = \|f-Q_m\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k [f(x_k) - Q_m(x_k)]^2}. \quad (14)$$

Положительные множители $\{p_k\}$ вводятся для того, чтобы учесть тот факт, что значения функции $f(x)$ в разных точках вычисляются с различными точностями.

Неравенство (13) показывает, что частичные суммы (12) приближают функцию $f(x)$ наилучшим образом именно по методу наименьших квадратов.

В формуле (14) $m \leqslant n$. При этом число n может быть фиксировано, а m варьироваться в конкретных задачах.

Если $m = n$, то в качестве $Q_n(x)$ можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа. Тогда величина (14) будет равна нулю. Но при большом числе узлов n интерполяционный многочлен вычислять трудно. А при $m < n$ рациональнее применять именно суммы (12), ибо эти суммы вычислять значительно легче. А если же требуется повысить точность вычислений, то при фиксированном большом n нужно увеличить число m в формуле (14).

Таким образом, для применения метода наименьших квадратов необходимо вычислить все ортогональные многочлены (6). В принципе можно рассматривать случай, когда число различных точек $\{x_k\}$ бесконечно. Тогда методом ортогонализации получается последовательность ортогональных многочленов $\{B_k(x)\}$. Но формула (14) остается при конечном m.

Рассмотрим простой случай, когда $p_k \equiv 1$ и точки (1) делят сегмент $[a,b]$ на n равных частей. Так как в этом случае

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),$$

то линейное преобразование

$$t = n\,\frac{x-a}{b-a} \tag{15}$$

переводит сегмент $[a, b]$ в сегмент $[0, n]$, а точки $\{x_k\}$ в точки $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Таким образом, в этом случае достаточно найти ортогональные многочлены, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=0}^{n} B_m(k) B_s(k) = \delta_{ms}, \tag{16}$$

а затем вместо t подставить его выражение по формуле (15).

В численных методах часто применяются так называемые *факториальные многочлены*, или обобщенные степени

$$t^{[m]} = t(t-1)\ldots(t-m+1), \qquad t^{[0]} = 1. \tag{17}$$

Для этих многочленов справедливо тождество

$$\begin{aligned}(t+1)^{[m]} - t^{[m]} &= \\ &= (t+1)t(t-1)\ldots(t-m+2) - t(t-1)\ldots(t-m+1) = \\ &= t(t-1)\ldots(t-m+2)\,[(t+1)-(t-m+1)] = m\,t^{[m-1]}. \end{aligned} \tag{18}$$

Далее, из системы тождеств

$$\begin{aligned} &(t+1)^{[m+1]} - t^{[m+1]} = (m+1)t^{[m]}, \\ &(t+2)^{[m+1]} - (t+1)^{[m+1]} = (m+1)(t+1)^{[m]}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(t+n+1)^{[m+1]} - (t+n)^{[m+1]} = (m+1)(t+n)^{[m]}, \end{aligned}$$

складывая их почленно, находим

$$(t+n+1)^{[m+1]} - t^{[m+1]} = (m+1)\sum_{k=0}^{n}(t+k)^{[m]}. \tag{19}$$

Будем искать ортогональный многочлен в виде

$$B_m(t) = 1 + b_1^{(m)} t^{[1]} + b_2^{(m)} t^{[2]} + \ldots + b_m^{(m)} t^{[m]}. \tag{20}$$

Поскольку любой многочлен можно представить по формуле

$$F_p(t) = \sum_{s=0}^{p} d_s (t+s)^{[s]} = \sum_{s=0}^{p} d_s (t+s)(t+s-1)\ldots(t+1),$$

то для ортогональности многочлена (20) достаточно так выбрать его коэффициенты, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{k=0}^{n} (k+s)^{[s]} B_m(k) = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{21}$$

Преобразуем эту систему уравнений. Так как

$$(k+s)^{[s]}k^{[q]} = (k+s)(k+s-1)\ldots(k+1)k(k-1)\ldots(k-q+1) = \\ = (k+s)^{[k+q]},$$

то для общего члена суммы (21) имеем представление

$$(k+s)^{[s]}B_m(k) = (k+s)^{[s]} + b_1^{(m)}(k+s)^{[s+1]} + b_2^{(m)}(k+s)^{[s+2]} + \ldots \\ \ldots + b_m^{(m)}(k+s)^{[s+m]}.$$

Подставляя правую часть в сумму (21), находим

$$\sum_{k=0}^{n}(k+s)^{[s]} + b_1^{(m)}\sum_{k=0}^{n}(k+s)^{[s+1]} + \ldots + b_m^{(m)}\sum_{k=0}^{n}(k+s)^{[s+m]} = 0. \quad (22)$$

Далее, в формуле (19) положим $t = s$ и вместо m поставим $s+q$. В результате равенство (19) приведется к виду

$$(s+n+1)^{[s+q+1]} - s^{[s+q+1]} = (s+q+1)\sum_{k=0}^{n}(s+k)^{[s+q]}.$$

Вычитаемое слева есть нуль, ибо при $q \geqslant 0$ среди множителей правой части

$$s^{[s+q+1]} = s(s-1)\ldots(-q+1)(-q)$$

есть нуль. Следовательно, равенство (22) имеет вид

$$\frac{(s+n+1)^{[s+1]}}{s+1} + b_1^{(m)}\frac{(s+n+1)^{[s+2]}}{s+2} + \ldots + b_m^{(m)}\frac{(s+n+1)^{[s+m+1]}}{s+m+1} = 0. \quad (23)$$

После сокращения на числитель первой дроби имеем

$$\frac{1}{s+1} + \frac{b_1^{(m)}n}{s+2} + \ldots + \frac{b_m^{(m)}n^{[m]}}{s+m+1} = 0.$$

Вводя новые неизвестные $a_k = b_k^{(m)}n^{[k]}$, получим систему уравнений

$$\frac{1}{s+1} + \frac{a_1}{s+2} + \ldots + \frac{a_m}{s+m+1} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \quad (24)$$

Для решения этой системы применим искусственный примем. А именно, рассмотрим вспомогательную функцию $\Phi_m(t)$, которая определяется формулой

$$\frac{1}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \ldots + \frac{a_m}{x+m+1} = \frac{\Phi_m(x)}{(x+m+1)^{[m+1]}}. \quad (25)$$

Поскольку $\Phi_m(x)$ есть многочлен степени не выше m, причем в силу (24) имеем

$$\Phi_m(s) = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

то, следовательно, этот многочлен можно представить в виде

$$\Phi_m(x) = cx(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1).$$

И остается определить постоянный множитель c. Для этого умножаем равенство (25) на $x+1$ и после сокращения в первой дроби и в правой части положим в нем $x=-1$. В результате имеем

$$1 = \frac{\Phi_m(-1)}{m^{[m]}} = \frac{c(-1)^m m!}{m!} = c(-1)^m, \qquad c = (-1)^m.$$

Теперь можно записать числитель в правой части равенства (25). Имеем

$$\frac{1}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \ldots + \frac{a_m}{x+m+1} = \frac{(-1)^m x(x-1)\ldots(x-m+1)}{(x+m+1)(x+m)\ldots(x+1)}. \tag{26}$$

Приводим левую часть этого равенства к общему знаменателю и полагаем $x=-(s+1)$. Тогда получим равенство

$$a_s(m-s)(m-s-1)\ldots 2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\ldots(-s) = \\ = (-1)^m(-s-1)(-s-2)\ldots(-s-m).$$

Отсюда находим

$$a_s = (-1)^s\frac{(m+s)(m+s-1)\ldots(s+1)}{s!\,(m-s)!} = (-1)^s C_m^s C_{m+s}^s.$$

Так как

$$b_s^{(m)} = \frac{a_s}{n^{[s]}} = \frac{(-1)^s C_m^s C_{m+s}^s}{n^{[s]}} = \frac{(-1)^s C_m^s C_{m+s}^s}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}, \tag{27}$$

то, следовательно, ортогональный многочлен (20) можно теперь представить в явной форме

$$B_m(t;n) = \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s C_m^s C_{m+s}^s}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}\, t^{[s]}. \tag{28}$$

Простые вычисления по этой формуле приводят к равенствам

$$B_0(t;n) = 1,$$

$$B_1(t;n) = 1 - \frac{2t}{n},$$

$$B_2(t;n) = 1 - 6\,\frac{t}{n} + 6\,\frac{t(t-1)}{n(n-1)},$$

$$B_3(t;n) = 1 - 12\,\frac{t}{n} + 30\,\frac{t(t-1)}{n(n-1)} - 20\,\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)},$$

$$B_4(t;n) = 1 - 20\,\frac{t}{n} + 90\,\frac{t(t-1)}{n(n-1)} - 140\,\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)} + \\ + 70\,\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

$$B_5(t;n) = 1 - 30\,\frac{t}{n} + 210\,\frac{t(t-1)}{n(n-1)} - 560\,\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)} + \\ + 630\,\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} - 252\,\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Подсчитаем нормы многочленов (28). Используя разложение

$$B_m(t;n) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s (t+s)^{[s]}, \qquad \alpha_m = b_m^{(m)},$$

в силу равенств (21) находим

$$\|B_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} B_m^2(k;n) = \sum_{k=0}^{n} B_m(k;n) \sum_{s=0}^{m} \alpha_s (k+s)^{[s]} = \\ = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s \left[\sum_{k=0}^{n} (k+s)^{[s]} B_m(k;n) \right] = \alpha_m \sum_{k=0}^{n} (k+m)^{[m]} B_m(k;n). \quad (29)$$

Далее, если в сумму (21) вместо s подставить m, то эта сумма будет отлична от нуля. После этого, рассуждая как и при выводе уравнения (23), приведем эту сумму к виду левой части (23) при условии $s = m$. Затем выносим числитель первой дроби, а оставшуюся сумму вычисляем с помощью формулы (26), полагая в ней $x = m$. В результате, используя (27), из (29) получаем

$$\|B_m\|^2 = b_m^{(m)} \sum_{k=0}^{n} (k+m)^{[m]} B_m(k;n) = \frac{b_m^{(m)} (n+m+1)^{[m+1]}\,(-1)^m m!}{(2m+1)(2m)\ldots(m+1)} = \\ = \frac{(-1)^m (n+m+1)^{[m+1]}\,(-1)^m m!}{(2m+1)(2m)\ldots(m+1)\,n^{[m]}}\, C_m^m C_{2m}^m = \frac{(n+m+1)^{[m+1]}}{(2m+1)\,n^{[m]}}.$$

Таким образом, норма многочлена (28) подсчитана. И можно составить ортонормированные многочлены, соответствующие точкам $0, 1, 2, \ldots, n$ и весам $p_k = 1$.

Если вместо весов $p_k \equiv 1$ взять веса $p_k = 1/(n+1)$, то соответствующие ортонормированные многочлены получаются из многочленов (28) умножением на число $\sqrt{n+1}$.

Общий случай ортогональности на конечной системе точек (1) и частный случай многочленов (28) подробно исследовал П.Л. Чебышев в 1855 г. В связи с этим многочлены (28) иногда в литературе называются *многочленами Чебышева для равноотстоящих точек.*

§ 6. Некоторые дополнения и задачи

1. Случай ортогональности по единичной окружности является наиболее простым и удобным для исследования, так как линия ортогональности не имеет особенностей и в этом случае можно применять многочисленные и глубокие результаты из теории приближения

периодических функций тригонометрическими полиномами. Именно поэтому асимптотические свойства многочленов, ортогональных на окружности, изучены очень подробно. По этой теории важные результаты получили Я.Л. Геронимус, Б.Л. Голинский, В.М. Бадков, Г. Фройд и другие. Подробные формулировки содержатся в обзорной статье автора [X.6]. Здесь мы приведем только два наиболее характерных результата.

Пусть весовая функция на окружности имеет вид

$$h_1(z) = \frac{h_0(z)}{|z-z_0|^\sigma |z-\bar{z}_0|^\sigma}, \qquad 0<\sigma<1, \quad |z|=1, \tag{1}$$

где $|z_0| = 1$, но $z_0 \neq \pm 1$. Если положительная функция $h_0(z)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, то для соответствующих ортонормированных многочленов имеет место неравенство

$$|\varphi_n(z)| \leqslant c_1 n^{-\sigma/2} + c_2 |z-z_0|^{\sigma/2} |z-\bar{z}_0|^{\sigma/2}, \qquad |z|=1. \tag{2}$$

Аналогично, если

$$h_2(z) = h_0(z)|z-z_0|^\delta |z-\bar{z}_0|^\delta, \qquad 0<\delta<1, \tag{3}$$

то вместо (2) получаются неравенства

$$|z-z_0|^{\delta/2}|z-\bar{z}_0|^{\delta/2}|\varphi_n(x)| \leqslant c_3, \qquad |z|=1, \tag{4}$$

$$|\varphi_n(z_0)| \leqslant c_4 n^{\delta/2}, \qquad |\varphi_n(\bar{z}_0)| \leqslant c_5 n^{\delta/2}. \tag{5}$$

Наличие двух сопряженных особых точек весовой функции в формулах (1) и (3) объясняется тем, что полученные результаты с помощью формулы Г. Сегё (2.9) переносятся на случай весовых функций вида (I.6.42) и (I.6.44).

2. Во многих работах асимптотические свойства сначала устанавливаются для случая ортогональности по единичной окружности, а затем с помощью формулы Г. Сегё переносятся на случай ортогональности по сегменту. Именно таким путем получил свои результаты Е.А. Рахманов [XI.23–XI.25].

3. Как уже отмечалось, в теории ортогональных многочленов важную роль играют функции второго рода. Иногда возникает необходимость рассматривать асимптотические свойства этих функций. Например, при исследовании условий максимальной сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам. В связи с эти было бы интересно найти аналог формулы Г. Сегё для преобразования функций второго рода от случая окружности на случай ортогональности по сегменту.

4. Рассмотрим пример применения формулы Кристоффеля (4.3). Весовая функция

$$h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \qquad x \in [-1,1], \tag{6}$$

определяет многочлены Якоби с параметрами $\alpha = 1/2$ и $\beta = -1/2$. Весовую функцию (6) представляем в виде

$$h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{7}$$

Далее применяем формулу Кристоффеля (4.3). В этом случае $\sigma(x) = 1 - x$, а многочлены $\{\psi_n(x)\}$ суть многочлены Чебышева первого рода. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\widehat{P}_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big) &= \frac{-A_n}{1-x} \begin{vmatrix} T_n(1) & T_{n+1}(1) \\ T_n(x) & T_{n+1}(x) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{-A_n}{1-x}\,[T_{n+1}(x) - T_n(x)] = -A_n\,\frac{\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)}{1-\cos\theta} = \\ &= A_n\,\frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \qquad \theta = \arccos x. \end{aligned} \tag{8}$$

Знак минус перед положительным числом A_n взят для того, чтобы старший коэффициент многочлена Якоби был положителен. Для определения коэффициента A_n имеем последовательно

$$\begin{aligned}1 = \int_{-1}^{1} h(x)\widehat{P}_n^2\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)\,dx &= A_n^2 \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)\frac{\sin^2((2n+1)\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}\,d\theta = \\ &= 2A_n^2 \int_0^{\pi} \sin^2\Big(\frac{2n+1}{2}\,\theta\Big)\,d\theta = A_n^2\pi = 1.\end{aligned}$$

Следовательно, для многочленов Якоби при весе (6) имеет место формула

$$\widehat{P}_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sin((2n+1)\theta)/2)}{\sin(\theta/2)}, \qquad \theta = \arccos x. \tag{9}$$

Этот многочлен имеет нули в точках

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Из формулы (9) следует весовое неравенство

$$\sqrt{1-x}\,\Big|\widehat{P}_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)\Big| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{11}$$

и равномерная оценка

$$\Big|\widehat{P}_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)\Big| \leqslant \frac{2n+1}{\sqrt{\pi}}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{12}$$

Эти результаты вполне согласуются с результатами гл. VII. В самом деле, в силу неравенства (VII.3.34) здесь $q = 1/2$. И поэтому оценка (12) есть частный случай неравенства (VII.3.34). Но здесь

оценка (12) получена независимо и постоянная конкретна. Далее, неравенство (11) есть частный случай неравенства С.Н. Бернштейна (VII.4.35), так как здесь $\alpha = 1/2$ и $\beta = -1/2$.

Рассмотрим теперь ряды Фурье по многочленам Якоби (9). Поскольку здесь $q = 1/2$, то можно применить теорему 7.6, в которой фигурирует условие $p + \gamma > q + 1$. Следовательно, по теореме 7.6, если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[-1, 1]$ один раз и ее производная $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\gamma > 1/2$, то имеем равномерно сходящееся разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{13}$$

Далее, неравенство (VII.5.13) в данном случае имеет вид

$$\sqrt{1-x}\,\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{P}_k\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)\right| \leqslant c_8\sqrt{n}\,E_n(f). \tag{14}$$

Следовательно, если $f(x) \in \operatorname{Lip}\gamma$, где $\gamma > 1/2$, то ряд (13) сходится равномерно на сегменте $[-1, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Но этот результат нетрудно усилить. В самом деле, из формулы (9) имеем

$$\begin{aligned} K_n(t,x) &= \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k\Big(t; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)\widehat{P}_k\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big) = \\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sin(\tau/2)\sin(\theta/2)} \sum_{k=0}^{n} \sin\Big(\frac{2k+1}{2}\,\theta\Big)\sin\Big(\frac{2k+1}{2}\,\tau\Big) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sin(\tau/2)\sin(\theta/2)} \sum_{k=0}^{n}\Big[\cos\Big(\frac{2k+1}{2}\,(\tau-\theta)\Big) - \cos\Big(\frac{2k+1}{2}\,(\tau+\theta)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь, как обычно, положено $\theta = \arccos x$, $\tau = \arccos t$. Из (15) следует равенство

$$K_n(t,x) = \frac{1}{4\pi\sin(\tau/2)\sin(\theta/2)}\Big[\frac{\sin((n+1)(\tau-\theta))}{\sin((\tau-\theta)/2)} - \frac{\sin((n+1)(\tau+\theta))}{\sin((\tau+\theta)/2)}\Big]. \tag{16}$$

Следовательно, функция Лебега для рядов Фурье по многочленам (9) имеет вид

$$\begin{aligned} L_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,|K_n(t;x)|\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\sin(\theta/2)} \int_0^{\pi} \sin\frac{\tau}{2}\left|\frac{\sin((n+1)(\tau-\theta))}{\sin((\tau-\theta)/2)} - \frac{\sin((n+1)(\tau+\theta))}{\sin((\tau+\theta)/2)}\right| d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Для интеграла (17) известными методами [III.2, III.12] получается неравенство

$$\int_0^\pi \sin\frac{\tau}{2}\left|\frac{\sin((n+1)(\tau-\theta))}{\sin((\tau-\theta)/2)}-\frac{\sin((n+1)(\tau+\theta))}{\sin((\tau+\theta)/2)}\right|d\tau \leqslant c_6\ln n.$$

Следовательно, из (17) находим

$$\sqrt{1-x}\;L_n\Big(x;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\Big)\leqslant c_7\ln n,\qquad x\in[-1,1]. \tag{18}$$

А теперь из неравенства Лебега (VII.5.15) находим

$$\sqrt{1-x}\;\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{P}_k\Big(x;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\Big)\right|\leqslant c_8E_n(f)\ln n. \tag{19}$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ удовлетворяет условию Дини, т. е.

$$\lim_{\delta\to0}\omega(\delta;f)\ln\frac{1}{\delta}=0. \tag{20}$$

Тогда правая часть (19) убывает к нулю.

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет только условию Дини (20), то ряд (13) сходится равномерно на сегменте $[-1,\,1-\varepsilon]$ при фиксированном $\varepsilon>0$.

Аналогичные результаты справедливы и для многочленов Якоби, соответствующих весовой функции

$$h(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\qquad x\in[-1,1]. \tag{21}$$

5. В теореме Корауса дополнительный множитель $\sigma(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha=1$. В связи с этим было бы интересно рассмотреть случай $\alpha<1$. В этом направлении имеются важные результаты Г.И. Баркова [XI.17], подробно изложенные в обзорной статье [X.6], но полного решения этой задачи нет. Здесь, вероятно, возможны некоторые контрпримеры.

6. Теоремы о преобразовании весовой функции рассмотрены только для случая конечного сегмента ортогональности. В случае бесконечного интервала ортогональности никаких результатов, кажется, нет.

Глава IX

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ И В ОПЕРАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

§ 1. Интерполирование функций и многочлены Чебышева

Пусть на сегменте $[a, b]$ определена непрерывная функция $f(x)$ и задана система $n+1$ точек

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{1}$$

Докажем, что существует единственный алгебраический многочлен $L_n(x; f)$ степени не выше n, значения которого в точках (1) совпадают со значениями функции $f(x)$ в этих же точках, т. е. выполняются условия

$$L_n(x_k; f) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

В самом деле, неизвестный многочлен представим в виде

$$L_n(x; f) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

А тогда из (2) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0),\\ &a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Определитель этой линейной неоднородной системы есть транспонированный определитель Вандермонда, который, как известно, равен произведению всевозможных разностей $(x_k - x_m)$ при условии $k \neq m$ и отличен от нуля. Таким образом, система (3) имеет единственное решение при любой функции $f(x)$.

Многочлен $L_n(x; f)$ называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*, соответствующим системе узлов (1) и функции $f(x)$. Чтобы найти формулу для этого многочлена, рассмотрим сначала так называемые *фундаментальные многочлены Лагранжа*

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Для этих многочленов выполняются интерполяционные условия

$$l_k(x_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \tag{5}$$

С помощью фундаментальных многочленов Лагранжа (4) интерполяционный многочлен Лагранжа представляется в виде

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x). \tag{6}$$

Многочлен, стоящий в правой части, удовлетворяет интерполяционным условиям (2), и в силу единственности он совпадает с многочленом Лагранжа.

Точки (1) называются *узлами интерполяции*. Эти точки определяют многочлен

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n). \tag{7}$$

С помощью этого многочлена числитель дроби в правой части (4) можно представить в виде

$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n) = \\ = \frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_k} = \frac{\omega_{n+1}(x) - \omega_{n+1}(x_k)}{x - x_k}.$$

Устремляя в этом равенстве x к x_k, получим

$$(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n) = \omega'_{n+1}(x_k).$$

Следовательно, формулы (4) и (6) можно представить в виде

$$l_k(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\,\omega'_{n+1}(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \tag{9}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа совпадает с функцией $f(x)$ в узлах интерполяции (1). А в других точках сегмента такого совпадения может и не быть. Но ведь многочлен $L_n(x; f)$ вводится именно для того, чтобы можно было вычислить значения сложной функции $f(x)$ в любой точке сегмента $[a, b]$. Поэтому возникает естественный вопрос о погрешности приближенного равенства

$$f(x) \approx L_n(x; f), \qquad x \in [a, b]. \tag{10}$$

Иными словами, в формуле

$$f(x) = L_n(x; f) + R_n(x; f), \qquad x \in [a, b], \tag{11}$$

требуется оценить остаточный член $R_n(x; f)$.

Сначала рассмотрим остаточный член при условии, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на сегменте $[a,b]$. Фиксируем точку $x \in [a,b]$ и введем обозначение

$$K = \frac{f(x) - L_n(x;f)}{\omega_{n+1}(x)}, \qquad x \neq x_k. \tag{12}$$

Далее рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(t) - L_n(t;f) - K\omega_{n+1}(t), \qquad t \in [a,b]. \tag{13}$$

Эта функция на сегменте $[a,b]$ имеет $n+1$ непрерывных производных и обращается в нуль в $n+2$ различных точках

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x.$$

Следовательно, по теореме Ролля первая производная функции (13) обращается в нуль $n+1$ раз. Далее, вторая производная $F''(t)$ имеет на сегменте $[a,b]$ n различных нулей. А производная порядка $n+1$ имеет на этом сегменте по крайней мере один нуль. Таким образом, существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что имеет место равенство

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,K = 0.$$

Определяем отсюда постоянную K и подставляем ее значение в равенство (12). В результате приходим к формулам

$$f(x) = L_n(x;f) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

$$R_n(x;f) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi), \qquad x \in [a,b]. \tag{14}$$

Здесь точка ξ зависит от точки x.

Обозначим через $M_n(f)$ максимум величины $|f^{(n+1)}(x)|$ на сегменте $[a,b]$, т. е. полагаем

$$M_{n+1}(f) = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Тогда из формулы (14) находим неравенство

$$|R_n(x;f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\, M_{n+1}(f) \max_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|. \tag{15}$$

Величина остаточного члена (14) зависит от выбора узлов интерполяции. Эти узлы надо выбрать таким образом, чтобы правая часть неравенства (15) была наименьшей. А это будет в том случае, когда многочлен $\omega_{n+1}(x)$, имеющий единичный старший коэффициент, наименее уклоняется от нуля на сегменте $[a,b]$.

В случае сегмента $[-1,1]$ вопрос о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, подробно изучен в § 3 гл. III. Там доказано, что на сегменте $[-1,1]$ наименее уклоняется от нуля многочлен Чебышева $\widetilde{T}_{n+1}(x)$, причем подсчитано и уклонение. Конкретно, теорема 3.1

устанавливает неравенство

$$\max_{x\in[-1,1]} |\omega_{n+1}(x)| \geqslant \max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{T}_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, в случае сегмента $[-1, 1]$ величина (15) будет наименьшей, а приближенная формула (10) будет наиболее точной, если в качестве узлов интерполяции (1) выбрать нули многочлена Чебышева первого рода $\widetilde{T}_{n+1}(x)$. В силу формулы (III.1.8) имеем

$$x_k^{(n+1)} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,\, n+1. \tag{16}$$

При таком выборе узлов неравенство (15) приводится к виду

$$|R_n(x; f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!\,2^n}\, M_{n+1}(f), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{17}$$

Аналогичные утверждения имеют место и в случае произвольного сегмента $[a, b]$, ибо этот сегмент линейным преобразованием

$$2x = (b-a)t + a + b$$

сводится к единичному сегменту, а вместо многочленов Чебышева $\widetilde{T}_{n+1}(x)$ надо рассматривать смещенные многочлены Чебышева первого рода, которые нетрудно получить из многочленов (III.1.15).

Вернемся к общему случаю и рассмотрим вопрос о сходимости интерполяционного процесса.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана бесконечная нижняя треугольная матрица узлов

$$\begin{array}{l} x_0^{(0)}, \\ x_0^{(1)},\ x_1^{(1)}, \\ x_0^{(2)},\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0^{(n)},\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{18}$$

Для каждой строки этой матрицы можно построить интерполяционный многочлен Лагранжа. В результате получается последовательность многочленов

$$L_0(x; f),\ L_1(x; f),\ L_2(x; f),\ \ldots,\ L_n(x; f),\ \ldots \tag{19}$$

Возникает естественный вопрос об условиях, при которых имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x; f) = f(x), \qquad x \in [a, b]. \tag{20}$$

Совершенно ясно, что выполнение условия (20) зависит от расположения узлов (18) на сегменте $[a, b]$ и от свойств функции $f(x)$. Для

изучения этого вопроса можно ввести *интерполяционные функции Лебега.*

Прежде всего заметим, что формула (11) для произвольного многочлена $Q_n(x)$ степени не выше n в силу (14) превращается в равенство

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_n(x_k^{(n)}) l_k(x;n). \tag{21}$$

Здесь через $l_k(x;n)$ обозначены фундаментальные многочлены Лагранжа, соответствующие $(n+1)$-й строке матрицы (18). Для этих многочленов при любом расположении узлов имеем

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x;n) = 1. \tag{22}$$

Будем считать $Q_n(x)$ многочленом наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$. Тогда, используя (21), получаем

$$f(x) - L_n(x;f) = [f(x) - Q_n(x)] + [Q_n(x) - L_n(x;f)] =$$
$$= [f(x) - Q_n(x)] + \sum_{k=0}^{n} [Q_n(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})]\, l_k(x;n).$$

Далее вводим наилучшее равномерное приближение $E_n(f)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ многочленами порядка не старше n. В результате из последнего равенства находим неравенство

$$|f(x) - L_n(x;f)| \leqslant E_n(f) \left[1 + \sum_{k=0}^{n} |l_k(x;n)|\right]. \tag{23}$$

Функция

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x;n)| \tag{24}$$

называется *интерполяционной функцией Лебега*, соответствующей $(n+1)$-й строке матрицы (18). Учитывая обозначение (24), из (23) получаем *интерполяционное неравенство Лебега*

$$|f(x) - L_n(x;f)| \leqslant [1 + \lambda_n(x)]\, E_n(f). \tag{25}$$

Из этого неравенства следует, что если в данной точке $x \in [a,b]$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) E_n(f) = 0, \tag{26}$$

то последовательность (19) сходится к функции $f(x)$ в данной точке x.

Далее, для формулировки условий равномерной сходимости последовательности (19) на всем сегменте $[a,b]$ введем, как обычно, интерполяционные постоянные Лебега

$$\lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \lambda_n(x). \tag{27}$$

Тогда при условии

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n(f) = 0 \tag{28}$$

последовательность (19) сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[a,b]$.

Таким образом, в связи с матрицей (18) возникает задача оценить скорость возрастания функций Лебега (24) и постоянных Лебега (27).

Если в некоторой интерполяционной задаче есть возможность варьировать узлы матрицы (18) произвольным образом, то в силу формул (15) и (17) целесообразно в качестве этих узлов выбрать нули многочленов Чебышева первого рода либо нули смещенных многочленов Чебышева. А в том случае, когда матрица (18) заранее фиксирована, остается оценить порядок роста функций Лебега (24) и постоянных Лебега (27) с тем, чтобы наложить на функцию $f(x)$ соответствующие дифференциальные свойства, при которых выполняются условие (26) либо (28).

Вопрос о скорости возрастания чисел $\{\lambda_n\}$ при условии (16) впервые исследовал С.Н. Бернштейн. Приведем его результаты.

Теорема 9.1. *Если матрица узлов* (18) *на сегменте* $[-1,1]$ *составлена из нулей многочленов Чебышева первого рода* (16), *то для интерполяционных постоянных Лебега имеет место неравенство*

$$\lambda_{n-1} \leqslant 8 + \frac{4}{\pi}\ln n. \tag{29}$$

Доказательство. Так как многочлены $T_n(x)$ и $\widetilde{T}_n(x)$ отличаются только постоянным множителем, то из формулы (24), учитывая (8), находим

$$\lambda_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x;n-1)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{T_n(x)}{(x-x_k^{(n)})\,T_n'(x_k^{(n)})} \right|. \tag{30}$$

Далее, вводя обозначения

$$\theta = \arccos x, \qquad \theta_k = \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\,\pi, \tag{31}$$

в силу формулы (III.6.1) имеем равенство

$$T_n'(x_k) = n\sin\Big(\frac{2k-1}{2}\,\pi\Big)\frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}n}{\sin\theta_k}.$$

Здесь для краткости опущены верхние значки у величин $x_k^{(n)}$ и $\theta_k^{(n)}$. При этих обозначениях формула (30) приводится к виду

$$\lambda_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos n\theta \sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}\right|. \tag{32}$$

Если $x = x_k$, то в силу (5) имеем $\lambda_{n-1}(x_k) = 1$. И в этом случае неравенство (29) доказано.

Пусть теперь $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$. Тогда сумму (32) разобьем на две части:

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\cos n\theta \sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{\cos n\theta \sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}\right|. \tag{33}$$

Разумеется, если $0 \leqslant \theta < \theta_1$, то первая сумма отсутствует, а при условии $\theta_n < \theta \leqslant \pi$ в правой части не будет второй суммы.

Рассмотрим отдельно последние два слагаемых в первой сумме и первые два — во второй. Прежде всего отметим два очевидных неравенства:

$$|\sin n\theta| \leqslant n|\sin\theta|,$$

$$\sin\theta \leqslant \sin\theta + \sin t = 2\cos\frac{\theta - t}{2}\sin\frac{\theta + t}{2} \leqslant 2\sin\frac{\theta + t}{2},$$

первое из которых доказывается по индукции, а второе справедливо при условиях $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant t \leqslant \pi$. С помощью этих неравенств, учитывая условие $\cos n\theta_m = 0$, находим

$$\left|\frac{\cos n\theta - \cos n\theta_m}{\cos\theta - \cos\theta_m}\right|\sin\theta_m = \left|\frac{\sin(n(\theta+\theta_m)/2)\sin(n(\theta-\theta_m)/2)}{\sin((\theta+\theta_m)/2)\sin((\theta-\theta_m)/2)}\right|\sin\theta_m \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\sin(n(\theta-\theta_m)/2)}{\sin((\theta-\theta_m)/2)}\right|\frac{\sin\theta_m}{\sin((\theta+\theta_m)/2)} \leqslant 2n.$$

Аналогично оцениваются остальные три выделенных слагаемых. В результате найдем, что сумма четырех выделенных слагаемых с учетом множителя перед общей суммой не превосходит 8.

Таким образом, остается оценить две аналогичные суммы:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=m+3}^{n}\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}. \tag{34}$$

В этих суммах все слагаемые положительны, ибо выполняется условие $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$.

Оценим первую из сумм (34). Так как функция

$$\frac{\sin t}{\cos t - \cos\theta}$$

при условии $0 \leqslant t < \theta$ монотонно возрастает, то, следовательно, имеем неравенство

$$\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta} \leqslant \frac{\sin t}{\cos t - \cos\theta}, \qquad \theta_k \leqslant t \leqslant \theta_{k+1}.$$

Отсюда, учитывая (31), находим

$$\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos\theta}<\int\limits_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\frac{\sin t}{\cos t-\cos\theta}\,dt.$$

Суммируя эти неравенства по k с тем, чтобы получить первую из сумм (34), получаем

$$s_1=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos\theta}<\frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_{m-1}}\frac{\sin t}{\cos t-\cos\theta}\,dt=\frac{1}{\pi}\ln\frac{\cos\theta_1-\cos\theta}{\cos\theta_{m-1}-\cos\theta}.$$

Далее, так как

$$\cos\theta_{m-1}-\cos\theta>\cos\theta_{m-1}-\cos\theta_m,\qquad \sin\frac{\pi}{2n}>\frac{1}{n},$$

то, следовательно, имеем

$$s_1<\frac{1}{\pi}\ln\frac{2}{\cos\theta_{m-1}-\cos\theta_m}=-\frac{1}{\pi}\ln\sin\frac{\theta_{m-1}+\theta_m}{2}-\frac{1}{\pi}\ln\sin\frac{\pi}{2n}<$$
$$<-\frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi}{2n}<\frac{2}{\pi}\ln n,$$

ибо в силу (31) справедливо неравенство

$$\frac{\theta_{m-1}+\theta_m}{2}=\frac{\pi}{2n}\,(2m-2)>\frac{\pi}{2n}.$$

Аналогичную оценку допускает и вторая из сумм (34). Этим теорема 9.1 доказана.

Более сложными построениями доказывается, что для всякой матрицы (18) имеет место неравенство

$$\lambda_{n-1}>\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}. \tag{35}$$

Этот важный результат установили Г. Фабер и С.Н. Бернштейн.

Из неравенств (29) и (35) следует, что в случае сегмента $[-1,1]$ матрица узлов, составленная из нулей многочленов Чебышева первого рода, является наилучшей, ибо в этом случае последовательность интерполяционных постоянных Лебега имеет наименьший порядок возрастания.

Теорема 9.2. *Если матрица узлов* (18) *состоит из нулей многочленов Чебышева первого рода, а функция* $f(x)$ *на сегменте* $[-1,1]$ *удовлетворяет условию Дини, т. е.*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)\ln\frac{1}{\delta}=0, \tag{36}$$

то последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа (19) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на всем сегменте* $[-1,1]$.

В самом деле, из неравенств (25) и (29) имеем

$$|f(x) - L_n(x; f)| \leqslant c_1 E_n(f) \ln n, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{37}$$

С другой стороны, в теории приближения функций хорошо известно (теорема 12.9), что при условии Дини (36) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) \ln n = 0.$$

Этим теорема 9.2 доказана.

Если же функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1, 1]$, причем $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, то из (37) находим

$$|f(x) - L_n(x; f)| \leqslant \frac{c_2 \ln n}{n^{p+\alpha}}, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{38}$$

В монографии [I.6] приведены оценки интерполяционных постоянных Лебега в том случае, когда узлами интерполяции являются нули многочленов Лежандра и нули общих многочленов Якоби.

§ 2. Квадратурные формулы интерполяционно-ортогонального типа Гаусса

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана весовая функция $h(x)$ и система узлов

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{1}$$

Предположим, что по некоторому правилу данному сегменту $[a, b]$, весовой функции $h(x)$ и узлам (1) ставится в соответствие система весов

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n. \tag{2}$$

Тогда для всякой функции $f(x)$, определенной на сегменте $[a, b]$, можно рассматривать квадратурную формулу

$$\int_a^b h(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{3}$$

По этой приближенной формуле удобно вычислять интегралы.

В самом деле, ведь веса (2) не зависят от конкретной функции $f(x)$. И поэтому для вычисления квадратурной суммы (3) надо только вычислить значения функции $f(x)$ в точках (1).

Но, разумеется, сразу же возникает вопрос о величине погрешности приближенного равенства (3). Для изучения этого вопроса рассмотрим квадратурную формулу с остаточным членом

$$\int_a^b h(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{4}$$

Будем считать, что сегмент $[a, b]$ и весовая функция на нем фиксированы. Тогда можно варьировать узлы (1) и веса (2) таким образом, чтобы остаточный член $R_n(f)$ был минимальным. При этом, конечно, задачу минимизации остаточного члена следует рассматривать не для конкретной функции $f(x)$, а для некоторого класса функций W. Иными словами, функция $f(x)$ должна удовлетворять определенным достаточно общим условиям. Можно рассматривать также и другую задачу, когда узлы (1) фиксированы, и, таким образом, остается выбрать оптимальным образом только веса квадратурной формулы (2). Ясно, что в любом случае выбор узлов (1) и весов (2) зависит от структуры функций класса W.

Далее, аналогично интерполяционным процессам можно рассматривать условия и скорость сходимости квадратурных процессов. Пусть аналогично матрице (1.18) заданы две бесконечные нижние треугольные матрицы узлов $\|x_k^{(n)}\|$ и весов $\|A_k^{(n)}\|$. Тогда, проведя оптимизацию по каждой строке, получим последовательность квадратурных сумм вида (3). И естественно возникает вопрос об условиях, при которых справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b h(x) f(x)\, dx. \tag{5}$$

И, конечно, можно рассматривать вопрос о скорости сходимости квадратурных сумм к интегралу для произвольной функции из данного класса W. Весь этот круг вопросов подробно изложен в монографиях [II.2, III.8]. Здесь мы рассмотрим квадратуры *интерполяционно-ортогонального типа*, или *квадратуры типа Гаусса*. Так называются квадратурные формулы, в которых узлами являются нули многочленов, ортогональных с весом $h(x)$ на сегменте $[a, b]$. После К. Гаусса квадратуры этого типа исследовали К.А. Поссе, А.А. Марков и Т. Стилтьес.

Но сначала рассмотрим *квадратуры интерполяционного типа*.

Пусть узлы (1) выбраны произвольно и фиксированы. Рассмотрим интерполяционную формулу Лагранжа по этим узлам с остаточным членом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\, \omega_n'(x_k)} + R_{n-1}(x; f). \tag{6}$$

Умножим это равенство на вес $h(x)$ и проинтегрируем почленно. В результате получим формулу

$$\int_a^b h(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_a^b \frac{h(x)\omega_n(x)}{(x - x_k)\, \omega_n'(x_k)}\, dx + R_n(f), \tag{7}$$

где остаточный член имеет вид

$$R_n(f) = \int_a^b h(x) R_{n-1}(x; f)\, dx. \tag{8}$$

Поскольку при некоторых условиях остаточный член в формуле (6) есть малая величина, то, следовательно, интеграл (8) также мал. Поэтому интегралы в правой части (7) можно принять в качестве весов квадратурной формулы, т. е. полагаем

$$A_k = \int_a^b \frac{h(x)\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

При таком выборе весов квадратурная формула называется *интерполяционной.* Еще раз заметим, что узлы (1) пока остаются произвольными и с весом $h(x)$ не связаны.

Будем говорить, что квадратурная формула (3) является *точной* для некоторой функции $F(x)$, если для этой функции остаточный член равен нулю, т. е. имеем

$$\int_a^b h(x) F(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k F(x_k). \tag{10}$$

Т е о р е м а 9.3. *Для того чтобы квадратурная формула* (3) *порядка n была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для любого многочлена степени не выше $n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F_{n-1}(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$, то аналогично равенству (1.21) из (6) находим

$$F_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{n-1}(x_k)\, \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}. \tag{11}$$

Интегрируя это равенство почленно с весом $h(x)$ и учитывая обозначение (9), получим равенство (10). Этим необходимость теоремы доказана.

Предположим теперь, что квадратурная формула является точной для всякого многочлена степени не выше $n-1$. Тогда представляем многочлен по формуле Лагранжа (11) и подставляем сумму (11) под знак интеграла (10). В результате получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} F_{n-1}(x_k) \int_a^b \frac{h(x)\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k F_{n-1}(x_k).$$

Это равенство справедливо для любого многочлена. Для узла x_k выберем многочлен $F_{n-1}(x)$ так, чтобы он обращался в нуль во всех

остальных узлах, т. е. полагаем

$$F_{n-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n).$$

Тогда в обоих частях предпоследнего равенства останется по одному слагаемому. И после сокращения на величину $F_{n-1}(x_k)$ получим равенство (9). Этим теорема 9.3 доказана.

Переходим к рассмотрению квадратурных формул интерполяционно-ортогонального типа Гаусса.

Пусть $\{B_n(x)\}$ есть последовательность многочленов, ортогональных на сегменте $[a, b]$ с весовой функцией $h(x)$. Положим

$$\omega_n(x) = \widetilde{B}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \tag{12}$$

Иными словами, в качестве узлов (1) принимаются нули ортогонального многочлена $\widetilde{B}_n(x)$. Тогда формула (9) приводится к виду

$$A_k = \int\limits_a^b \frac{h(x)\widetilde{B}_n(x)}{(x - x_k)\widetilde{B}'_n(x_k)}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Как уже было отмечено выше, равенство (3) при условиях (12) и (13) называется квадратурной формулой интерполяционно-ортогонального типа или квадратурной формулой типа Гаусса.

Теорема 9.4. *Для того чтобы квадратурная формула порядка n была интерполяционно-ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для всякого алгебраического многочлена степени не более $2n - 1$.*

Доказательство. Пусть выполняются условия (12) и (13). Тогда произвольный многочлен $F_{2n-1}(x)$ степени не выше $2n - 1$ после деления его обычным способом на $\widetilde{B}_n(x)$ можно представить в виде

$$F_{2n-1}(x) = \widetilde{B}_n(x)Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x), \tag{14}$$

где многочлены $Q_{n-1}(x)$ и $R_{n-1}(x)$ имеют степень не выше $n - 1$. Умножаем равенство (14) на вес $h(x)$ и интегрируем почленно. В результате имеем

$$\int\limits_a^b h(x)F_{2n-1}(x)\,dx = \int\limits_a^b h(x)\widetilde{B}_n(x)Q_{n-1}(x)\,dx + \int\limits_a^b h(x)R_{n-1}(x)\,dx. \tag{15}$$

Первый интеграл в правой части равен нулю в силу ортогональности многочлена $\widetilde{B}_n(x)$ с весом $h(x)$. А второй интеграл в точности равен своей квадратурной сумме, ибо многочлен $R_{n-1}(x)$ имеет степень не выше $n - 1$. Но, с другой стороны, из (14) следуют равенства

$$F_{2n-1}(x_k) = R_{n-1}(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, из формулы (15) имеем

$$\int_a^b h(x)F_{2n-1}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k F_{2n-1}(x_k). \tag{16}$$

Таким образом, интерполяционно-ортогональная квадратурная формула порядка n точна для всякого алгебраического многочлена порядка не выше $2n-1$.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть некоторая квадратурная формула с фиксированными узлами и весами является точной для всякого многочлена степени не выше $2n-1$. Тогда в силу теоремы 9.3 эта квадратурная формула является интерполяционной. Далее, если $Q_{n-1}(x)$ есть произвольный многочлен степени не выше $n-1$, то эта квадратурная формула будет точной для многочлена

$$F_{2n-1}(x) = Q_{n-1}(x)\omega_n(x).$$

Но ведь $\omega_n(x_k) = 0$. Поэтому имеем

$$\int_a^b h(x)Q_{n-1}(x)\omega_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\omega_n(x_k)Q_{n-1}(x_k) = 0.$$

В этих формулах $Q_{n-1}(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Поэтому в силу теоремы 1.2 многочлен $\omega_n(x)$ является ортогональным многочленом с весом $h(x)$, т. е. имеем $\omega_n(x) = \widetilde{B}_n(x)$. Следовательно, в этом случае квадратурная формула является интерполяционно-ортогональной.

Таким образом, теорема 9.4 доказана.

Алгебраической степенью точности некоторой квадратурной формулы порядка n называется такое наибольшее число N, что для всех многочленов степени не выше N эта квадратурная формула является точной. В силу этого определения интерполяционная квадратурная формула порядка n имеет алгебраическую степень точности $n-1$. А квадратурная формула типа Гаусса имеет алгебраическую степень точности $2n-1$.

В настоящем параграфе предполагается, что функция $h(x)$ является весовой функцией на сегменте $[a,b]$. Это означает, что функция $h(x)$ неотрицательна и интегрируема на сегменте $[a,b]$, имеет конечные степенные моменты и, кроме того, интеграл от этой функции по сегменту $[a,b]$ положителен.

Докажем, что ни при каком выборе узлов и весов квадратурная формула порядка n не может иметь алгебраическую степень точности больше чем $2n-1$. Допустим противное: нашлась некоторая система узлов и весов, при которых квадратурная формула порядка n имеет алгебраическую степень точности $2n$. Тогда для неотрицательного

многочлена $F_{2n}(x) = \omega_n^2(x)$ имеем

$$\int_a^b h(x)F_{2n}(x)\,dx = \int_a^b h(x)\omega_n^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^n A_k\omega_n^2(x_k) = 0.$$

Но в силу леммы 1.2 это равенство невозможно, ибо $h(x)$ есть весовая функция.

Таким образом, квадратурные формулы интерполяционно-ортогонального типа Гаусса имеют наивысшую алгебраическую степень точности. Именно этим объясняется тот факт, что нули классических ортогональных многочленов широко применяются в качестве узлов квадратурных формул [II.2, VII.6, VII.9].

А теперь отметим два очевидных утверждения, необходимых для дальнейшего изложения и имеющих самостоятельный интерес.

Во-первых, *для любой квадратурной формулы интерполяционного типа имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b h(x)\,dx. \tag{17}$$

Это следует из теоремы 9.3, ибо здесь $F(x) \equiv 1$.

Во-вторых, *все коэффициенты квадратурной формулы интерполяционно-ортогонального типа положительны.* В самом деле, при фиксированном m применим формулу (16) к многочлену

$$F_{2n-2}(x) = \left[\frac{\widetilde{B}_n(x)}{x - x_m}\right]^2.$$

В результате получим

$$\int_a^b h(x)F_{2n-2}(x)\,dx = \sum_{k=1}^n A_k F_{2n-2}(x_k) = A_m\,|\widetilde{B}'_n(x_m)|^2.$$

Так как интеграл слева положителен, то $A_m > 0$.

Из последнего равенства получается формула

$$A_m = \int_a^b h(x)\Big[\frac{\widetilde{B}_n(x)}{(x - x_m)\widetilde{B}'_n(x_m)}\Big]^2\,dx, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Эта формула эквивалентна формуле (13).

Итак, всякая весовая функция $h(x)$ на сегменте $[a, b]$ определяет бесконечные нижние треугольные матрицы узлов $\|x_k^{(n)}\|$ и весов $\|A_k^{(n)}\|$, причем для каждой строки справедлива теорема 9.4, и

можно рассматривать вопрос о скорости сходимости квадратурного процесса типа Гаусса при возрастающем числе узлов.

Теорема 9.5. *Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a,b]$, то для квадратурных сумм типа Гаусса имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b h(x)f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})\right| \leqslant 2E_{2n-1}(f)\int_a^b h(x)\,dx, \tag{18}$$

где $E_{2n-1}(f)$ есть наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ многочленами порядка не старше $2n-1$.

Доказательство. Пусть $F_{2n-1}(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения порядка не выше $2n-1$ функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$. Для краткости вводим обозначение

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}).$$

Тогда имеем формулы

$$\int_a^b h(x)F_{2n-1}(x)\,dx = S_n(F_{2n-1}),$$

$$|S_n(f) - S_n(F_{2n-1})| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}[f(x_k^{(n)}) - F_{2n-1}(x_k^{(n)})]\right| \leqslant$$
$$\leqslant E_{2n-1}(f)\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = E_{2n-1}(f)\int_a^b h(x)\,dx.$$

Следовательно, для левой части (18) имеем

$$\left|\int_a^b h(x)f(x)\,dx - S_n(f)\right| =$$
$$= \left|\int_a^b h(x)[f(x) - F_{2n-1}(x)]\,dx + S_n(F_{2n-1}) - S_n(f)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2E_{2n-1}(f)\int_a^b h(x)\,dx.$$

Этим теорема 9.5 доказана.

Для всякой непрерывной на конечном сегменте $[a,b]$ функции $f(x)$ последовательность ее наилучших равномерных приближений $\{E_n(f)\}$ сходится к нулю. Поэтому из неравенства (18) следует, что квадратурный процесс типа Гаусса для непрерывной функции сходится.

Более того, неравенство (18) полностью решает вопрос о скорости сходимости квадратурного процесса для различных классов функций, определенных на конечном сегменте. В самом деле, для наилучших приближений $\{E_n(f)\}$ получены исчерпывающие характеристики скорости убывания к нулю, причем указаны не только порядки, но во многих случаях и точные постоянные в соответствующих неравенствах [III.1, III.8, III.12]. Простейшие из этих неравенств приведены в гл. XII.

Рассмотрим наиболее важные частные случаи теоремы 9.5.

Если $h(x) \equiv 1$ на сегменте $[-1, 1]$, то узлами квадратурной формулы типа Гаусса являются нули многочленов Лежандра. В этом случае неравенство (18) имеет вид

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| \leqslant 4E_{2n-1}(f). \tag{19}$$

Так как стандартизованный многочлен Лежандра $P_n(x)$ отличается лишь множителем от многочлена $\widetilde{P}_n(x)$, то в силу формулы (13) для весов имеем представление

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{P_n'(x_k^{(n)})} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,dx}{x - x_k^{(n)}}. \tag{20}$$

С другой стороны, в формуле (IV.1.22) для номера $n-1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} P_k(x)P_k(t) = \frac{n}{2}\, \frac{P_n(x)P_{n-1}(t) - P_n(t)P_{n-1}(x)}{x-t}$$

положим $t = x_k^{(n)}$. Интегрируя по сегменту $[-1, 1]$ и учитывая ортогональность многочленов Лежандра, получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,dx}{x - x_k^{(n)}} = \frac{2}{nP_{n-1}(x_k^{(n)})}. \tag{21}$$

Далее, из равенства (IV.1.31)

$$(1 - x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x),$$

полагая в нем $x = x_k^{(n)}$, определяем знаменатель дроби в правой части (21) и подставляем значение интеграла (21) в правую часть равенства (20). В результате получается формула весов

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{[1 - (x_k^{(n)})^2]\,[P_n'(x_k^{(n)})]^2}. \tag{22}$$

С помощью этой формулы вычисляется таблица весов. Разумеется, сначала надо подсчитать с требуемой точностью нули многочленов

Лежандра. В монографии [II.2] приведены таблицы узлов и весов Лежандра до $n = 16$ включительно, причем вычисления проделаны с точностью до 15-го десятичного знака.

В случае многочленов Чебышева первого рода узлы определяются формулой

$$x_k^{(n)} = \cos\Big(\frac{2k-1}{2n}\,\pi\Big), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

А для весов в силу равенства (13) имеем

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{T_n'(x_k^{(n)})} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,dx}{(x - x_k^{(n)})\sqrt{1-x^2}}. \tag{24}$$

Из формул (VII.1.32) и (VII.1.33), полагая в них $\alpha = \beta = -1/2$ и учитывая равенство (III.1.5), находим

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(x)T_k(t) = \frac{1}{2}\,\frac{T_n(x)T_{n-1}(t) - T_n(t)T_{n-1}(x)}{x-t}.$$

Положим здесь $t = x_k^{(n)}$ и подставим правую часть под знак интеграла (24). В результате интегрирования, учитывая формулу (III.6.1), получим равенство

$$A_k^{(n)} = \frac{\pi}{T_n'(x_k^{(n)})\,T_{n-1}(x_k^{(n)})} = \frac{\pi\sqrt{1-(x_k^{(n)})^2}}{n\sin(n\arccos x_k^{(n)})\,T_{n-1}(x_k^{(n)})}.$$

Далее, обозначая, как обычно, аргумент косинуса в формуле (23) через $\theta_k^{(n)}$, с помощью формулы (III.1.2) имеем

$$T_{n-1}(x_k^{(n)}) = -T_{n+1}(x_k^{(n)}) = -\cos(n+1)\theta_k^{(n)} = \sin n\theta_k^{(n)}\sin\theta_k^{(n)}.$$

Следовательно, из предыдущего равенства находим

$$A_k^{(n)} = \frac{\pi\sin\theta_k^{(n)}}{n(\sin n\theta_k^{(n)})^2\sin\theta_k^{(n)}} = \frac{\pi}{n(\sin n\theta_k^{(n)})^2} = \frac{\pi}{n}. \tag{25}$$

Итак, весовые коэффициенты в случае многочленов Чебышева первого рода не зависят от k и все равны между собой. Поэтому неравенство (18) в этом случае имеет вид

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\right| \leqslant 2\pi E_{2n-1}(f). \tag{26}$$

Таковы наиболее важные квадратурные формулы интерполяционно-ортогонального типа Гаусса.

§ 3. Приближенное дифференцирование по формуле Лагранжа с узлами Чебышева

Пусть, как и в начале § 1, на сегменте $[a, b]$ задана система узлов
$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \tag{1}$$
а функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на этом сегменте. Тогда, аналогично формуле (1.6), вводим интерполяционный многочлен Лагранжа
$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x), \tag{2}$$
где фундаментальные многочлены определяются по формуле
$$l_k(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\,\omega'_{n+1}(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$
Поскольку производная $f'(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то для ее вычисления можно использовать производную от интерполяционного многочлена (2). Таким образом, вводим производную
$$L'_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l'_k(x) \tag{4}$$
и рассматриваем приближенное равенство
$$f'(x) \approx L'_n(x; f), \qquad x \in [a, b]. \tag{5}$$
Далее, из равенства (1.11) имеем формулу
$$f'(x) = L'_n(x; f) + R'_n(x; f), \qquad x \in [a, b]. \tag{6}$$

Таким образом, возникает задача: оценить величину
$$R'_n = \max_{x \in [a,b]} |R'_n(x; f)| \tag{7}$$
в зависимости от системы узлов (1) и от конструктивных свойств функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Величину (7) можно оценить двумя различными способами при различных условиях на функцию $f(x)$ аналогично тому, как это сделано в § 1 для оценки остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа.

Рассмотрим первый случай. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n + 1$ раз на сегменте $[a, b]$. Фиксируем точку x, отличную от точек (1). Для остаточного члена в формуле (6) введем обозначение
$$R'_n(x; f) = K_1 \omega'_{n+1}(x). \tag{8}$$
В результате формулу (6) можно записать в виде
$$f'(x) = L'_n(x; f) + K_1 \omega'_{n+1}(x). \tag{9}$$
Заметим, что здесь величина K_1 зависит от x.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(t) - L_n(t; f) - K_1\omega_{n+1}(t). \tag{10}$$

В силу формулы (2) эта функция имеет нули в точках (1). Поскольку все точки (1) различны и число их равно $n+1$, то производная

$$F'(t) = f'(t) - L'_n(t; f) - K_1\omega'_{n+1}(t) \tag{11}$$

имеет n нулей. И еще один нуль $t = x$ в силу обозначения (8) и равенства (4). В результате производная (11) имеет $n+1$ нулей на сегменте $[a, b]$, даже если нуль $t = x$ совпадает с одним из n вышеупомянутых нулей. Следовательно, вторая производная

$$F''(t) = f''(t) - L''_n(t; f) - K_1\omega''_{n+1}(t)$$

имеет на этом сегменте n нулей. Продолжая этот процесс, найдем, что производная

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K_1(n+1)!$$

имеет на сегменте $[a, b]$ по крайней мере один нуль. Иными словами, существует такая точка $\xi_1 \in (a, b)$, что выполняется условие

$$F^{(n+1)}(\xi_1) = f^{(n+1)}(\xi_1) - K_1(n+1)! = 0.$$

Отсюда находим

$$K_1 = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}.$$

Следовательно, равенство (9) приводится к виду

$$f'(x) = L'_n(x; f) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\,\omega'_{n+1}(x). \tag{12}$$

Далее, вводим обозначение

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Тогда для величины (7) получаем оценку

$$R'_n \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |\omega'_{n+1}(x)|. \tag{13}$$

Таким образом, узлы (1) необходимо выбрать так, чтобы производная $\omega'_{n+1}(x)$ была многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на сегменте $[a, b]$.

В случае сегмента $[-1, 1]$ необходимо положить

$$\omega'_{n+1}(x) = (n+1)\widetilde{T}_n(x). \tag{14}$$

Далее применяем формулу дифференцирования для стандартизованных многочленов Якоби (VII.3.2)

$$P'_n(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta + n + 1)\,P_{n-1}(x; \alpha+1, \beta+1).$$

Имея в виду равенство (14), полагаем в этой формуле $\alpha+1=\beta+1=$ $=-1/2$ и подставляем $n+1$ вместо n. В результате имеем

$$P'_{n+1}\Big(x;-\frac{3}{2}\Big)=\frac{1}{2}(n-1)P_n\Big(x;-\frac{1}{2}\Big).$$

А теперь переходим от стандартизованных многочленов Якоби к многочленам Якоби с единичным старшим коэффициентом. Используя формулу (VII.1.17), находим

$$\widetilde{P}'_{n+1}\Big(x;-\frac{3}{2}\Big)=(n+1)\widetilde{P}_n\Big(x;-\frac{1}{2}\Big)=(n+1)\widetilde{T}_n(x). \tag{15}$$

Таким образом, для того чтобы правая часть неравенства (13) была наименьшей, необходимо в качестве узлов интерполяции (1) выбрать нули многочлена Якоби

$$\widetilde{P}_{n+1}\Big(x;-\frac{3}{2}\Big). \tag{16}$$

Здесь индекс Якоби есть $\alpha=\beta=-3/2$, а индекс Гегенбауэра $\lambda=-1$. При таких значениях индексов функция

$$h\Big(x;-\frac{3}{2}\Big)=(1-x^2)^{-3/2} \tag{17}$$

не является весовой. Но для многочленов вида (16) имеют место многие формальные свойства многочленов Якоби. В частности, для многочленов (16) справедлива формула Родрига (VII.1.2) и явное представление по формуле (VII.1.6). Кроме того, многочлены Якоби с индексами, при которых весовая функция не интегрируема, представляются через гипергеометрическую функцию [IV.1]. Все эти формулы можно принять в качестве определения многочленов вида (16).

Рассмотрим теперь второй способ оценки величины (7). В первом способе число непрерывных производных интерполируемой функции на сегменте $[a,b]$ равно числу узлов интерполяции. А теперь предположим, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a,b]$ только одну или две непрерывных производных. В этом случае формулы (12) и (13) не имеют места.

Производная многочлена Лагранжа (2) имеет вид

$$L'_n(x;f)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l'_k(x), \tag{18}$$

где

$$l'_k(x)=\frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k)}\Big[\frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k}\Big]'=\frac{\omega'_{n+1}(x)(x-x_k)-\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)^2}. \tag{19}$$

Далее вводим многочлены $\{Q_n(x)\}$ равномерного приближения функции $f(x)$. Для этих многочленов имеем формулы

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}Q_n(x_k)l_k(x,n), \tag{20}$$

$$Q_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_n(x_k) l_k'(x, n). \tag{21}$$

А теперь рассматриваем равенство

$$f'(x) - L_n'(x; f) = [f'(x) - Q_n'(x)] + [Q_n'(x) - L_n'(x; f)]. \tag{22}$$

В силу формул (18) и (21) имеем

$$Q_n'(x) - L_n'(x; f) = \sum_{k=0}^{n} [Q_n(x_k) - f(x_k)] l_k'(x; n). \tag{23}$$

В формулах (22) и (23) фигурируют разности

$$[f'(x) - Q_n'(x)], \qquad [Q_n(x_k) - f(x_k)]. \tag{24}$$

Возникает вопрос о таком выборе приближающих многочленов $\{Q_n(x)\}$, для которых разности вида (24) были бы малыми. Такая задача о совместном приближении самой функции и ее производных в теории приближений исследована очень подробно. Один результат сформулирован в самом конце последней главы. Приведем формулировку для сегмента $[-1, 1]$.

Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1, 1]$, то существует такая последовательность алгебраических многочленов $\{Q_n(x)\}$, что выполняются неравенства

$$|f^{(m)}(x) - Q_n^{(m)}(x)| \leqslant c_1 \left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n}\right)^{p-m} \omega\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n}; f^{(p)}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, p, \tag{25}$$

где $\omega(\delta, f^{(p)})$ — модуль непрерывности производной $f^{(p)}(x)$, а постоянная c_1 зависит только от p.

Рассмотрим теперь формулы (22) и (23) только для сегмента $[-1, 1]$. В силу неравенств (25) имеем

$$|f'(x) - L_n'(x; f)| \leqslant |f'(x) - Q_n'(x)| + |Q_n'(x) - L_n'(x; f)| \leqslant \\ \leqslant \frac{c_2}{n^p} \omega\left(\frac{1}{n}; f^{(p)}\right) \left[n\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^{p-1} + \sum_{k=0}^{n} |l_k'(x; n)|\right]. \tag{26}$$

Таким образом, возникает задача: оценить величину

$$\lambda_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k'(x; n)|, \qquad x \in [-1, 1]. \tag{27}$$

Эта величина оценивается в зависимости от расположения узлов (1) на сегменте $[-1, 1]$. В качестве узлов выбираются нули многочленов Чебышева первого рода и второго рода. Используются конкретные формулы для этих нулей. К этим нулям иногда присоединяются и концы сегмента. Многочисленные результаты получены в работах Н.С. Байгузова [XI.13–XI.15]. Приведем основные формулировки из этих работ.

Теорема 9.6. *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1,1]$, а в качестве узлов* (1) *выбраны нули многочленов Чебышева первого рода*

$$x_k^{(n+1)} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{28}$$

то имеет место неравенство

$$|f'(x) - L'_n(x; f)| \leqslant c_3\,\omega\left(\frac{1}{n}; f''\right), \qquad x \in [-1,1], \tag{29}$$

где $\omega(\delta, f'')$ — модуль непрерывности производной $f''(x)$.

Теорема 9.7. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема один раз на сегменте $[-1,1]$, то при узлах* (28) *имеет место неравенство*

$$|f'(x) - L'_n(x; f)| \leqslant \frac{c_4}{\sqrt{1-x^2}}\,\omega\left(\frac{1}{n}; f'\right)\ln n, \qquad x \in (-1,1). \tag{30}$$

Теорема 9.8. *Если функция $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ дифференцируема p раз, то при узлах*

$$x_0^{(n+1)} = 1, \quad x_n^{(n+1)} = -1, \quad x_k^{(n+1)} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n-2}\,\pi\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{31}$$

имеет место неравенство

$$|f'(x) - L'_n(x; f)| \leqslant \frac{c_5}{n^{p-1}}\,\omega\left(\frac{1}{n}; f^{(p)}\right)\ln n, \qquad x \in [-1,1]. \tag{32}$$

Далее, наряду с интерполяционными многочленами Лагранжа можно рассматривать интерполяционные многочлены Эрмита с двойными узлами.

Обозначим через $H_{2n+1}(x; f)$ интерполяционный многочлен Эрмита, удовлетворяющий в узлах (1) условиям

$$H_{2n+1}(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{33}$$

$$H'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Теорема 9.9. *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1,1]$, то при узлах* (31) *имеет место неравенство*

$$|f'(x) - H'_{2n+1}(x; f)| \leqslant c_6\,\frac{\ln n}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}; f''\right), \qquad x \in [-1,1]. \tag{35}$$

Теорема 9.10. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$, то при узлах* (28) *справедлива оценка*

$$|f'(x) - H'_{2n+1}(x; f)| \leqslant \frac{c_7}{n^{p-2}}\,\omega\left(\frac{1}{n}; f^{(p)}\right), \qquad x \in [-1,1]. \tag{36}$$

Аналогичные результаты справедливы для матрицы, составленной из нулей многочленов Чебышева второго рода

$$x_k^{(n+1)} = \cos\frac{k\pi}{n+2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{37}$$

и для матрицы

$$x_k^{(n+1)} = \cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{38}$$

В вышеупомянутых работах Н.С. Байгузова получены также оценки погрешности формул приближенного дифференцирования в терминах наилучших приближений. Рассмотрены также конкретные контрпримеры, показывающие неулучшаемость в смысле порядка почти всех полученных результатов.

Разумеется, вместо первой производной можно рассматривать вопрос о приближенном вычислении второй производной $f''(x)$ с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Эрмита. Доказательства получаются с помощью формул (25).

§ 4. Классические ортогональные многочлены в операционном исчислении

Пусть функция $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0. Тогда, как известно, изображение этой функции по Лапласу

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, \qquad p = s + i\sigma, \tag{1}$$

является аналитической функцией в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.

Если известно изображение, то оригинал находится по формуле Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \qquad a > s_0. \tag{2}$$

В операционном исчислении разработано много методов вычисления интегралов (1) и (2) в конечном виде. При этом более трудной задачей является определение оригинала по изображению, т. е. выполнение обратного преобразования Лапласа (2). Интеграл Меллина (2) вычисляется в конечном виде редко. И поэтому для обращения преобразования Лапласа применяются различные численные методы и искусственные приемы. В частности, при решении этой задачи применяются классические ортогональные многочлены [VII.7, VII.8, VIII.2].

Начнем с простейшего результата, в котором взаимно однозначное соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

Как известно, по первой теореме о разложении [VII.7, VII.8, VIII.2], если функция-изображение $F(p)$ является аналитической в окрестности точки $p = \infty$ и имеет там лорановское разложение вида

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}}, \tag{3}$$

то ее оригинал в силу операционного равенства

$$t^k \risingdotseq \frac{k!}{p^{k+1}}$$

находится по формуле

$$f(t) = \sigma_0(t)\varphi(t), \tag{4}$$

где $\sigma_0(t)$ — единичная функция Хевисайда и

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}\, t^k. \tag{5}$$

Так как ряд (3) сходится в некоторой окрестности точки $p = \infty$, то, следовательно, ряд (5) сходится во всей комплексной плоскости, т. е. функция $\varphi(t)$ является целой функцией.

Рассмотрим теперь многочлены Чебышева–Лагерра при $\alpha = 0$. Для этих многочленов в силу формулы (VI.1.46) имеем

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \,\frac{t^k}{k!}. \tag{6}$$

Следовательно, изображением оригинала $\sigma_0(t)L_n(t)$ будет рациональная функция

$$F_n(p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \,\frac{1}{p^{k+1}}.$$

Таким образом, имеем операторное равенство

$$L_n(t) \risingdotseq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \,\frac{1}{p^{k+1}}. \tag{7}$$

Предположим теперь, что на интервале $(0, \infty)$ задана некоторая функция, разлагающаяся в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t), \qquad t \in (0, \infty), \tag{8}$$

причем этот ряд сходится таким образом, что после умножения на функцию $\exp(-pt)$ его можно интегрировать почленно по всему интервалу $(0, \infty)$. Тогда, применяя формулу (7), получим изображение функции (4) при условии (8) в виде

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \,\frac{1}{p^{k+1}} \right].$$

Таким образом, имеем операторное равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{p^{k+1}} \right]. \tag{9}$$

Разумеется, в этом равенстве можно считать заданной правую часть и определять по ней левую, т. е. решать задачу обращения преобразования Лапласа.

Операторное равенство (9) можно рассматривать как некоторую теорему о разложении, которая устанавливает коэффициентное соответствие между оригиналами и изображениями некоторых классов. При этом формула (9) обслуживает гораздо более широкие множества оригиналов и изображений, чем вышеупомянутая первая теорема о разложении. В самом деле, в формуле (5) функция $\varphi(t)$ есть целая аналитическая функция, а в формуле (8) функция $\varphi(t)$ определена лишь на интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяет там некоторым условиям, достаточным для разложения ее в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

Переходим к рассмотрению следующего, более эффективного приема обращения преобразования Лапласа.

Разложим произведение $\varphi(t)\exp(t/2)$ в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра. В результате для функции $\varphi(t)$ из формулы (4) имеем представление

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n(t), \tag{10}$$

где коэффициенты в силу формул (VI.1.45) и (VI.1.46) имеют вид

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{t/2} \varphi(t) L_n(t)\, dt = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \varphi(t) L_n(t)\, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \varphi(t) t^k\, dt.$$

Далее, применяем формулу дифференцирования изображения

$$F^{(k)}(p) \risingdotseq (-1)^k t^k \varphi(t).$$

В результате получим

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} C_n^k F^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Следовательно, если известны все производные функции-изображения $F(p)$ в точке $p = 1/2$, то можно по формуле (11) вычислить коэффициенты $\{A_n\}$ и определить тем самым функцию (10), а затем в силу равенства (4) и оригинал $f(t)$.

Для обращения преобразования Лапласа можно применять и многочлены Лежандра.

В интеграле (1) сделаем замену переменной по формуле $e^{-t} = x$. В результате имеем

$$F(p) = \int_0^1 x^{p-1}\Phi(x)\,dx, \tag{12}$$

где введена новая неизвестная функция

$$\Phi(x) = f(-\ln x). \tag{13}$$

Поскольку изображение $F(p)$ здесь известно, то можно вычислять его в целочисленных точках

$$F(k+1) = \int_0^1 x^k\Phi(x)\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Далее вводим смещенные многочлены Лежандра по формуле

$$P_n^*(x) = P_n(2x-1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Эти многочлены ортогональны на сегменте $[0, 1]$ тоже с единичным весом. В силу формулы (IV.1.6) можно вычислить норму. Имеем

$$\int_0^1 [P_n^*(x)]^2\,dx = \int_0^1 P_n^2(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P_n^2(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}.$$

Следовательно, определяя коэффициенты по формуле

$$c_k = \int_0^1 \Phi(x)P_n^*(x)\,dx, \tag{16}$$

получим разложение неизвестной функции

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)c_kP_k^*(x), \qquad x \in [0, 1]. \tag{17}$$

Покажем, что хотя функция $\Phi(x)$ нам не известна, коэффициенты (16) вычислить можно, если воспользоваться известными числами (14).

В самом деле, в силу формулы (IV.1.12) известны все коэффициенты стандартизованного многочлена Лежандра $P_k(x)$. Поэтому в силу формулы (15) можно вычислить и все коэффициенты смещенного многочлена Лежандра $P_k^*(x)$. Представим этот многочлен в виде

$$P_k^*(x) = \sum_{m=0}^{k} b_m^{(k)}x^m$$

и подставим в формулу (16). В результате, используя обозначения (14), получим

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} b_m^{(k)} \int_0^1 \Phi(x) x^m \, dx = \sum_{m=0}^{k} b_m^{(k)} F(m+1). \tag{18}$$

Таким образом, все коэффициенты $\{c_k\}$ выражаются через значения изображения в целочисленных точках. И неизвестная функция $\Phi(x)$ определяется как сумма ряда (17). А затем по формуле (13) определяется функция-оригинал $f(t)$.

В связи с изложенным приемом возрастает роль смещенных многочленов Лежандра. Коэффициенты этих многочленов суть целые числа и могут быть вычислены с помощью формулы (15). В книге [VII.7] приведена таблица коэффициентов смещенных многочленов Лежандра до $n = 15$ включительно.

Аналогичным образом для обращения преобразования Лапласа применяются и другие системы ортогональных многочленов. Рассмотрим еще случай многочленов Чебышева первого рода.

В интеграле Лапласа (1) сделаем ту же замену по формуле $e^{-t} = x$, но представим его в виде

$$F(p) = \int_0^1 x^{p-1} \Psi(x) \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}. \tag{19}$$

Здесь вместо (13) введена другая неизвестная функция

$$\Psi(x) = f(-\ln x)\sqrt{x - x^2}, \qquad x \in [0, 1]. \tag{20}$$

Введем смещенные многочлены Чебышева первого рода по формуле

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1).$$

Эти многочлены ортогональны на сегменте $[0, 1]$ со смещенным весом Чебышева. Для квадрата нормы имеем

$$\int_0^1 [T_n^*(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \int_{-1}^1 T_n^2(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \begin{cases} \pi/2, & n > 0, \\ \pi, & n = 0. \end{cases}$$

Следовательно, если ввести коэффициенты

$$c_k = \int_0^1 \Psi(x) T_k^*(x) \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

то для неизвестной функции получим разложение

$$\Psi(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k^*(x)\right], \qquad x \in [0, 1). \tag{22}$$

Так как изображение $F(p)$ известно, то из (19) находим числа

$$F(k+1) = \int\limits_0^1 x^k \Psi(x) \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Далее вводим разложение смещенных многочленов Чебышева

$$T_k^*(x) = \sum_{m=0}^{k} \beta_m^{(k)} x^m.$$

Подставляем это разложение в формулу (21). Учитывая (23), получаем

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} \beta_m^{(k)} \int\limits_0^1 x^m \Psi(x) \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \sum_{m=0}^{k} \beta_m^{(k)} F(m+1). \tag{24}$$

Поскольку значения (23) известны, то все коэффициенты (24) тоже вычисляются. Следовательно, в силу формулы (22) можно считать известной и функцию $\Psi(x)$.

Все эти методы обращения преобразования Лапласа можно использовать для приближенного вычисления неизвестного оригинала $f(t)$ с любой степенью точности. В качестве приближающих многочленов можно брать частичные суммы рядов (10), (17) и (22).

§ 5. Некоторые дополнения и задачи

Как известно, классические ортогональные многочлены давно успешно и, можно сказать, традиционно применяются в вычислительной математике. Во многих книгах по вычислительной математике излагаются основные свойства ортогональных многочленов, а затем эти многочлены используются при решении различных задач вычислительного характера.

1. В учебном пособии И.С. Березина и Н.П. Жидкова [VI.2] ортогональным многочленам посвящена гл. V. В этой главе излагаются свойства ортогональных многочленов и их приложения к вычислительным задачам. При этом ортогональные многочлены рассматриваются как главный аппарат в теории среднеквадратических приближений функций. В этой книге [VI.2] подробно рассматриваются вопросы теории приближения функций, теории равномерных приближений, приближенное интегрирование и дифференцирование. Поэтому весь первый том [VI.2] учебного пособия И.С. Березина и Н.П. Жидкова можно рассматривать как книгу по теории приближения функций. Этот факт свидетельствует о том, как важна роль в вычислительной математике теории приближения функций и ее составной части — теории ортогональных многочленов.

2. В учебном пособии Н.С. Бахвалова [VI.1] ортогональным многочленам уделяется большое внимание. Отдельные параграфы посвящены многочленам Чебышева и общим ортогональным многочленам. Подробно рассмотрены применения ортогональных многочленов в теории интерполирования функций и в квадратурных формулах.

3. В книге В.И. Крылова [II.2] ортогональным многочленам посвящена гл. II. В этой главе подробно рассмотрены основные свойства многочленов Чебышева, Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общих многочленов Якоби. В гл. VII подробно рассмотрено применение нулей ортогональных многочленов в квадратурных формулах. При этом отдельные параграфы посвящены квадратурным формулам с узлами в нулях многочленов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и в некоторых случаях в нулях многочленов Якоби. И в каждом из этих случаев приводятся таблицы квадратурных коэффициентов.

4. В 1995 г. вышла книга О.В. Локуциевского и М.Б. Гаврикова [VI.4]. Как сказано в аннотации, эта книга отличается от аналогичных изданий глубоким проникновением теории приближений и функционального анализа в вычислительную математику, что позволило рассмотреть многие фундаментальные вопросы (теорию интерполяции, численное дифференцирование, теорию механических квадратур, теорию разностных схем) с единых позиций. К этому можно добавить главную характерную деталь: в первом параграфе первой главы подробно рассмотрены свойства ортогональных многочленов. А далее в тексте ортогональные многочлены часто применяются в доказательствах и даже в формулировках результатов.

5. Классические ортогональные многочлены широко применяются в операционном исчислении, особенно при численном обращении преобразования Лапласа. Известные результаты по этому направлению излагаются во многих книгах [II.1, VII.7, VII.8, VIII.2].

6. В работе автора [XI.35] предлагается в качестве узлов интерполяции в формуле Лагранжа выбирать нули многочленов Гегенбауэра, если формула Лагранжа применяется для приближенного дифференцирования. Эти результаты изложены в § 4. В связи с этими результатами можно сформулировать несколько нерешенных задач.

7. Было бы интересно рассмотреть свойства нулей многочленов Якоби при индексах $\alpha = \beta = -3/2$ и разработать методику вычисления этих нулей, например, исходя из формул [I.6, IV.2]

$$\widetilde{P}_{n+1}\left(x; -\frac{3}{2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\Gamma(n-1)}{\Gamma(2n)}\,(1-x^2)^{3/2}\left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]^{(n+1)}, \quad (1)$$

$$\widetilde{P}_{n+1}\left(x; -\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(n-1)\,\Gamma^2(n+1/2)}{\Gamma(2n)} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k (x-1)^{n+1-k}(1+x)^k}{\Gamma(n-k+1/2)\Gamma(k-1/2)}. \quad (2)$$

8. В формулах (3.29) и (3.30) остаточный член формулы приближенного дифференцирования оценивается при условии, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-1,1]$ только две непрерывные производные, а в качестве узлов интерполяции принимаются нули многочленов Чебышева первого рода. На наш взгляд, было бы интересно получить аналогичные результаты в случае, когда узлы интерполяции суть нули многочленов Якоби при $\alpha=\beta=-3/2$.

9. Вместо формулы Лагранжа (3.2) можно, конечно, рассматривать интерполяционную формулу Эрмита с кратными узлами в нулях многочлена $P_{n+1}(x;-3/2)$, например с двойными узлами. И было бы интересно получить аналоги формул (3.35) и (3.36) в случае, когда функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1,1]$.

10. Формулу (3.15) можно представить в виде

$$\Big[\widetilde{P}_{n+1}\Big(x;-\frac{3}{2}\Big)+c\Big]'=(n+1)\,\widetilde{T}_n(x), \tag{3}$$

где c — произвольный параметр. Поэтому можно ввести многочлен с параметром

$$Q_{n+1}(x;c)=\widetilde{P}_{n+1}\Big(x;-\frac{3}{2}\Big)+c, \qquad c\neq 0. \tag{4}$$

Нули этого многочлена отличаются от нулей многочлена Якоби $\widetilde{P}_{n+1}(x;-3/2)$. Можно рассмотреть вариацию параметра c с тем, чтобы упростить вычисление нулей многочлена (4).

11. Рассмотрим еще одну нерешенную задачу. Интегральное преобразование Лапласа

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, \qquad \operatorname{Re}p>0, \tag{5}$$

переводит оригинал $f(t)$ в изображение $F(p)$. Было бы интересно рассмотреть случаи, когда оригинал $f(t)$ и изображение $F(p)$ отличаются только постоянным множителем μ, т. е. выполняется условие

$$F(p)\equiv\mu f(p), \qquad \operatorname{Re}p>0. \tag{6}$$

Один пример тождества (6) известен, а именно, если $f(t)=1/\sqrt{t}$, то $F(p)=\sqrt{\pi/p}$.

Поскольку функция-оригинал $f(t)$ определена при $t>0$, то естественно рассматривать формальное разложение этой функции в ряд по функциям Лагерра [I.6, II.1, IV.2]

$$f(t)=\sum_{n=0}^\infty a_nL_n(t)\exp\Big(-\frac{t}{2}\Big), \qquad t>0, \tag{7}$$

где $L_n(t)$ — многочлены Чебышева–Лагерра при $\alpha=0$.

В силу формул (5) и (6) коэффициенты a_n в разложении (7) надо выбрать так, чтобы выполнялось тождество

$$\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(p) \exp\left(-\frac{p}{2}\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} L_k(t) \exp\left(-pt - \frac{t}{2}\right) dt. \qquad (8)$$

Полученные интегралы вычисляются [VII.4] и имеют вид

$$\int_0^{\infty} L_k(t) \exp\left(-pt - \frac{t}{2}\right) dt = \frac{(1/2 - p)^k}{(1/2 + p)^{k+1}}.$$

Далее вводим разложения

$$\frac{(1/2 - p)^k}{(1/2 + p)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} L_n(p) \exp\left(-\frac{p}{2}\right).$$

А тогда тождество (8) приводится к виду

$$\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(p) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} L_n(p).$$

Следовательно, для неизвестных коэффициентов $\{a_k\}$ получается система уравнений

$$\mu a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_n^{(k)}, \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad (9)$$

Интересно выяснить, при каких μ существуют решения этой бесконечной системы уравнений? Возможность применения известных теорем о бесконечных системах уравнений [VI.3] зависит от свойств коэффициентов разложений (9).

Эта задача опубликована в заметке автора [XI.29].

Глава X

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ В ТЕХНИЧЕСКИХ НАУКАХ И В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Радиотехнические фильтры Чебышева

Многочлены Чебышева первого рода благодаря своим экстремальным свойствам находят широкое применение в конструировании радиотехнических фильтров [IX.1, IX.7].

Фильтром называется электрическая цепь, которая пропускает переменные токи определенной полосы частот, а токи других частот — задерживает.

Обычно электрический фильтр представляет собой пассивный четырехполюсник, т. е. такую электрическую цепь, которая имеет две пары зажимов, входную и выходную, причем обращается внимание только на токи и напряжения на этих зажимах.

Рассмотрим четырехполюсник, включенный между генератором E_0 и нагрузкой R_2 (рис. 10.1).

При расчете электрических фильтров широко применяется операторный метод, основанный на одностороннем преобразовании Лапласа. В этом случае к функциям, определяющим токи и напряжения, применяется преобразование Лапласа. В результате получаются опе-

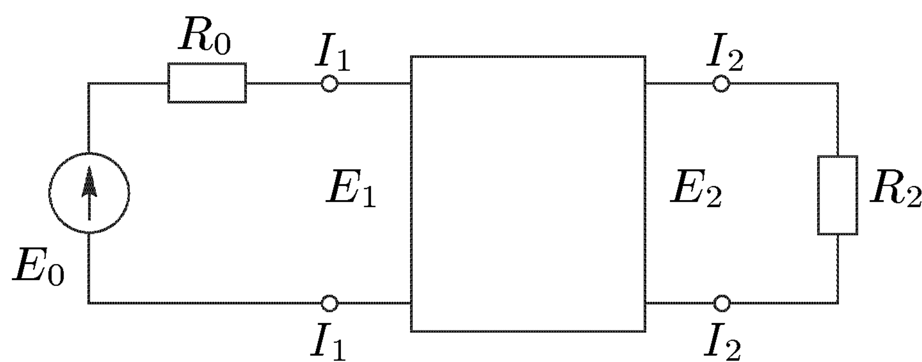


Рис. 10.1

раторные токи и напряжения, а также сопротивления. На рис. 10.1 указаны именно операторные характеристики электрической цепи.

Как известно, мощность источника с внутренним сопротивлением определяется формулой

$$P_0 = \frac{E_0^2}{4R_0}.$$

А мощность, которая теряется в сопротивлении R_2, имеет величину

$$P_2 = \frac{E_2^2}{R_2}.$$

Мы будем рассматривать все эти величины в зависимости от частоты колебаний ω.

В качестве показателя работы четырехполюсника принимается коэффициент преобразования мощности при различных частотах. Этот коэффициент определяется формулой

$$\lambda = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = \frac{E_2}{E_0}\sqrt{\frac{4R_0}{R_2}} = \sqrt{g}\sqrt{\frac{4R_0}{R_2}}. \qquad (1)$$

Здесь введена функция преобразования операторного напряжения

$$g = g(\omega) = \left[\frac{E_2(\omega)}{E_0(\omega)}\right]^2. \qquad (2)$$

Далее, обозначим через $P_1(\omega)$ операторную мощность, которую четырехполюсник отражает при данной частоте ω, и введем при комплексном p характеристическую функцию четырехполюсника

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}. \qquad (3)$$

В электротехнике устанавливается, что операторные характеристики (3) электрических цепей являются дробно-рациональными функциями. Эти функции удовлетворяют определенным условиям. В частности, дробно-рациональная функция (3) должна обладать следующими свойствами.

1. Эта функция действительна при действительном значении независимого переменного.

2. Если $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, то должно быть $\operatorname{Re} F(p) \geqslant 0$.

3. Все полюсы функции $F(p)$ расположены в левой полуплоскости.

Только при выполнении этих трех условий рациональной функции $F(p)$ может соответствовать некоторый реальный четырехполюсник. При этом, конечно, чем выше степени многочленов в числителе и знаменателе дроби (3), тем сложнее устройство четырехполюсника. Из очевидного равенства

$$P_0(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega),$$

учитывая обозначения (1) и (3), находим

$$\frac{1}{\lambda^2} = F(\omega) + 1. \qquad (4)$$

Далее, вводя положительный коэффициент

$$A = \frac{R_2}{4R_0},$$

из равенства (4), учитывая обозначения (1) и (2), получаем

$$g(\omega) = \frac{A}{1 + F(\omega)}, \qquad 0 \leqslant \omega < \infty. \qquad (5)$$

Это основное уравнение для расчета фильтров. Оно выражает функцию преобразования операторного напряжения через характеристическую функцию четырехполюсника.

Рассмотрим простейшую задачу синтеза низкочастотного фильтра. Низкочастотным называется такой фильтр, который пропускает переменный ток частоты ω в пределах от 0 до некоторого a и задерживает колебания с частотой выше a.

График функции преобразования идеального низкочастотного фильтра изображен на рис. 10.2. В этом идеальном случае функция усиления $g(\omega)$ должна быть равна единице в полосе пропускания, т. е. при $\omega \in [0, a]$, и нулю в полосе задержания, т. е. при $\omega > a$. Итак, должно быть

$$g(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, a], \\ 0, & \omega > a. \end{cases}$$

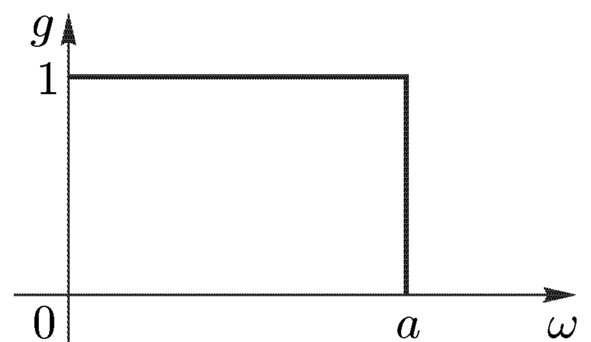


Рис. 10.2

Но никакая рациональная функция не может иметь такой график. Поэтому возникает следующая чисто математическая задача. Необходимо так подобрать рациональную функцию $F(\omega)$ в формуле (5), чтобы график функции (5) в определенном смысле наименее уклонялся от графика функции преобразования идеального фильтра.

В зависимости от выбора характеристической функции $F(\omega)$ различают фильтры Чебышева, Баттерворта и Кауэра [IX.1, IX.7].

Если для полосы пропускания $[0, 1]$ характеристическую функцию определить равенством

$$F_n(\omega) = \varepsilon T_n^2(\omega) = \varepsilon \cos^2(n \arccos \omega), \qquad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

то соответствующий электрический фильтр называется *фильтром Чебышева*. В этом случае функция преобразования имеет вид

$$g_n(\omega) = \frac{A}{1 + \varepsilon T_n^2(\omega)}. \tag{7}$$

А в полосе пропускания имеем неравенство

$$\frac{A}{1+\varepsilon} \leqslant g_n(\omega) \leqslant A, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 1. \tag{8}$$

Используя график многочлена Чебышева первого рода, нетрудно построить график функции (7). В самом деле, производная функции (7) имеет вид

$$g_n'(\omega) = \frac{-2\varepsilon A T_n(\omega) T_n'(\omega)}{[1 + \varepsilon T_n^2(\omega)]^2}.$$

Следовательно, график функции (7) не имеет угловых точек и в полосе пропускания имеет максимумы в нулях многочленов Чебышева первого рода и минимумы — в экстремальных точках. Далее, так как на полусегменте $[1, \infty)$ многочлен Чебышева первого рода очень быстро возрастает при $\omega \to \infty$, то график функции (7) очень быстро опускается вниз к горизонтальной оси.

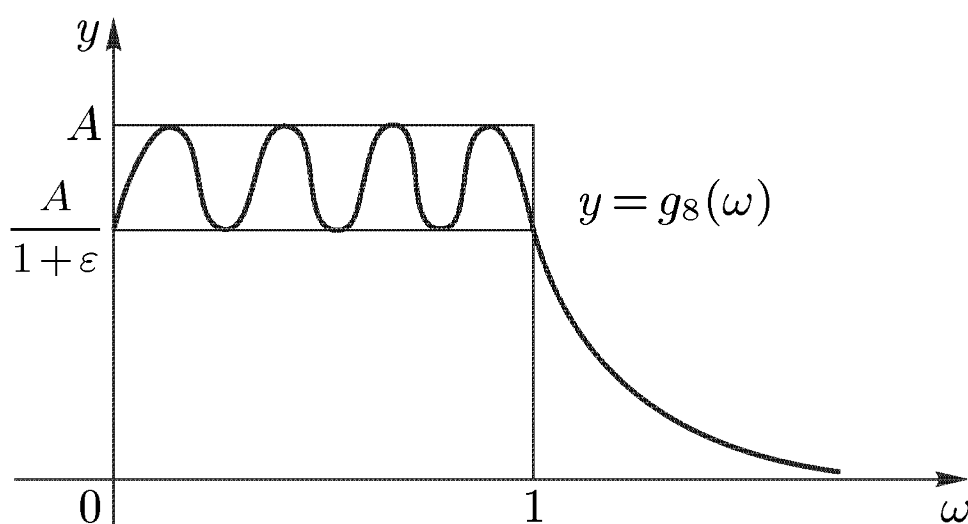


Рис. 10.3

На рис. 10.3 изображен график функции $y = g_8(\omega)$.

Рассмотрим роль параметра ε в формуле (7). В силу неравенства (8) отклонение графика функции (7) от горизонтальной линии $y = A$ на сегменте $[0, 1]$ равно $A\varepsilon/(1+\varepsilon)$. Следовательно, если взять ε достаточно малым, то отклонение функции $y = g_n(\omega)$ на сегменте $[0, 1]$ будет очень малым. Но тогда справа от точки $\omega = 1$ график этой функции будет опускаться вниз не очень быстро, ибо хотя многочлен Чебышева $T_n(\omega)$ при $\omega > 1$ возрастает очень быстро, но малый множитель ε в формуле (7) будет снижать скорость убывания функции $g_n(\omega)$. Физически все это означает, что электрический фильтр Чебышева будет мало искажать напряжения в полосе пропускания $[0, 1]$, но зато слабо подавлять напряжение в полосе задержания, особенно справа вблизи точки $\omega = 1$.

Если же ε не очень мало, то аппроксимация нуля в каждой точке полосы задержания будет более точной, но зато в полосе пропускания функция $g_n(\omega)$ будет отклоняться от горизонтальной линии $y = A$ гораздо более, чем в первом случае. Физически последний случай характеризуется тем, что фильтр Чебышева, хорошо подавляя напряжения в полосе задержания, в то же время будет сильно искажать напряжения в полосе пропускания.

Из сказанного следует, что выбор параметра ε в формуле (7) определяется в основном теми техническими требованиями, которым должен удовлетворять проектируемый фильтр. Второй параметр A в формуле (7) является масштабным множителем и определяется также в зависимости от конкретных технических условий.

Рассмотрим теперь некоторые модификации формулы (7).

Прежде всего, для фильтра Чебышева с полосой пропускания $[0, a]$ функция преобразования имеет вид

$$g_n(\omega) = \frac{A}{1+\varepsilon T_n^2(\omega/a)}, \qquad 0 \leqslant \omega < \infty.$$

Далее, точность приближения нуля в интервале задержания $(1, \infty)$ можно несколько улучшить, если функцию преобразования определить по формуле

$$g_n(\omega) = \frac{A}{1+\varepsilon T_n^2(2\omega-1)}. \tag{9}$$

В самом деле, многочлен $T_n(2\omega - 1)$ на сегменте $[0, 1]$ изменяется так же, как многочлен $T_n(\omega)$ на сегменте $[-1, 1]$. Но поскольку при любом $\omega > 1$ имеем $2\omega - 1 > \omega$, причем это неравенство тем сильнее, чем больше ω, то, следовательно, правее точки $\omega = 1$ график функции (9) опускается вниз круче, чем кривая с уравнением (7). При этом график функции (9) касается прямой $y = A$ не n раз, а $2n$ раз. Следовательно, приближение в среднем в полосе пропускания также лучше.

Аналогично рассматривается случай полосового фильтра Чебышева. Предположим, что полосой пропускания фильтра является сегмент $[a, b]$, где $0 < a < b < \infty$. Тогда в силу формулы (III.1.15) функция преобразования операторного напряжения имеет вид

$$g_n(\omega; a, b) = \frac{A}{1 + \varepsilon T_n^2\left(\dfrac{2\omega - a - b}{b - a}\right)}. \tag{10}$$

График этой функции при $n = 8$ изображен на рис. 10.4.

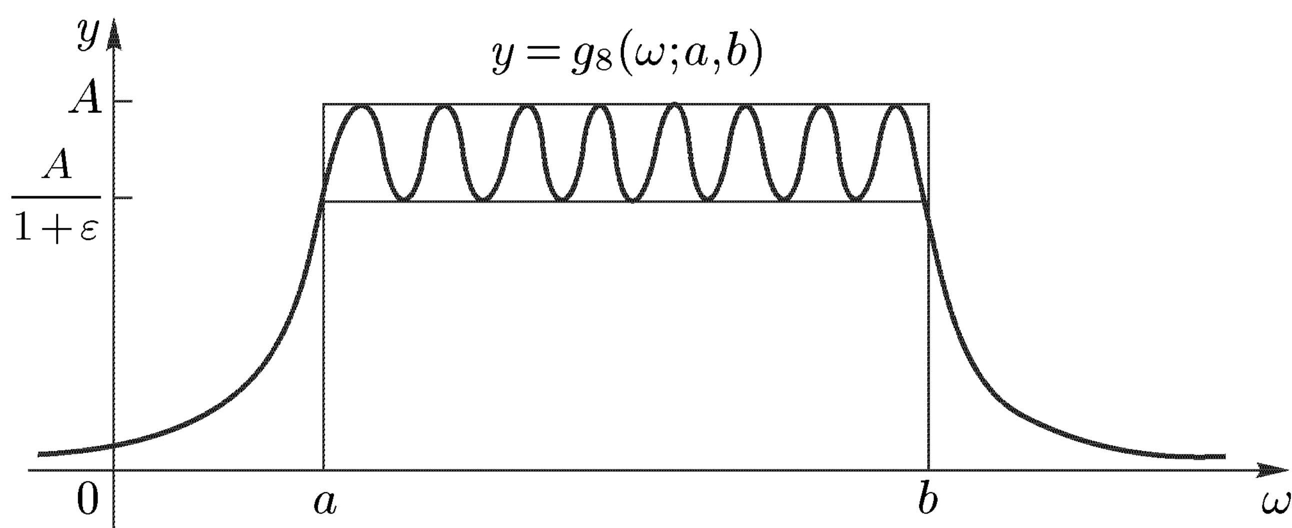


Рис. 10.4

Во всех перечисленных случаях важную роль играют два экстремальных свойства многочленов Чебышева первого рода, изложенные в теоремах 3.1 и 3.2. В силу этих экстремальных свойств точность приближения функции преобразования идеального фильтра будет хуже, если в рассмотренных формулах вместо многочленов Чебышева поставить любой другой многочлен той же степени. В самом деле, ведь многочлен Чебышева первого рода, с одной стороны, имеет минимальное уклонение на сегменте $[-1, 1]$, а с другой стороны, максимальное уклонение в каждой точке вне этого сегмента.

§ 2. Многочлены Чебышева–Лагерра в теории автоматического регулирования и управления

Как известно, в простейшем случае, когда одномерная автоматическая система реагирует на один входной сигнал выдачей одного выходного сигнала, математически эта система описывается одним

дифференциальным уравнением вида

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = \\ = b_0(t)y^{(m)}(t) + b_1(t)y^{(m-1)}(t) + \ldots + b_m(t)y(t). \quad (1)$$

Здесь $y(t)$ — известная функция, определяющая входной сигнал и называемая функцией воздействия, $x(t)$ — неизвестная функция, определяющая выходной сигнал. А системы $\{a_k(t)\}$ и $\{b_k(t)\}$ суть известные функции, причем все эти функции считаются непрерывно дифференцируемыми на полусегменте $[0, \infty)$. Кроме того, функция воздействия $y(t)$ непрерывно дифференцируема m раз, а неизвестная функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема n раз.

Поскольку все функции заданы на полусегменте $[0, \infty)$, то естественно применить здесь ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(t; \alpha), \qquad t \in (0, \infty). \quad (2)$$

Для обоснования метода неопределенных коэффициентов в этом случае прежде всего отметим некоторый вариант теоремы единственности для рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра. Допустим, что некоторый ряд по многочленам Чебышева–Лагерра сходится к тождественному нулю на всем интервале $(0, \infty)$, т. е. имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(t; \alpha) \equiv 0, \qquad t \in (0, \infty). \quad (3)$$

Предположим, что сходимость этого ряда такова, что этот ряд можно умножать на вес Чебышева–Лагерра и интегрировать почленно. Тогда ясно, что $A_k \equiv 0$. Это следует из ортогональности многочленов Чебышева–Лагерра. А условия почленного интегрирования нетрудно сформулировать с помощью асимптотических свойств многочленов Чебышева–Лагерра, изложенных в § 3 гл. VI.

Таким образом, для определения коэффициентов ряда (2) надо подставить этот ряд в левую часть уравнения (1). Но предварительно надо представить все известные функции в этом уравнении также в виде рядов Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра. Однако при дифференцировании рядов по многочленам Чебышева–Лагерра и при вычислении произведений в уравнении (1) появятся производные многочленов Чебышева–Лагерра и произведения их на степени независимого переменного. Все эти величины можно преобразовать и представить в виде линейных комбинаций многочленов Чебышева–Лагерра с одним индексом α.

В самом деле, в силу формул (VI.1.40) и (VI.1.24) имеем

$$L_n'(t;\alpha) = -L_{n-1}(t;\alpha+1), \tag{4}$$

$$L_n(t;\alpha) = L_n(t;\alpha+1) - L_{n-1}(t;\alpha+1). \tag{5}$$

Заменяя во втором равенстве n на k и суммируя по k от 0 до n, получим

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(t;\alpha) = L_n(t;\alpha+1). \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), из (4) находим

$$L_n'(t;\alpha) = -\sum_{k=0}^{n-1} L_k(t;\alpha). \tag{7}$$

В силу этих формул разложения всех производных функций $x(t)$ и $y(t)$, входящих в уравнение (1), можно привести к одному виду с одним параметром α.

Далее из рекуррентной формулы (VI.1.17) находим

$$tL_n(t;\alpha) = -(n+1)L_{n+1}(t;\alpha) + \\ + (\alpha+2n+1)L_n(t;\alpha) - (\alpha+n)L_{n-1}(t;\alpha).$$

Следовательно, если коэффициенты $\{a_k(t)\}$ и $\{b_k(t)\}$ суть многочлены, то обе части уравнения (1) также представляются в виде рядов по многочленам Чебышева–Лагерра с одним и тем же параметром α. В результате после применения теоремы единственности для рядов по многочленам Чебышева–Лагерра получим треугольную систему линейных уравнений, которая определяет коэффициенты разложения (2) последовательно. Если же функции $\{a_k(t)\}$ и $\{b_k(t)\}$ не являются многочленами, то, разлагая их в ряды Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра и представляя каждый многочлен в явном виде по формуле (VI.1.36), снова приведем обе части уравнения (1) к однотипным разложениям.

В отдельных случаях вместо формулы (2) целесообразно искать решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = \exp\Big(-\frac{\lambda t}{2}\Big) \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(\lambda t;\alpha).$$

Здесь параметры λ и α можно использовать для оптимизации вычислительной схемы.

Если все коэффициенты уравнения (1) постоянны, то, конечно, для определения разложения (2) можно применить методы операционного исчисления. В самом деле, в этом случае легко находится изображение неизвестной функции (2).

Разумеется эта общая схема может привести к конкретному законченному результату лишь в отдельных частных случаях аналогично, например, тому, как метод степенных рядов приводит к решению уравнения Бесселя.

Что касается начальных данных при решении уравнения (1), то они удовлетворяются обычным образом за счет первых коэффициентов разложения (2).

Рассмотрим еще одну задачу из теории автоматического регулирования и управления. Как известно, простейшая задача синтеза линейной системы автоматического управления при произвольном входном сигнале $y(t)$ сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^t z(\tau)y(t-\tau)\,d\tau = x(t). \tag{8}$$

Здесь считаются известными входной сигнал $y(t)$ и выходной сигнал $x(t)$, а $z(t)$ есть неизвестная импульсная переходная функция, которую нужно подобрать таким образом, чтобы на данное воздействие $y(t)$ система реагировала сигналом $x(t)$.

Представим уравнение (8) в виде

$$\int_0^t \left[z(\tau)\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\,\tau\right)\right]\left\{y(t-\tau)\exp\left[-\frac{\lambda}{2}(t-\tau)\right]\right\}d\tau = x(t)\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\,t\right). \tag{9}$$

Переходим к изображениям. Применяем теорему об умножении изображений. Если имеем два операционных равенства

$$f(t) \risingdotseq F(p), \qquad \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p),$$

то по этой теореме имеем

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq F(p)\Phi(p).$$

Следовательно, из равенства (9) находим

$$\int_0^\infty e^{-pt}z(t)e^{-\lambda t/2}\,dt\int_0^\infty e^{-pt}y(t)e^{-\lambda t/2}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}x(t)e^{-\lambda t/2}\,dt. \tag{10}$$

В теории интегральных уравнений Вольтерра доказывается, что если свободный член и ядро этого уравнения являются непрерывными и ограниченными, то и решение этого уравнения также ограничено при всех t.

Следовательно, можно сказать, что все три функции в уравнении (8) ограничены равномерно. Поэтому при $\lambda > 0$ можно рассмат-

ривать весовые моменты этих трех функций

$$\alpha_n = \int\limits_0^\infty t^n x(t) e^{-\lambda t/2}\, dt, \tag{11}$$

$$\beta_n = \int\limits_0^\infty t^n y(t) e^{-\lambda t/2}\, dt, \tag{12}$$

$$\gamma_n = \int\limits_0^\infty t^n z(t) e^{-\lambda t/2}\, dt. \tag{13}$$

В интегралах (10) вводим степенное разложение экспоненты и интегрируем все три ряда почленно, что возможно вследствие ограниченности этих функций. В результате имеем

$$\left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\, p^n \gamma_n\right]\left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\, p^n \beta_n\right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\, p^n \alpha_n. \tag{14}$$

Это равенство, как и равенство (10), справедливо при p, удовлетворяющих условию $|p| < \lambda$. Поэтому, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа, из (14) находим уравнения

$$\begin{aligned}
&\gamma_0\beta_0 = \alpha_0,\\
&\gamma_0\beta_1 + \gamma_1\beta_0 = \alpha_1,\\
&\gamma_0\beta_2 + 2\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_0 = \alpha_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\gamma_0\beta_n + C_n^1\gamma_1\beta_{n-1} + C_n^2\gamma_2\beta_{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}\gamma_{n-1}\beta_1 + \gamma_n\beta_0 = \alpha_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{15}$$

Из этой системы можно последовательно определять моменты (13) неизвестной функции $z(t)$.

Представим теперь неизвестную функцию в виде

$$z(t) = \exp\Bigl(-\frac{\lambda t}{2}\Bigr) \sum_{k=0}^\infty c_k(\lambda, \alpha) L_k(\lambda t; \alpha). \tag{16}$$

Здесь фактически в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра разлагается функция $z(t)\exp(\lambda t/2)$. Коэффициенты разложения (16) определяются формулой

$$c_k(\lambda, \alpha) = \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} \int\limits_0^\infty (\lambda t)^\alpha e^{-\lambda t} z(t) e^{\lambda t/2} L_k(\lambda t; \alpha)\, d(\lambda t).$$

Используя формулу (VI.1.35) для этих коэффициентов получаем представление

$$c_k(\lambda,\alpha)=\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s k!\,\lambda^{\alpha+s+1}}{\Gamma(\alpha+s+1)s!\,(k-s)!}\int\limits_0^\infty z(t)t^{\alpha+s}e^{-\lambda t/2}\,dt. \qquad (17)$$

Если α — натуральное число, то интегралы в формуле (17) суть моменты импульсной функции $z(t)$. В силу равенств (15) правую часть (17) можно считать известной. Следовательно, имеем

$$c_k(\lambda,\alpha)=k!\,\lambda^{\alpha+1}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-\lambda)^s\gamma_{s+\alpha}}{\Gamma(\alpha+s+1)s!\,(k-s)!}. \qquad (18)$$

Таким образом, коэффициенты разложения (16) определяются через моменты импульсной функции. Этим уравнение (8) можно считать решенным.

Более подробно применение многочленов Чебышева–Лагерра в теории автоматического регулирования и управления рассмотрено в монографии [IX.6].

§ 3. Ортогональные многочлены в математической теории антенн

Как известно [IX.2, IX.3, IX.5], ортогональные многочлены широко применяются в различных задачах теории антенн. В настоящем параграфе рассматривается общая схема такого применения.

Основой технической электродинамики и теории антенн является система уравнений Максвелла. Если в этих уравнениях произвести некоторые упрощения математического и физического характера в разумных пределах, то получится основное интегральное уравнение прямолинейной антенны

$$f(\theta)=\int\limits_{-a}^{a}e^{-ikx\cos\theta}e^{i\Phi(x)}R(x)\,dx, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \qquad (1)$$

В этой формуле функция $f(\theta)$ называется диаграммой направленности антенны. Эта функция определяет распределение энергии радиоизлучения в зависимости от угла θ направления луча, исходящего из середины антенны длины $2a$.

Функция $R(x)$ — амплитудное распределение тока в антенне, а $\Phi(x)$ — фазовое распределение тока. Обычно считается, что функция $f(\theta)$ задана и удовлетворяет некоторым интерполяционным условиям. А из двух функций $R(x)$ и $\Phi(x)$ одна также может быть фиксированной.

Если известна только диаграмма направленности $f(\theta)$, то задача определения неизвестных функций $R(x)$ и $\Phi(x)$ называется *задачей*

амплитудно-фазового синтеза. Но в большинстве случаев считается, что заданы две функции $f(\theta)$ и $R(x)$. А тогда определение функции $\Phi(x)$ называется *задачей фазового синтеза.*

Для луча выбирается главное направление, т. е. угол τ_0, для которого выполняется условие

$$|f(\tau_0)| = \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |f(\theta)|. \tag{2}$$

Далее, вводятся нули $\{\theta_k\}$ диаграммы направленности $f(\theta)$, в которых $f(\theta_k) = 0$, и экстремальные точки $\{\tau_k\}$, в которых функция $y = |f(\theta)|$ имеет относительные максимумы. При этом точки $\{\theta_k\}$ и $\{\tau_k\}$ перемежаются, т. е. выполняются условия

$$0 < \theta_1 < \tau_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k < \tau_k < \theta_{k+1} < \ldots < \theta_{n-1} < \tau_{n-1} < \theta_n < \pi. \tag{3}$$

Считается, что одна из точек $\{\tau_k\}$ совпадает с точкой τ_0, т. е. имеем $\tau_p = \tau_0$. Далее вводится система положительных чисел $\{M_k\}$ с условиями

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_{p-1} < M_p > M_{p+1} > \ldots > M_{n-1}. \tag{4}$$

С учетом неравенств (3) и (4) на диаграмму направленности вводятся интерполяционные условия

$$f(\theta_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

$$f(\tau_k) = M_k e^{i\varphi_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6}$$

$$f'(\tau_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Условия (6) и (7) означают, что заранее и произвольно фиксируются расположение, а также высота главного и боковых лепестков диаграм-

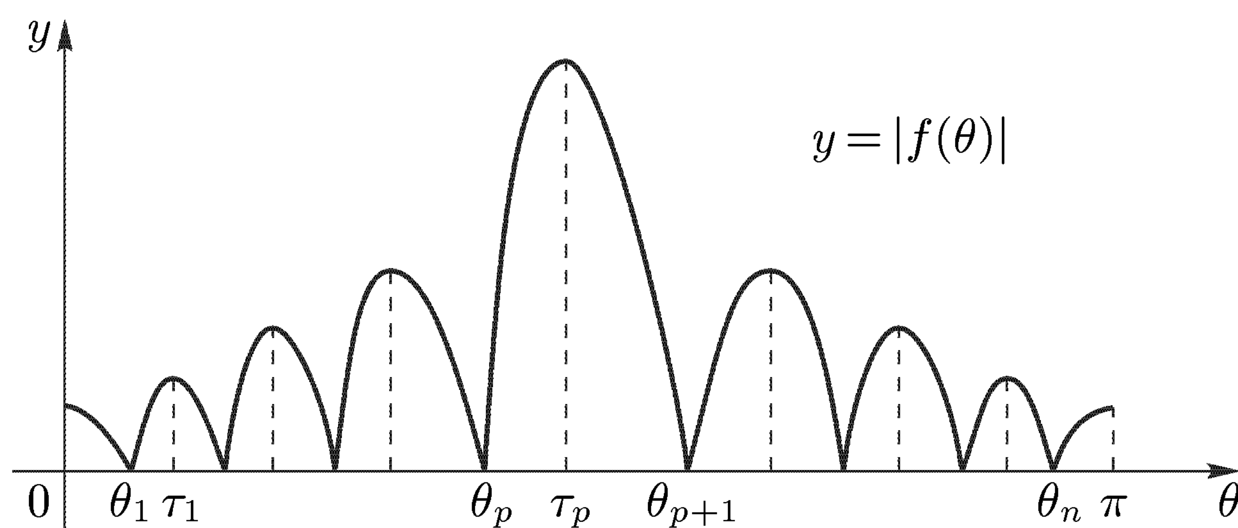


Рис. 10.5

мы направленности прямолинейной антенны. Геометрическая картина всех этих условий изображена на рис. 10.5.

Уравнение (1) при условиях (5), (6) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Такие уравнения изучены подробно. В общем случае задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода является некорректной задачей.

Но в антенной технике поступают по-другому. А именно, в случае задачи фазового синтеза, когда заданы две функции $f(\theta)$ и $R(x)$, для фазового распределения принимается формула

$$\Phi_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N. \tag{8}$$

В этом случае интеграл в формуле (1) превращается в интеграл, зависящий от параметров $a_0, a_1, \ldots, a_N$. И требуется так подобрать эти параметры, чтобы интеграл наилучшим образом приближал функцию $f(\theta)$, удовлетворяющую условиям (5)–(7).

Далее, при решении задач фазового синтеза можно ввести ортогональные многочлены.

Как известно, амплитудное распределение $R(x)$ есть неотрицательная интегрируемая функция на сегменте $[-a, a]$. Поэтому можно ввести многочлены $\{B_k(x)\}$, ортонормированные на сегменте $[-a, a]$ с весовой функцией $R(x)$. Для этих многочленов выполняются условия

$$\int_{-a}^{a} B_n(x) B_k(x) R(x)\, dx = \delta_{nk}. \tag{9}$$

А тогда вместо формулы (8) вводится формула

$$\Phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k B_k(x). \tag{10}$$

В результате в некоторых случаях вычисления по задачам фазового синтеза несколько упрощаются. Такой подход в задачах фазового синтеза рассматривал В.И. Гусевский [XI.18].

Для дальнейшего изложения различных методик применения ортогональных многочленов в задачах фазового синтеза теории антенн необходимо, как говорят математики, произвести стандартизацию задачи, т. е. максимально упростить условия, не нарушая общности, выделить главные моменты и отбросить малозначительные детали.

В интегральном уравнении (1) произведем замену переменных по формулам

$$x = a\xi,\ -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad ka = b, \quad -b\cos\theta = t,\ -b \leqslant t \leqslant b. \tag{11}$$

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$f\left(\arccos\frac{-t}{b}\right) = a\int_{-1}^{1} e^{it\xi} e^{i\Phi(a\xi)} R(a\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Далее вводим обозначения

$$\frac{1}{a} f\left(\arccos\frac{-t}{b}\right) = F(t), \quad \Phi(a\xi) = \Phi_1(\xi), \quad R(a\xi) = R_1(\xi).$$

В результате уравнение (12) приводится к виду

$$F(t) = \int\limits_{-1}^{1} e^{it\xi} e^{i\Phi_1(\xi)} R_1(\xi)\, d\xi. \tag{13}$$

Опуская индексы у функций $\Phi_1(\xi)$ и $R_1(\xi)$ и возвращаясь к переменному x, получаем

$$F(t) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\Phi(x)} R(x)\, dx, \qquad t \in [-b, b]. \tag{14}$$

Это уравнение называется приведенным и нормированным по обеим переменным основным интегральным уравнением прямолинейной антенны длины $2a$. В этом уравнении

$$b = ak = \frac{2\pi a}{\lambda}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{15}$$

где k — волновое число, а λ — длина волны.

Интерполяционные условия для диаграммы направленности $F(t)$ преобразуются очевидным образом. А именно, вместо точек $\{\theta_k\}$ и $\{\tau_k\}$ вводятся точки $\{t_k\}$ и $\{\xi_k\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$-b < t_1 < \xi_1 < t_2 < \ldots < t_k < \xi_k < t_{k+1} < \ldots < \xi_{n-1} < t_n < b. \tag{16}$$

В этих точках вводятся условия

$$F(t_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

$$F(\xi_k) = M_k e^{i\varphi_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{18}$$

$$F'(\xi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{19}$$

Далее, из технических соображений следует, что диаграмма направленности $F(t)$ за пределами основного сегмента $[-b, b]$ должна по модулю очень быстро убывать при $t \to \pm\infty$. Поэтому для диаграммы направленности вводится стабилизирующий множитель, например, вида

$$A(t) = \left(\frac{b}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{b}\right)^{N+1}. \tag{20}$$

Тогда для диаграммы направленности принимается формула

$$F(t) = A(t) F_N(t), \tag{21}$$

где алгебраический многочлен $F_N(t)$ выбирается так, чтобы выполнялись интерполяционные условия (17)–(19).

В теории целых функций и в теории антенн часто рассматриваются целые функции экспоненциального типа или целые функции конечной степени. Для таких функций справедлива теорема Винера–Пэли [III.1]. По этой теореме из формул (14) и (20) следует неравенство

$$N + 1 \leqslant \frac{b}{\pi} = \frac{2a}{\lambda} = \frac{ak}{\pi}. \tag{22}$$

Это неравенство означает, что число узлов интерполяции зависит от длины антенны $2a$ и от длины волны λ.

Разумеется, стабилизирующий множитель можно выбрать и другим способом. Например, вместо (20) можно положить

$$B(t) = \left[2\left(\frac{b}{2\pi t}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi t}{b}\right)\right]^{N+1}. \tag{23}$$

Нормированное уравнение (14) по сравнению с уравнением (1) более удобно тем, что в этом случае при решении задач фазового синтеза можно применять многочлены Чебышева, Лежандра, Гегенбауэра и общие многочлены Якоби.

Некоторые приближенные методы решения задач фазового синтеза для уравнения (14) рассмотрены в работах [XI.34, XI.47].

Рассмотрим некоторую общую схему применения ортогональных многочленов в теории антенн.

Пусть амплитудное распределение $R(x)$ фиксировано и ему как весовой функции соответствуют ортонормированные многочлены $\{B_n(x)\}$. Рассмотрим разложение

$$e^{ixt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)B_n(x), \qquad x\in[-1,1], \tag{24}$$

где

$$A_n(t) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ixt}B_n(x)R(x)\,dx, \qquad n=0,1,\ldots \tag{25}$$

Функции (25) суть целые функции экспоненциального типа. Из свойства ортогональности многочленов $\{B_n(x)\}$ для каждой функции (25) находим равенства

$$A_n(0) = A_n'(0) = \ldots = A_n^{(n-1)}(0) = 0, \qquad A_n^{(n)} \neq 0. \tag{26}$$

Далее, из рекуррентной формулы для ортогональных многочленов

$$\lambda_n B_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)B_n(x) - \lambda_{n-1}B_{n-1}(x)$$

следует рекуррентная формула для функций (25)

$$\lambda_n A_{n+1}(t) = -iA_n'(t) - \alpha_n A_n(t) - \lambda_{n-1}A_{n-1}(t). \tag{27}$$

Нетрудно доказать, что система функций (25) является чебышевской системой [XI.47].

Предположим, что диаграмма направленности $F(t)$, имеющая стабилизирующий множитель и удовлетворяющая соответствующим интерполяционным условиям, разлагается в ряд по функциям (25), т. е. имеем

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n(t), \qquad t\in[-b,b]. \tag{28}$$

В силу условий (26) коэффициенты $\{c_n\}$ легко определяются через коэффициенты Тейлора функции $F(t)$ по рекуррентным формулам.

С другой стороны, разложение (24) подставляем в интеграл (14). В результате получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\Phi(x)} R(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \int\limits_{-1}^{1} B_n(x) e^{i\Phi(x)} R(x)\, dx. \qquad (29)$$

А теперь вводим разложение с неизвестными коэффициентами

$$e^{i\Phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n B_n(x), \qquad (30)$$

где

$$b_n = \int\limits_{-1}^{1} e^{i\Phi(x)} B_n(x) R(x)\, dx. \qquad (31)$$

Заменяя интегралы (29) по формуле (31) и учитывая разложение (28), находим $b_n = c_n$.

Таким образом, коэффициенты (31) определены, и, вводя разложение $b_n = \alpha_n + i\beta_n$, получаем равенство

$$e^{i\Phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n B_n(x) + i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n B_n(x) = \varphi(x) + i\psi(x). \qquad (32)$$

Теоретически можно считать функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известными.

Поэтому для неизвестного фазового распределения получаем формулу

$$\Phi(x) = \operatorname{arctg} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}. \qquad (33)$$

Но, конечно, это решение задачи фазового синтеза чисто теоретическое, ибо на практике антенны могут быть реализованы при условии, что фазовое распределение определяется по формулам (8) или (10). Поэтому в качестве $\Phi_N(t)$ можно взять частичную сумму ряда Тейлора функции (33).

Аналогично уравнению (14) можно рассматривать приведенное и нормированное уравнение для плоской антенны

$$F(t,\tau) = \iint\limits_{D} e^{i(xt+y\tau)} e^{i\Phi(x,y)} R(x,y)\, dx\, dy. \qquad (34)$$

Здесь D есть конечная односвязная область, в которой определены амплитудное распределение тока $R(x,y)$ и фазовое распределение $\Phi(x,y)$. А диаграмма направленности $F(t,\tau)$ имеет стабилизирующий множитель и удовлетворяет некоторым интерполяционным условиям, причем точки интерполяции расположены по всей области D и определяют главный купол и боковые купола. Задачи синтеза для уравнения (34) формулируются аналогично одномерному случаю.

§ 4. Многочлены Чебышева в задачах фазового синтеза математической теории антенн

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда в качестве амплитудного распределения тока в прямолинейной антенне принимается вес Чебышева

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1). \tag{1}$$

Тогда интегральное уравнение (3.14) имеет вид

$$F(t) = \int_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\Phi(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad t \in [-b, b]. \tag{2}$$

Будем считать, что диаграмма направленности $F(t)$ определяется формулой (3.21) и удовлетворяет соответствующим интерполяционным условиям.

Поскольку функция $F(t)$ аналитическая во всей комплексной плоскости, то ее можно разложить в ряд Неймана по функциям Бесселя

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(t). \tag{3}$$

Свойства таких рядов известны [IV.2, VIII.7].

С другой стороны, в гл. III было доказано разложение (III.5.9)

$$e^{itx} = J_0(t)T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (i)^n J_n(t) T_n(x). \tag{4}$$

Этот ряд подставляем в уравнение (2). В результате, учитывая разложение (3), находим

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(t) = J_0(t) \int_{-1}^{1} T_0(x) e^{i\Phi(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \\ + 2\sum_{n=1}^{\infty} (i)^n J_n(t) \int_{-1}^{1} T_n(x) e^{i\Phi(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5}$$

Далее вводим разложение

$$e^{i\Phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x), \tag{6}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} e^{i\Phi(x)} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} e^{i\Phi(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{7}$$

Поэтому из формулы (5) получаем равенства

$$b_n = \frac{c_n}{\pi (i)^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Таким образом, коэффициенты $\{b_n\}$ в разложении (6) определены. Далее, вводим разложение $b_n = \alpha_n + i\beta_n$. В результате из (6) находим

$$e^{i\Phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T_n(x) + i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n T_n(x) = \varphi(x) + i\psi(x). \tag{9}$$

Считая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известными, получаем формулу для неизвестного фазового распределения

$$\Phi(x) = \operatorname{arctg} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}. \tag{10}$$

Таким образом, задача фазового синтеза при условии (1) теоретически решена полностью.

Аналогичные результаты получаются и для плоских квадратных антенн.

Предположим, что плоская антенна имеет вид единичного квадрата

$$D = \{x, y\colon -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}, \tag{11}$$

и в этом квадрате задано амплитудное распределение

$$R(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - y^2}}. \tag{12}$$

Тогда приведенное и нормированное уравнение плоской антенны (3.34) приводится к виду

$$F(t, \tau) = \iint_D e^{i(xt + y\tau)} e^{i\Phi(x,y)} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - y^2}}. \tag{13}$$

Поскольку диаграмма направленности $F(t, \tau)$ есть аналитическая функция двух переменных, то ее можно разложить в двойной ряд Неймана по функциям Бесселя

$$F(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} J_n(t) J_k(\tau). \tag{14}$$

А теперь введем разложение в двойной ряд Чебышева

$$e^{i\Phi(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} T_n(x) T_k(y). \tag{15}$$

Здесь коэффициенты определяются по формулам

$$b_{nk} = \frac{4}{\pi^2} \iint_D e^{i\Phi(x,y)} \frac{T_n(x) T_k(y)}{\sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - y^2}}\, dx\, dy, \qquad n \geqslant 1, \quad k \geqslant 1. \tag{16}$$

В случаях b_{n0} и b_{0k}, где $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$, в этой формуле вместо коэффициента 4 будет коэффициент 2. А для b_{00} будет 1.

С другой стороны, имеем два разложения:

$$e^{ixt} = J_0(t) T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n J_n(t) T_n(x),$$

$$e^{iy\tau} = J_0(\tau)T_0(y) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(i)^k J_k(\tau)T_k(y).$$

Подставляя эти разложения в интеграл (13) и учитывая формулу (16), находим

$$F(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}J_n(t)J_k(\tau) = \pi^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(i)^{n+k}b_{nk}J_n(t)J_k(\tau). \quad (17)$$

Отсюда для неизвестных коэффициентов разложения (15) получаем равенства

$$b_{nk} = \frac{c_{nk}}{\pi^2(i)^{n+k}} = \alpha_{nk} + i\beta_{nk}.$$

Далее вводим два разложения:

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk}T_n(x)T_k(y),$$

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{nk}T_n(x)T_k(y).$$

Следовательно, из (15) получаем равенство

$$e^{i\Phi(x,y)} = \varphi(x,y) + i\psi(x,y),$$

из которого следует формула для неизвестного фазового распределения

$$\Phi(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}. \quad (18)$$

Таким образом, задача фазового синтеза для квадратной антенны (11) при амплитудном распределении (12) решена полностью. Но, конечно, это только теоретическое решение.

§ 5. Оптимальное расположение дискретных источников в антенных решетках

Рассмотрим теперь дискретные антенны, или, как говорят в теории антенн, антенные решетки.

Основное приведенное и нормированное уравнение антенной решетки имеет вид

$$F(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{ix_k t}e^{i\Phi_k}R_k. \quad (1)$$

Это уравнение означает, что на сегменте $[-1,1]$ фиксированы точки $\{x_k\}$. В этих точках расположены источники излучения с амплитудами $\{R_k\}$ и фазами $\{\Phi_k\}$. А функция $F(t)$, как и ранее, называется

диаграммой направленности антенной решетки и удовлетворяет тем же самым интерполяционным условиям, которые были рассмотрены для непрерывной прямолинейной антенны.

Задачи фазового синтеза для антенной решетки являются более сложными, ибо в этом случае помимо нахождения фазового распределения $\{\Phi_k\}$ при известном амплитудном распределении приходится рассматривать вопрос о рациональном расположении дискретных источников, т. е. о выборе точек $\{x_k\}$ на сегменте $[-1, 1]$. Но в некоторых случаях этот вопрос решается с помощью квадратурных формул.

Предположим, что решена задача фазового синтеза для прямолинейной антенны при некоторых известных функциях $F(t)$ и $R(x)$. Тогда можно написать приближенную квадратурную формулу

$$F(t) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\Phi(x)} R(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{m} A_k e^{itx_k} e^{i\Phi(x_k)}. \qquad (2)$$

Поскольку $R(x)$ есть весовая функция, то вводим соответствующие ей ортонормированные многочлены $\{B_k(x)\}$. Для того чтобы квадратурная формула (2) имела наименьшую погрешность, надо в качестве точек $\{x_k\}$ выбрать нули многочлена $B_m(x)$. В этом случае получим квадратурную формулу интерполяционно-ортогонального типа Гаусса. Для таких формул все весовые коэффициенты $\{A_k\}$ положительны. Следовательно, полагая $R_k = A_k$, непрерывной антенне ставим в соответствие антенную решетку с уравнением

$$F(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{itx_k} e^{i\Phi(x_k)} R_k. \qquad (3)$$

В этой формуле число m не связано с числом N, которое фигурирует в интерполяционных условиях на диаграмму направленности прямолинейной антенны. Поэтому для повышения точности квадратурной формулы (2) число m можно взять достаточно большим.

Из формул (2) и (3) следует, что при переходе от непрерывной антенны к антенной решетке равенства $R_k = R(x_k)$, вообще говоря, не выполняются. Но зато выполняются условия $\Phi_k = \Phi(x_k)$. Иными словами, при таком переходе фазовое распределение вычисляется в точках, в которых расположены дискретные источники.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть первоначальное амплитудное распределение тока в прямолинейной непрерывной антенне имеет вид

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1). \qquad (4)$$

Тогда в качестве точек $\{x_k\}$ надо выбрать нули многочлена Чебышева первого рода, которые определяются формулой

$$x_k = \cos\Big(\frac{2k-1}{2m}\,\pi\Big), \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5)$$

А квадратурные коэффициенты $\{A_k\}$ в этом случае в силу формулы (IX.2.25) все равны между собой, причем

$$A_k^{(m)} = A^{(m)} = \frac{\pi}{m}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Следовательно, формула перехода от непрерывной антенны к дискретной при условии (4) имеет вид

$$F(t) = \int_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\Phi(x)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{m} \sum_{k=1}^{m} e^{itx_k} e^{i\Phi(x_k)}. \tag{7}$$

Эта формула важна, потому что она указывает, как надо располагать дискретные источники, чтобы при условии (4) дискретная антенна давала тот же эффект, что и непрерывная. Кроме того, из формулы (7) следует, что в этом случае на все дискретные источники подается ток с одинаковой амплитудой. А весь эффект управления антенной решеткой достигается изменением фазы в каждом дискретном источнике. Такие антенные решетки называются *фазированными антенными решетками.*

Аналогичные результаты получаются и для квадратной антенны (4.13). В этом случае квадратурную формулу (7) можно применить дважды отдельно по переменным x и y. В результате имеем

$$F(t,\tau) = \iint_D e^{ixt+iy\tau} e^{i\Phi(x,y)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}} \approx$$

$$\approx \frac{\pi^2}{mn} \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} e^{itx_k+i\tau y_s} e^{i\Phi(x_k,y_s)}, \tag{8}$$

где

$$y_s = \cos\left(\frac{2s-1}{2n}\,\pi\right), \qquad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

В результате определяются точки $M_{ks}(x_k, y_s)$, в которых надо располагать дискретные источники в единичном квадрате (4.11). Уравнение такой фазированной антенной решетки имеет вид

$$F(t,\tau) = \frac{\pi^2}{mn} \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} e^{itx_k+i\tau y_s} e^{i\Phi(x_k,y_s)}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь случай круглой антенны. Пусть в единичном круге

$$D = \{x, y\colon\, x^2 + y^2 < 1\} \tag{11}$$

амплитудное распределение тока определяется формулой

$$R(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1-x^2-y^2}}. \tag{12}$$

Тогда в интегральном уравнении круглой антенны

$$F(t,\tau) = \iint_D e^{ixt+iy\tau} e^{i\Phi(x,y)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1-x^2-y^2}} \tag{13}$$

можно перейти к полярным координатам. В результате получаем уравнение

$$F(t,\tau)=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg[\int\limits_0^1 e^{i\rho(t\cos\varphi+\tau\sin\varphi)}e^{i\Phi(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\Bigg]\,d\varphi. \tag{14}$$

Отдельно рассматриваем внутренний интеграл

$$B(\varphi,t,\tau)=\int\limits_0^1 e^{i\rho(t\cos\varphi+\tau\sin\varphi)}e^{i\Phi(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}. \tag{15}$$

В этом интеграле произведем замену переменного интегрирования по формулам

$$1-\rho^2=\frac{1}{2}\,(1+\xi),\quad -2\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\,d\xi,\quad \rho=\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\xi)}. \tag{16}$$

Поскольку ρ изменяется от 0 до 1, то ξ изменяется от 1 до -1.

Далее, для краткости введем обозначение

$$H(\xi,\varphi,t,\tau)=\exp\Big\{i\sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\,(t\cos\varphi+\tau\sin\varphi)\Big\}\times$$
$$\times\exp\Big\{i\Phi\Big(\sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\,\cos\varphi,\sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\,\sin\varphi\Big)\Big\}. \tag{17}$$

Тогда интеграл (15) приводится к виду

$$B(\varphi,t,\tau)=\int\limits_{-1}^1 H(\xi,\varphi,t,\tau)\,\frac{d\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{18}$$

В этом интеграле вес многочленов Чебышева первого рода. Следовательно, можно применять квадратурную формулу интерполяционно-ортогонального типа Гаусса с узлами в нулях многочлена Чебышева первого рода $T_m(\xi)$. Имеем формулы

$$\xi_k^{(m)}=\cos\Big(\frac{2k-1}{2m}\,\pi\Big),\qquad k=1,2,\ldots,m. \tag{19}$$

Далее из (16) находим

$$\rho_k^{(m)}=\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\xi_k^{(m)})}=\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1-\cos\Big(\frac{2k-1}{2m}\,\pi\Big)\Big)}. \tag{20}$$

Следовательно, для интеграла (18) имеем квадратурную формулу

$$B(\varphi,t,\tau)\approx\frac{\pi}{2m}\sum_{k=1}^m H(\xi_k^{(m)},\varphi,t,\tau). \tag{21}$$

Эту сумму подставляем в интеграл (14). В результате получаем приближенное равенство

$$F(t,\tau)=\int\limits_0^{2\pi}B(\varphi,t,\tau)\,d\varphi\approx\frac{\pi}{2m}\sum_{k=1}^m\int\limits_0^{2\pi}H(\xi_k^{(m)},\varphi,t,\tau)\,d\varphi. \tag{22}$$

Все функции $H(\xi_k^{(m)},\varphi,t,\tau)$ по переменному φ имеют период 2π. Следовательно, к интегралам (22) можно применить квадратурные формулы для периодических функций. Как известно [II.2], в случае периодических функций узлы квадратурных формул должны делить сегмент $[0,2\pi]$ на равные части, а квадратурные коэффициенты все равны между собой. Таким образом, имеем формулы

$$\varphi_s^{(n)}=\frac{2\pi}{n}\,s,\quad s=1,2,\ldots,n,\quad A_s^{(n)}=\frac{2\pi}{n}. \tag{23}$$

Следовательно, для интегралов (22) имеем приближенные равенства

$$\int_0^{2\pi} H(\xi_k^{(n)},\varphi,t,\tau)\,d\varphi\approx\frac{2\pi}{n}\sum_{s=1}^{n}H(\xi_k^{(m)},\varphi_s^{(n)},t,\tau). \tag{24}$$

Подставляя значения (24) в равенство (22), находим

$$F(t,\tau)=\int_0^{2\pi} B(\varphi,t,\tau)\,d\varphi\approx\frac{\pi^2}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}H(\xi_k^{(m)},\varphi_s^{(n)},t,\tau). \tag{25}$$

Далее вводим обозначения

$$x_{ks}^{(m,n)}=\rho_k^{(m)}\cos\varphi_s^{(n)},\qquad y_{ks}^{(m,n)}=\rho_k^{(m)}\sin\varphi_s^{(n)}. \tag{26}$$

Тогда вместо формулы (25) получаем основную формулу для фазированной антенной решетки

$$F(t,\tau)=\frac{\pi^2}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}e^{i(tx_{ks}^{(m,\,n)}+\tau y_{ks}^{(m,\,n)})}e^{i\Phi(x_{ks}^{(m,\,n)},y_{ks}^{(m,\,n)})}. \tag{27}$$

Все эти формулы означают, что если будет решена задача фазового синтеза для круглой антенны (11) с амплитудным распределением (12), то по формулам (26) автоматически определятся координаты дискретных источников, на эти точки проектируется непрерывное фазовое распределение, а амплитудное распределение оказывается одинаковым во всех точках.

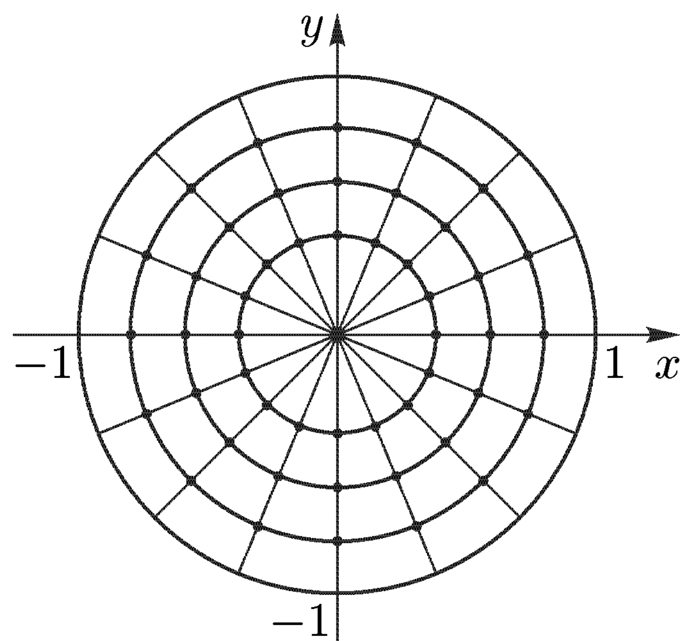


Рис. 10.6

Таким образом, при переходе от непрерывной круглой антенны к антенной решетке дискретные источники в единичном круге надо расположить в точках (26). Схематически эти точки изображены на рис. 10.6.

Из формул (26) следует, что радиусы концентрических окружностей определяются по формуле (20). А каждая из этих окружностей делится на n равных частей.

§ 6. Ортогональные на окружности многочлены в обратных задачах теории фильтрации сигналов

Рассмотрим три вектора с комплексными компонентами:

$$x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \tag{1}$$

$$h = \{h_0, h_1, \ldots, h_m\}, \qquad m < n, \tag{2}$$

$$z = \{z_0, z_1, \ldots, z_N\}, \qquad N = n + m. \tag{3}$$

Предположим, что эти три вектора связаны уравнением в дискретных свертках

$$z = x * h = h * x. \tag{4}$$

Это означает систему равенств

$$z_k = \sum_{j=0}^{k} h_j x_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} x_j h_{k-j}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Такого рода уравнения встречаются в радиотехнике [IX.1]. При этом считается, что вектор x означает входной сигнал, h это импульсный отклик прибора, а z — выходной сигнал. Обычно считается, что векторы (2) и (3) известны, а вектор x не известен и требуется его определить.

Кроме трех векторов (1)–(3), в радиотехнике обычно вводится еще и вектор шума

$$\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\}.$$

А тогда вместо (4) рассматривается уравнение

$$z = h * x + \varepsilon.$$

Схематически это уравнение изображено на рис. 10.7.

Здесь через $y = h * x$ обозначен промежуточный вектор вместо вектора (4). Затем к этому вектору добавляется вектор аддитивного

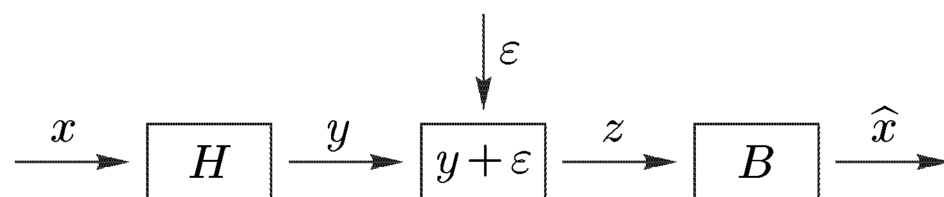


Рис. 10.7

шума ε. На этом рисунке через H обозначен прибор, который принимает входящий сигнал (1), а через B обозначен сложный прибор, который по вектору z находит приближенное значение $\widehat{x}$ неизвестного входного сигнала x.

Задача нахождения вектора (1) по известным векторам (2) и (3) называется обратной задачей теории фильтрации финитных дискретных сигналов. К решению этой задачи можно применить многочлены, ортогональные на окружности [XI.28].

Прежде всего представляем систему уравнений (5) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &z_0 = h_0x_0, \\ &z_1 = h_1x_0 + h_0x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &z_s = h_mx_{s-m} + h_{m-1}x_{s-m+1} + \ldots + h_0x_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &z_{n+m-1} = h_mx_{n-1} + h_{m-1}x_n, \\ &z_{n+m} = h_mx_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь имеем $m \leqslant s \leqslant n$.

В этой системе содержится $N + 1 = n + m + 1$ уравнений. А неизвестных компонент вектора (1) всего $n + 1$. Следовательно, здесь мы имеем некорректную задачу, когда число уравнений превышает число неизвестных. В таком случае применяются известные методы решения некорректных задач [VIII.6]. Но можно применить многочлены, ортогональные на окружности.

По компонентам векторов (1)–(3) вводим соответствующие алгебраические многочлены

$$X_n(w) = x_0 + x_1w + \ldots + x_nw^n, \tag{7}$$

$$H_m(w) = h_0 + h_1w + \ldots + h_mw^m, \tag{8}$$

$$Z_N(w) = z_0 + z_1w + \ldots + z_Nw^N. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что система равенств (6) эквивалентна тождеству

$$Z_N(w) \equiv H_m(w)X_n(w). \tag{10}$$

Но это равенство в принципе невозможно. В самом деле, компоненты вектора (2) определяются конструкцией радиоприемного устройства, а сам вектор (2) называется импульсным откликом прибора. В отличие от постоянного вектора (2) вектор (3) зависит от неизвестного вектора (1). Следовательно, многочлены (8) и (9) независимы между собой. Поэтому многочлен (9) может не делиться на многочлен (8). И, следовательно, вместо (10) надо рассматривать величину

$$R_n(w) = Z_N(w) - H_m(w)X_n(w) \tag{11}$$

и ее норму

$$||R_n|| = ||Z_N(w) - H_m(w)X_n(w)||. \tag{12}$$

Здесь можно рассматривать одну из стандартных норм, например чебышевскую норму или квадратичную норму.

Рассмотрим квадратичную норму в комплексном пространстве

$$\|R_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} |Z_N(w) - H_m(w)X_n(w)|^2 \, |dw| =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} |H_m(w)|^2 \left| \frac{Z_N(w)}{H_m(w)} - X_n(w) \right|^2 |dw|. \quad (13)$$

Эта формула наводит на мысль ввести многочлены $\{\varphi_k(w)\}$, ортогональные на единичной окружности $|w| = 1$ с весовой функцией

$$g(\theta) = h(w) = |H_m(w)|^2, \qquad w = e^{i\theta}. \quad (14)$$

В формуле (13) многочлены $H_m(w)$ и $Z_N(w)$ известны. А многочлен $X_n(w)$ требуется выбрать таким образом, чтобы величина (13) была наименьшей. Но это возможно тогда и только тогда, когда многочлен $X_n(w)$ есть частичная сумма ряда Фурье по ортогональным многочленам $\{\varphi_k(w)\}$ для функции

$$f(w) = \frac{Z_N(w)}{H_m(w)}. \quad (15)$$

Вводим коэффициенты Фурье этой функции

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} h(w) f(w) \overline{\varphi_k(w)} \, |dw| \quad (16)$$

и полагаем

$$X_n(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(w). \quad (17)$$

Таким образом, только при условии (17) величина (13) имеет наименьшее значение.

По поводу изложенного метода можно сделать несколько замечаний.

1. Для применения этого метода надо прежде всего вычислить конечную систему ортогональных многочленов

$$\varphi_0(w), \ \varphi_1(w), \ \ldots, \ \varphi_n(w). \quad (18)$$

Эта система определяется только вектором (2), который является характеристикой данного радиоприемного устройства. Иными словами, для данного прибора заранее вычисляется система многочленов (18), с помощью которой можно решать некоторые обратные задачи теории фильтрации финитных сигналов.

2. Система ортогональных многочленов (18) вычисляется с помощью простейших арифметических операций (не надо вычислять интегралы и решать уравнения). В самом деле, из формулы момен-

тов (VIII.1.6) при условии (14) имеем

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} |H_n(w)|^2\overline{w}^k\,|dw| =$$

$$= h_k\overline{h}_0 + h_{k+1}\overline{h}_1 + \ldots + h_m\overline{h}_{m-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m. \quad (19)$$

Таким образом, все многочлены (18) можно вычислить с помощью определителей по формуле (VIII.1.9). Но можно также использовать и рекуррентную формулу (VIII.1.24)

$$\alpha_k\varphi_{k+1}(w) = \alpha_{k+1}w\varphi_k(w) + \varphi_{k+1}(0)w^k\overline{\varphi}_k\Big(\frac{1}{w}\Big). \quad (20)$$

Здесь в силу (VIII.1.23) имеем

$$\varphi_{k+1}(0) = -\alpha_k\alpha_{k+1}\lambda_k. \quad (21)$$

Далее, вводя разложение

$$\varphi_k(w) = \alpha_k w^k + \alpha_{k-1}^{(k)}w^{k-1} + \ldots + \alpha_1^{(k)}w + \alpha_0^{(k)}, \quad (22)$$

из формулы (VIII.1.19) при условии (14) находим

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)w\varphi_k(w)\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} |H_m(w)|^2 w\varphi_k(w)\,\frac{dw}{w} =$$

$$= \alpha_k^{(n)}\sum_{s=0}^{m-k-1} h_s\overline{h}_{k+s+1} + \alpha_{k-1}^{(k)}\sum_{s=0}^{m-k} h_s\overline{h}_{k+s} + \ldots + \alpha_0^{(k)}\sum_{s=0}^{m-1} h_s\overline{h}_{s+1}. \quad (23)$$

Следовательно, с помощью рекуррентной формулы (20), используя (21) и (23), также в результате простейших вычислений можно определить все многочлены (18).

3. Рассмотрим теперь коэффициенты разложения (17). Из формулы (16), вводя разложение

$$Z_N(w) = \sum_{p=0}^{N} z_p w^p,$$

находим

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} \overline{H_m(w)}Z_N(w)\overline{\varphi_k(w)}\,|dw| = \sum_{p=0}^{N} z_p b_p^{(k)}, \quad (24)$$

где введено обозначение

$$b_p^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} \overline{H_m(w)}w^p\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|, \qquad p = 0, 1, \ldots, N. \quad (25)$$

Эти интегралы не зависят от вектора (3). Они линейно зависят от коэффициентов ортогональных многочленов и от коэффициентов

многочлена (8). Величины (25) легко вычисляются без интегрирования.

А теперь переходим к решению основной задачи — вычислению коэффициентов многочлена (7). В силу (17) имеем тождество

$$X_n(w) \equiv \sum_{k=0}^{n} x_k w^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(w) \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \, [\alpha_k^{(k)} w^k + \alpha_{k-1}^{(k)} w^{k-1} + \ldots + \alpha_1^{(k)} w + \alpha_0^{(k)}]. \quad (26)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, находим

$$x_k = a_k \alpha_k^{(k)} + a_{k+1} \alpha_k^{(k+1)} + \ldots + a_n \alpha_k^{(n)}. \quad (27)$$

Подставляя сюда значения (24), получаем формулу

$$x_k = \sum_{p=0}^{n+m} z_p B_p^{(k)}, \quad (28)$$

где введены обозначения

$$B_0^{(k)} = \sum_{j=k}^{n} \alpha_k^{(j)} b_0^{(j)}, \quad B_1^{(k)} = \sum_{j=k}^{n} \alpha_k^{(j)} b_1^{(j)}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad B_{m+k}^{(k)} = \sum_{j=k}^{n} \alpha_k^{(j)} b_{m+k}^{(j)}, \quad B_{m+k+1}^{(k)} = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_k^{(j)} b_{m+k+1}^{(j)}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad B_{m+k+p}^{(k)} = \sum_{j=k+p}^{n} \alpha_k^{(j)} b_{m+k+p}^{(j)}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad B_{m+n-1}^{(k)} = \sum_{j=n-1}^{n} \alpha_k^{(j)} b_{m+n-1}^{(j)}, \quad B_{n+m}^{(k)} = \alpha_k^{(n)} b_{n+m}^{(n)}. \quad (29)$$

В результате вычислений по формулам (29) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} B_0^{(0)} & B_1^{(0)} & \ldots & B_N^{(0)} \\ B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \ldots & B_N^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_0^{(n)} & B_1^{(n)} & \ldots & B_N^{(n)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

В силу (28) для искомого вектора (1) имеем формулу

$$x = Bz. \quad (31)$$

Еще раз заметим, что матрица (30) зависит только от компонент вектора (2) и получается в результате простейших арифметических операций, число которых имеет порядок n^3.

4. В рассмотренном методе вычисления подразделяются на предварительные и текущие. Предварительные вычисления зависят только от компонент вектора (2) и доводятся вплоть до такого момента, после которого в общей вычислительной схеме начинают фигурировать числа $\{z_k\}$. А текущими называются те вычисления, которые надо выполнить над числами $\{z_k\}$, чтобы получить числа $\{x_k\}$.

Этот и другие методы решения обратной задачи теории фильтрации дискретных финитных сигналов изложены в работе автора [XI.28].

Случай двумерных финитных дискретных сигналов рассмотрен в работах автора [XI.33, XI.45]. При этом вводятся новые системы ортогональных многочленов по двум комплексным переменным.

§ 7. Ортогональные многочлены в теории вероятностей

Как известно, плотность распределения вероятностей случайной величины по своим свойствам аналогична весовой функции, которая определяет систему ортогональных многочленов. В связи с этим устанавливается некоторое соответствие между наиболее важными законами распределения вероятностей и основными системами ортогональных многочленов.

Нормальному закону распределения Гаусса

$$w(x;\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

соответствует весовая функция

$$h(x) = e^{-x^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

которая определяет многочлены Чебышева–Эрмита $\{H_n(x)\}$.

Далее, показательному (экспоненциальному) распределению

$$w(x;\xi) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

соответствует весовая функция $h(x) = e^{-x}$, $x > 0$ и многочлены Чебышева–Лагерра $\{L_n(x)\}$.

Гамма-распределению

$$w(x;\xi) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

соответствует весовая функция

$$h(x) = x^\alpha e^{-x}, \qquad x > 0,$$

многочленов Чебышева–Лагерра $\{L_n(x;\alpha)\}$.

Бета-распределению

$$w(x;\xi) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \qquad x \in (0,1), \quad a > 0, \quad b > 0,$$

соответствуют смещенные многочлены Якоби $\{P_n(2x-1;\alpha,\beta)\}$, ортогональные с весовой функцией

$$h(x) = (1-x)^\alpha x^\beta, \qquad x \in (0,1).$$

В теории вероятностей часто рассматривается распределение Пирсона. Плотность распределения вероятностей случайной величины по закону Пирсона удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dw(x;\xi)}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\, w(x;\xi). \tag{1}$$

Это уравнение подробно рассматривалось в § 1 гл. II. При этом были выделены три случая, когда решения уравнения (1) являются весовыми функциями весьма характерных систем ортогональных многочленов. Но в теории вероятностей обычно рассматривается более десяти случаев, когда уравнение (1) определяет характерные и важные в приложениях законы распределения вероятностей. При этом, в отличие от теории ортогональных многочленов, в теории вероятностей рассматриваются и очень важны случаи, когда решения уравнения (1) имеют только конечное число степенных моментов.

Рассмотрим теперь общую схему применения ортогональных многочленов в теории вероятностей.

Пусть задана случайная величина ξ. Допустим, что она принимает значения из интервала (a,b). Обозначим через $w(x;\xi)$ плотность распределения вероятностей случайной величины ξ на интервале (a,b). Обычно считается, что функция $w(x;\xi)$ почти везде положительна, может обращаться в нуль в отдельных точках и иногда имеет вертикальные асимптоты. Кроме того, выполняется условие

$$\int_a^b w(x;\xi)\,dx = 1.$$

Для характеристики случайной величины ξ вводятся ее степенные моменты

$$m_k(\xi) = \int_a^b x^k w(x;\xi)\,dx, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Во многих вопросах, особенно прикладного характера [IX.4], рассматривается следующая задача. Плотность распределения вероятностей $w(x;\xi)$ случайной величины ξ не известна. Но известны несколько степенных моментов (2) весовой функции $w(x;\xi)$, т. е. известны числа

$$m_0(\xi),\ m_1(\xi),\ m_2(\xi),\ \ldots,\ m_p(\xi). \tag{3}$$

Кроме того, известен класс функций W, в который входит неизвестная плотность $w(x;\xi)$. Иными словами, функция $w(x;\xi)$ известна лишь в общих чертах и известны ее числовые моменты. Требуется

определить приближенное значение $w(x;\xi)$ в произвольно заданной точке.

В этом случае поступают следующим образом. Для класса W функций, заданных на интервале (a,b), определяется наиболее характерная система ортогональных многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$ с весовой функцией $h(x)$ из этого класса. Далее для неизвестной плотности распределения вводится разложение

$$w(x;\xi) = h(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\widehat{B}_n(x). \tag{4}$$

Здесь в силу ортонормированности многочленов $\{\widehat{B}_n(x)\}$ с весовой функцией $h(x)$ на интервале (a,b) коэффициенты разложения (4) определяются по формуле

$$c_n = \int_a^b w(x;\xi)\widehat{B}_n(x)\,dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Но ведь функция $w(x;\xi)$ неизвестна. Поэтому применяется искусственный прием.

Для ортонормированных многочленов вводим разложение

$$\widehat{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k. \tag{6}$$

Подставляем это разложение в формулу (5). В результате, используя (2), получаем

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} \int_a^b w(x;\xi)x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} m_k(\xi). \tag{7}$$

Поскольку величины (3) считаются известными, то с помощью (7) можно вычислить коэффициенты

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p. \tag{8}$$

Следовательно, при известных моментах (3) можно вычислить $p+1$ коэффициентов ряда (4) и рассматривать приближенное равенство

$$w(x;\xi) \approx h(x)\sum_{n=0}^{p} c_n\widehat{B}_n(x). \tag{9}$$

Этот прием применяется на практике довольно часто. В теории этому приему также уделяется внимание. Например, в монографии [IX.4] § 2.5 имеет название «Ортогональное разложение плотностей вероятности». Формула (9) распространяется на случай двумерной плотности вероятности.

Ряды вида (4) называются *рядами Грама–Шарлье.* Это название устойчиво и встречается во многих работах.

Ряды Грама–Шарлье можно рассматривать независимо от практических приложений.

Пусть на интервале ортогональности (a, b) определена функция $f(x)$. Предположим, что для этой функции существуют все степенные моменты

$$m_k(f) = \int_a^b f(x)x^k\,dx, \tag{10}$$

причем все интегралы сходятся абсолютно. Тогда можно определить коэффициенты Фурье

$$c_k = \int_a^b f(x)\widehat{B}_n(x)\,dx \tag{11}$$

и рассматривать ряд Грама–Шарлье

$$h(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\widehat{B}_n(x). \tag{12}$$

Разумеется, для рядов вида (12) можно рассматривать разные задачи, как для многих функциональных рядов. Но, на наш взгляд, в связи с наличием множителя $h(x)$ было бы естественным рассматривать ряды (12) для функций вида $f(x) = h(x)\varphi(x)$. Тогда вместо (11) будем иметь обычные коэффициенты Фурье

$$c_n = \int_a^b f(x)\widehat{B}_n(x)\,dx = \int_a^b h(x)\varphi(x)\widehat{B}_n(x)\,dx,$$

но только уже для функции $\varphi(x)$. А остаточный член ряда (12) тогда приводится к виду

$$R_n(x) = h(x)\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\widehat{B}_k(x)\right]. \tag{13}$$

Следовательно, вопрос о сходимости ряда (12) на интервале ортогональности есть вопрос о весовой сходимости обычного ряда Фурье по ортогональным многочленам. При этом в некоторых случаях теоремы о весовой сходимости, рассмотренные в предыдущих главах, являются более естественными. Например, в случае рядов Фурье по многочленам Якоби весовой множитель вместо веса Якоби имеет вид (VII.5.13)

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}.$$

Таким образом, задача об оценке величины (13) в зависимости от свойств функции $\varphi(x)$ весьма специфическая. Но это ни в коей мере не умаляет практического значения приближенной формулы (9).

§ 8. Некоторые дополнения и задачи

В разделе IX списка литературы указаны семь монографий, в которых рассматриваются применения теории ортогональных многочленов в технических науках. Конечно, список таких книг можно значительно увеличить. Более того, ортогональные многочлены упоминаются даже и в некоторых учебниках по техническим дисциплинам.

1. Наиболее важные применения ортогональные многочлены находят в методах расчета и проектирования систем управления. Подробно эти применения изложены в монографии В.В. Солодовникова, А.Н. Дмитриева, Н.Д. Егупова [IX.6]. В этой монографии рассматриваются свойства классических ортогональных многочленов, а затем эти многочлены применяются к решению конкретных задач расчета и проектирования систем управления. При построении алгоритмов исследования стационарных систем управления разрабатываются конкретные методы обращения преобразования Лапласа с помощью классических ортогональных многочленов.

2. Ортогональные многочлены традиционно и постоянно применяются в теории антенн. Для подтверждения этого факта можно привести два примера. В монографии Е.Г. Зелкина и В.Г. Соколова [IX.3], насчитывающей 296 страниц, ортогональные многочлены упоминаются на 30 страницах. Аналогично, в монографии Б.М. Минкевича и В.П. Яковлева [IX.5], насчитывающей также 296 страниц, ортогональные многочлены упоминаются на 36 страницах. Следует отметить, что в этих, а также и в других монографиях рассматриваются и применяются не только классические ортогональные многочлены, но и общие ортогональные многочлены в случае произвольного веса и интервала ортогональности.

3. В связи с амплитудным распределением тока (5.12) в круглой антенне (5.11) возникает необходимость ввести соответствующие ортогональные многочлены по двум переменным.

Пусть в единичном круге

$$D = \{x, y\colon\ x^2 + y^2 < 1\} \tag{1}$$

дана весовая функция

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \tag{2}$$

Тогда по теореме существования [I.9] однозначно определяется система алгебраических многочленов по двум переменным

$$D_{nk}(x, y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

ортонормированных по области (1) с весом (2), т. е. удовлетворяющих условиям

$$\iint\limits_D D_{nk}(x, y) D_{ms}(x, y) h(x, y)\, dx\, dy = \delta_{nm}\delta_{ks}.$$

Было бы интересно рассмотреть свойства этих многочленов. Возможно, для них справедлива какая-то формула Родрига. Вероятно, что многочлены (3) являются собственными функциями дифференциального оператора в частных производных второго порядка. Может быть, с помощью этих многочленов можно решить до конца задачу фазового синтеза для круглой антенны.

4. Задача фильтрации финитных сигналов обычно рассматривается при наличии вектора аддитивного шума. Случай аддитивного шума с детерминированными компонентами и с малым модулем рассмотрен в работе автора [XI.28]. Было бы интересно рассмотреть случай, когда компоненты вектора аддитивного шума обладают некоторыми вероятностными характеристиками.

5. В небольшой книге [IX.7] подробно рассмотрены радиотехнические фильтры Баттерворта, Чебышева и Кауэра. По материалу этой книги написан § 1 настоящей главы. Здесь мы сформулируем одну математическую задачу, связанную с фильтром Кауэра.

В основном уравнении фильтра (1.5)

$$y = g(\omega) = \frac{A}{1 + F(\omega)} \tag{4}$$

в случае фильтра Кауэра функция $F(\omega)$ определяется по формуле

$$F(\omega) = \frac{(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)\dots(\omega - \alpha_n)}{(\omega - \beta_1)(\omega - \beta_2)\dots(\omega - \beta_m)}, \tag{5}$$

где нули расположены на интервале (a, b), который является интервалом пропускания частоты ω, а все полюсы $\{\beta_k\}$ расположены вне

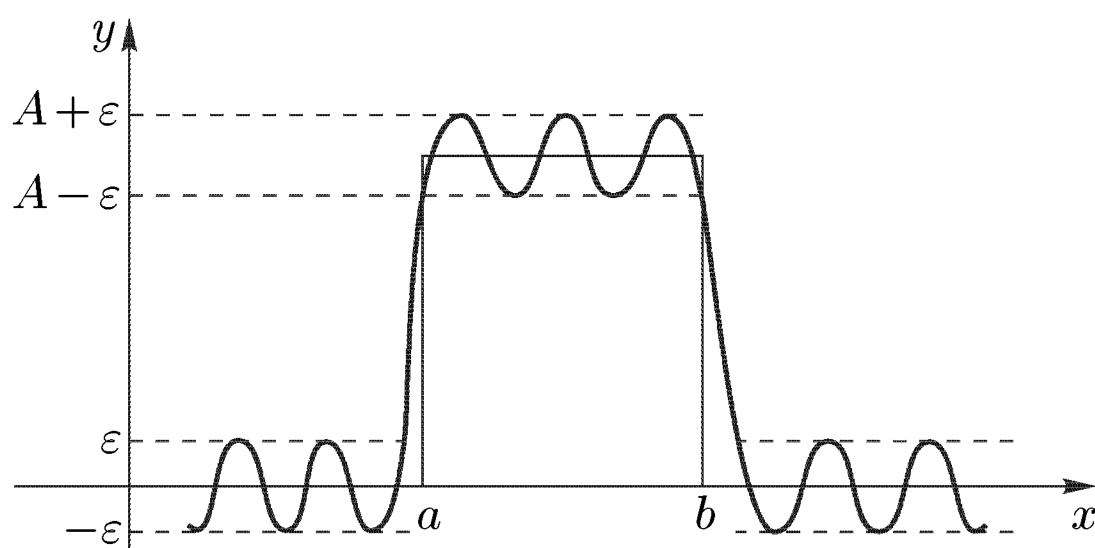


Рис. 10.8

сегмента $[a, b]$. Тогда вместо графика фильтра Чебышева (рис. 10.4) получается график фильтра Кауэра (см. рис. 10.8).

Требуется выбрать нули $\{\alpha_k\}$ и полюсы $\{\beta_k\}$ функции (5) таким образом, чтобы график функции Кауэра (4) уклонялся от графика идеального фильтра не более чем на ε, причем все экстремальные уклонения были одинаковыми.

Глава XI

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

§ 1. Присоединенные функции Лежандра и сферические функции

Присоединенными функциями Лежандра называются функции

$$\Psi_n(x;m) = (1-x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x), \qquad n = 0,1,\ldots, \quad m = 0,1,\ldots,n. \quad (1)$$

Здесь $P_n^{(m)}(x)$ — производная порядка m от стандартизованного многочлена Лежандра $P_n(x)$. Таким образом, при каждом n формула (1) определяет $n+1$ присоединенных функций Лежандра. Все эти функции можно расположить в виде треугольной таблицы

$$\begin{array}{l}
\Psi_0(x;0),\\
\Psi_1(x;0),\ \Psi_1(x;1),\\
\Psi_2(x;0),\ \Psi_2(x;1),\ \Psi_2(x;2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Psi_n(x;0), \Psi_n(x;1), \ldots, \Psi_n(x;n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \quad (2)$$

Для изучения этих функций можно использовать формулу дифференцирования многочленов Якоби (VII.3.2) при совпадающих индексах $\alpha = \beta$. Эта формула имеет вид

$$P_n'(x;\alpha) = \frac{1}{2}\,(2\alpha + n + 1) P_{n-1}(x;\alpha+1). \quad (3)$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, находим

$$P_n'(x) = \frac{1}{2}\,(n+1) P_{n-1}(x;1).$$

Дифференцируем это равенство еще один раз и применяем формулу (3), но уже при $\alpha = 1$. Заменяя в этой формуле n на $n-1$, получаем

$$P_n''(x) = \frac{1}{2}\,(n+1) P_{n-1}'(x;1) = \frac{1}{2^2}\,(n+1)(n+2) P_{n-2}(x;2).$$

Аналогично получаем

$$P_n'''(x) = \frac{1}{2^3}\,(n+1)(n+2)(n+3) P_{n-3}(x;3).$$

А в общем случае имеем формулу

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2^m}\,(n+1)(n+2)\ldots(n+m) P_{n-m}(x;m).$$

Эту формулу можно представить в виде

$$P_n^{(m)}(x) = A_n^{(m)} P_{n-m}(x; m), \tag{4}$$

где введено обозначение

$$A_n^{(m)} = \frac{1}{2^m}\,(n+1)(n+2)\ldots(n+m) = \frac{1}{2^m}\,(n+1)_m. \tag{5}$$

Таким образом, для присоединенных функций Лежандра имеет место формула

$$\Psi_n(x; m) = A_n^{(m)}(1-x^2)^{m/2} P_{n-m}(x; m). \tag{6}$$

В формулах (1) и (6) можно фиксировать индекс m, а тогда номер n может принимать значения m, $m+1$, $m+2$, ...

Так как при фиксированном m многочлены $P_k(x; m)$ ортогональны на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = (1-x^2)^m, \tag{7}$$

то функции Лежандра (1) ортогональны на этом же сегменте, т. е. имеем

$$\int_{-1}^{1} \Psi_n(x; m)\Psi_k(x; m)\,dx = 0, \qquad n \neq k. \tag{8}$$

Вычислим норму функции $\Psi_n(x; m)$. В силу формулы (6) находим

$$||\Psi_n||^2 = \int_{-1}^{1} \Psi_n^2(x; m)\,dx = [A_n^{(m)}]^2 \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m P_{n-m}^2(x; m)\,dx. \tag{9}$$

Далее, применяя формулу (VII.1.23) при $\alpha = \beta = m$, получаем

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m P_{n-m}^2(x; m)\,dx = \frac{(n!)^2\, 2^{2m+1}}{(n-m)!\,(2n+1)(n+m)!}.$$

В результате, используя формулу (5), из (9) находим

$$||\Psi_n||^2 = \left[\frac{(n+1)_m}{2^m}\right]^2 \frac{(n!)^2\, 2^{2m+1}}{(n-m)!\,(2n+1)(n+m)!} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{10}$$

Заметим, что в формулах (9) и (10) использован символ Похгаммера.

Рассмотрим теперь ряды Фурье по присоединенным функциям Лежандра при фиксированном m. В силу формулы (6) эти ряды можно представить в виде

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} \Psi_n(x; m) = (1-x^2)^{m/2} \sum_{n=m}^{\infty} A_n^{(m)} a_n^{(m)} P_{n-m}(x; m) =$$

$$= (1-x^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(m)} P_k(x; m). \tag{11}$$

При фиксированном m рассмотрим функцию

$$f(x) = (1 - x^2)^{m/2}\varphi(x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{12}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$, например, непрерывна на сегменте $[-1, 1]$. Тогда при некоторых дополнительных условиях эту функцию можно разложить в ряд Фурье по многочленам Гегенбауэра с индексом Якоби, т. е. имеем

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(x; m). \tag{13}$$

Такие ряды подробно рассмотрены в гл. VII.

Предположим, что функция (12) разлагается в ряд вида (11). Тогда, учитывая формулы (12) и (13), получаем

$$f(x) - \sum_{n=m}^{m+N} a_n^{(m)}\Psi_n(x; m) = (1 - x^2)^{m/2}\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{N} b_k P_k(x; m)\right]. \tag{14}$$

Таким образом, при рассмотрении рядов Фурье по присоединенным функциям Лежандра при фиксированном m естественно ограничиваться функциями вида (12). При этом условии вопрос о сходимости ряда Фурье по присоединенным функциям Лежандра сводится к вопросу о весовой сходимости ряда Фурье–Гегенбауэра для вспомогательной функции $\varphi(x)$.

Переходим теперь к выводу дифференциального уравнения, решением которого являются функции (1). В силу формулы (6) начинать надо с дифференциального уравнения для многочленов Якоби (VII.2.11)

$$(1 - x^2)\, y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\, y' + n(\alpha + \beta + n + 1)\, y = 0. \tag{15}$$

В соответствии с формулой (6) здесь полагаем $\alpha = \beta = m$, а вместо n надо поставить $n - m$. В результате уравнение (15) приводится к виду

$$(1 - x^2)y'' - 2(m + 1)xy' + (n - m)(n + m + 1)y = 0. \tag{16}$$

А теперь надо определить многочлен Гегенбауэра из формулы (6) и подставить его в уравнение (16). Из формулы (6), опуская постоянный множитель, находим равенство

$$y = P_{n-m}(x; m) = \Psi_n(x; m)(1 - x^2)^{-m/2}. \tag{17}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (16). Вычисляя производные от функции (17), получаем

$$y' = \Psi_n'(x; m)(1 - x^2)^{-m/2} + mx\Psi_n(x; m)(1 - x^2)^{-m/2-1},$$

$$\begin{aligned} y'' = \Psi_n''(x; m)(1 - x^2)^{-m/2} + mx\Psi_n'(x; m)(1 - x^2)^{-m/2-1} + \\ + m\Psi_n(x; m)(1 - x^2)^{-m/2-1} + mx\Psi_n'(x; m)(1 - x^2)^{-m/2-1} + \\ + mx^2\Psi_n(x; m)\left(\frac{m}{2} + 1\right)2(1 - x^2)^{-m/2-2}. \end{aligned}$$

Подставляем эти производные в уравнение (16). В результате находим

$$(1-x^2)\Psi_n''(x;m) + mx\Psi_n'(x;m) + m\Psi_n(x;m) + \\ + mx\Psi_n'(x;m) + 2\Big(\frac{m}{2}+1\Big)x^2 m\Psi_n(x;m)(1-x^2)^{-1} - \\ - 2(m+1)x\Psi_n'(x;m) - 2(m+1)x^2 m\Psi_n(x;m)(1-x^2)^{-1} + \\ + (n-m)(n+m+1)\Psi_n(x;m) = 0.$$

Дальнейшие простые преобразования приводят это уравнение к виду

$$(1-x^2)\Psi_n''(x;m) - 2x\Psi_n'(x;m) + \Big[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big]\Psi_n(x;m) = 0. \tag{18}$$

Следовательно, присоединенные функции Лежандра являются решениями дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' - \frac{m^2}{1-x^2}\,y + n(n+1)\,y = 0. \tag{19}$$

Присоединенные функции Лежандра играют важную роль в математической физике.

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа на единичной сфере. Эта задача заключается в том, что исследуется уравнение

$$\Delta Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0, \tag{20}$$

где

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{21}$$

а функция $Y(\theta,\varphi)$ периодическая по φ, т. е. выполняется условие

$$Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi). \tag{22}$$

И требуется найти такие значения параметра λ, при которых решения уравнения (20) ограничены на единичной сфере и дважды непрерывно дифференцируемы. Такие функции называются *сферическими функциями*.

В уравнении (20) оператор Лапласа можно записать в угловых координатах. В результате получаем

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{23}$$

Далее, как обычно, применяем метод разделения переменных. А именно, ищем решение в виде произведения двух функций

$$Y(\theta,\varphi) = Q(\theta)\Phi(\varphi), \qquad \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{24}$$

Подставляя это произведение в уравнение (23), находим

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\,[\sin\theta\,Q'(\theta)] + \frac{Q(\theta)}{\sin^2\theta}\,\Phi''(\varphi) + \lambda Q(\theta)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделяя переменные, получаем
$$\frac{\sin\theta}{Q(\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\,[\sin\theta\, Q'(\theta)] + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = m^2.$$
Отсюда находим два уравнения:
$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0, \qquad (25)$$
$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,Q'(\theta) + Q''(\theta) + \Big(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Big)Q(\theta) = 0. \qquad (26)$$

Уравнение (25) имеет два линейно независимых решения: $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$. А в уравнении (26) заменим переменные по формулам $x = \cos\theta$ и $y(x) = y(\cos\theta) = Q(\theta)$. Учитывая равенства
$$Q'(\theta) = -y'(\cos\theta)\sin\theta, \qquad Q''(\theta) = y''(\cos\theta)\sin^2\theta - y'(\cos\theta)\cos\theta,$$
вместо (26) получаем уравнение
$$(1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + \Big(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)\,y(x) = 0. \qquad (27)$$

Но ведь это уравнение совпадает с уравнением (19). Надо только в уравнении (27) положить
$$\lambda = n(n+1). \qquad (28)$$
Следовательно, уравнение (26) при условии (28) имеет решения
$$Q_n(\theta; m) = y_n(\cos\theta; m) = \Psi_n(\cos\theta; m). \qquad (29)$$

Решения уравнений (25) и (26) надо подставить в формулу (24). В результате имеем решения
$$Y_n(\theta,\varphi; m) = \Psi_n(\cos\theta; m)\sin m\varphi, \qquad (30)$$
$$Y_n(\theta,\varphi; -m) = \Psi_n(\cos\theta; m)\cos m\varphi. \qquad (31)$$

Здесь знак минус в формуле (31) означает лишь тот факт, что вместо синуса в формуле (30) берется косинус.

Функции (30) и (31) называются *основными сферическими функциями.* Поскольку у присоединенной функции Лежандра (1) всегда должно быть $m \leqslant n$, то при фиксированном n всех функций вида (30) и (31) насчитывается $2n+1$.

Нетрудно доказать, что основные сферические функции (30) и (31) ортогональны на единичной сфере с весом $\sin\theta$. В самом деле, при положительных m и p в силу формулы (30) находим
$$\iint\limits_{\omega} Y_n(\theta,\varphi,m)Y_k(\theta,\varphi;p)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_0^{\pi}\Psi_n(\cos\theta;m)\Psi_k(\cos\theta;p)\sin\theta\,d\theta\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(m\varphi)\sin(p\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1}\Psi_n(x;m)\Psi_k(x;p)\,dx\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(m\varphi)\sin(p\varphi)\,d\varphi. \qquad (32)$$

Если $m \neq p$, то второй интеграл в формуле (32) равен нулю независимо от n и k. А если $m = p$, но $n \neq k$, то равен нулю первый интеграл в силу ортогональности присоединенных функций Лежандра (8). В случае отрицательных m и p во втором интеграле вместо синусов будут стоять косинусы. Случай разных знаков у чисел m и p также очевиден.

Вычислим норму функции (30). В силу (10) имеем

$$\iint\limits_{\omega} Y_n^2(\theta, \varphi; m) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \\ = \int\limits_{-1}^{1} \Psi_n^2(x; m) \, dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(m\varphi) \, d\varphi = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (33)$$

Аналогичная формула справедлива и для функции (31) при $m > 0$. А в случае $m = 0$ имеем

$$\iint\limits_{\omega} Y_n^2(\theta, \varphi; 0) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \Psi_n^2(x; 0) \, dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}. \quad (34)$$

Следовательно, для всякой функции $f(\theta, \varphi)$, удовлетворяющей некоторым качественным условиям, можно рассматривать *рядьы Фурье по основным сферическим функциям*, т. е. имеем

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)) \Psi_n(\cos\theta; m) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)) \Psi_n(\cos\theta; m) \right]. \quad (35)$$

Коэффициенты этого ряда в силу формул (33) и (34) определяются по формулам

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{\omega} f(\theta, \varphi) Y_n(\theta, \varphi; -m) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \qquad m > 0, \quad (36)$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{\omega} f(\theta, \varphi) Y_n(\theta, \varphi; m) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \qquad m > 0, \quad (37)$$

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_{\omega} f(\theta, \varphi) Y_n(\theta, \varphi; 0) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (38)$$

Подробный обзор свойств рядов вида (35) содержится в работе [X.5].

§ 2. Шаровые функции и задача Дирихле

Рассмотрим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigl(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (1)$$

Для решения этого уравнения применяем метод Фурье, т. е. метод разделения переменных. Ищем решение в виде произведения

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$Y(\theta,\varphi)\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}[r^2R'(r)] + \\ + R(r)\Bigl\{\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigl[\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,Y(\theta,\varphi)\Bigr] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,Y(\theta,\varphi)\Bigr\} = 0.$$

Отсюда, как обычно, находим два уравнения:

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigl(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Bigr) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0, \qquad (3)$$

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (3) уже рассматривалось в предыдущем параграфе. При $\lambda = n(n+1)$ его решениями являются сферические функции (1.30) и (1.31). А уравнение (4) имеет общее решение в виде

$$R(r) = c_1r^n + c_2r^{-(n+1)}. \qquad (5)$$

Таким образом, уравнение (1) имеет систему решений

$$r^nY_n(\theta,\varphi,m) = r^n\Psi_n(\cos\theta;m)\sin(m\varphi), \qquad (6)$$

$$r^nY_n(\theta,\varphi,-m) = r^n\Psi_n(\cos\theta;m)\cos(m\varphi). \qquad (7)$$

Эта система решений ограничена в замкнутой единичной сфере. Вторая система решений

$$\frac{1}{r^{n+1}}\,Y_n(\theta,\varphi,m) = \frac{1}{r^{n+1}}\,\Psi_n(\cos\theta;m)\sin(m\varphi), \qquad (8)$$

$$\frac{1}{r^{n+1}}\,Y_n(\theta,\varphi,-m) = \frac{1}{r^{n+1}}\,\Psi_n(\cos\theta;m)(\cos m\varphi) \qquad (9)$$

ограничена равномерно вне единичной сферы.

Все эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа (1) и, следовательно, являются гармоническими функциями. Часто эти функции называются *шаровыми функциями.*

Аналогично рядам Фурье по сферическим функциям (1.35) рассматриваются *ряды Фурье по шаровым функциям*

$$F(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n(A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi))\Psi_n(\cos\theta;m), \qquad (10)$$

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}\left(A_{nm}\cos(m\varphi)+B_{nm}\sin(m\varphi)\right)\Psi_n(\cos\theta;m). \tag{11}$$

Эти ряды называются *рядами Лапласа.* Обычно ряд (10) рассматривается при условии $r\leqslant 1$, а ряд (11) — при условии $r\geqslant 1$.

Рассмотрим задачу Дирихле для единичного шара, т. е. для шара с центром в начале координат и единичного радиуса. Пусть на единичной сфере, т. е. на сфере единичного радиуса, задана произвольная функция $f(\theta,\varphi)$, например непрерывная или даже дифференцируемая. По внутренней задаче Дирихле требуется найти функцию $F(r,\theta,\varphi)$, гармоническую внутри шара, непрерывную в замкнутом шаре и совпадающую на единичной сфере с наперед заданной функцией $f(\theta,\varphi)$, т. е. должно быть $F(1,\theta,\varphi)\equiv f(\theta,\varphi)$. Аналогично внешняя задача Дирихле заключается в том, чтобы определить гармоническую вне единичной сферы функцию $\Phi(r,\theta,\varphi)$, которая равна нулю в бесконечности, а на единичной сфере совпадает с наперед заданной функцией $f(\theta,\varphi)$, т. е. должно быть $\Phi(1,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)$. Формулы (10) и (11) полностью решают эти задачи Дирихле, если функция $f(\theta,\varphi)$ разлагается в ряд Фурье по сферическим функциям, т. е. имеем

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos(m\varphi)+B_{nm}(\sin m\varphi))\Psi_n(\cos\theta;m)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos(m\varphi)+B_{nm}\sin(m\varphi))\Psi_n(\cos\theta;m)\right]. \tag{12}$$

Этот ряд уже рассматривался в предыдущем параграфе. Коэффициенты его определяются по формулам (1.36)–(1.38). Здесь мы рассмотрим некоторые условия, достаточные для сходимости ряда (12).

Пусть в единичном шаре заданы две точки:

$$M(x,y,z)=M(r,\theta,\varphi),\qquad M_0(x_0,y_0,z_0)=M_0(r_0,\theta_0,\varphi_0). \tag{13}$$

Как известно, расстояние между этими точками определяется по формуле

$$\rho=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}, \tag{14}$$

где γ есть угол между радиус-векторами, проведенными из начала координат в точки (13). Для косинуса этого угла, имея в виду скалярное произведение, находим

$$rr_0\cos\gamma=xx_0+yy_0+zz_0=r\sin\theta\cos\varphi\, r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0+$$
$$+\,r\sin\theta\sin\varphi\, r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0+r\cos\theta\, r_0\cos\theta_0=$$
$$=rr_0[\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\cos\theta\cos\theta_0].$$

Следовательно, имеем равенство

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0). \tag{15}$$

Далее, для многочленов Лежандра была получена формула производящей функции (IV.1.11)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, w^k.$$

Полагаем в этой формуле $x = \cos\gamma$ и $w = r_0/r$, где $r_0 < r$. Тогда получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^k}{r^{k+1}}\, P_k(\cos\gamma). \tag{16}$$

А теперь для гармонической функции

$$u_n(r,\theta,\varphi) = r^n Y_n(\theta,\varphi;m) \tag{17}$$

применяем известную формулу Грина [V.2, V.4]

$$u_n(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\omega}\left[\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u_n}{\partial\nu} - u_n\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] d\sigma. \tag{18}$$

Поскольку в случае единичной сферы производная по внешней нормали совпадает с производной по r, то в данном случае для функций (17) и (16) имеем

$$\frac{\partial u_n}{\partial\nu} = \frac{\partial u_n}{\partial r} = nr^{n-1}Y_n(\theta,\varphi;m), \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)r_0^k}{r^{k+2}}\,P_k(\cos\gamma). \tag{20}$$

Подставляя значения (19) и (20) в формулу (18), находим

$$\begin{aligned} r_0^n Y_n(\theta_0,\varphi_0,m) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\omega}\Bigg[& nr^{n-1}Y_n(\theta,\varphi;m)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_0^k}{r^{k+1}}\,P_k(\cos\gamma) + \\ &+ r^nY_n(\theta,\varphi;m)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)r_0^k}{r^{k+2}}\,P_k(\cos\gamma)\Bigg] r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \end{aligned} \tag{21}$$

В этой формуле элемент площади записан для сферы произвольного радиуса. Переходя к единичной сфере и интегрируя ряд почленно, находим

$$r_0^n Y_n(\theta_0,\varphi_0,m) = \sum_{k=0}^{\infty} r_0^k\,\frac{n+k+1}{4\pi}\iint\limits_{\omega} Y_n(\theta,\varphi,m)P_k(\cos\gamma)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{22}$$

Вводя обозначение

$$c_k^{(n)} = \frac{n+k+1}{4\pi}\iint\limits_{\omega} Y_n(\theta,\varphi,m)P_k(\cos\gamma)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{23}$$

из (22) получаем

$$r_0^n Y_n(\theta_0, \varphi_0, m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} r_0^k. \tag{24}$$

В этой формуле $r_0 < 1$ и n произвольное. А величины (23) от r_0 не зависят. Следовательно, имеем равенства

$$\iint\limits_{\omega} Y_n(\theta, \varphi, m) P_k(\cos\gamma) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0, \qquad k \neq n, \tag{25}$$

$$Y_n(\theta_0, \varphi_0, m) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_{\omega} Y_n(\theta, \varphi, m) P_n(\cos\gamma) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{26}$$

Эти формулы можно использовать для разложения $P_n(\cos\gamma)$ по сферическим функциям. В силу формулы (25) имеем разложение

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)) \Psi_n(\cos\theta; m). \tag{27}$$

Коэффициенты вычисляем по формулам (1.36)–(1.38). В силу (1.36), используя (26), находим

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{\omega} P_n(\cos\gamma) Y_n(\theta, \varphi; -m) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$
$$= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0; -m) =$$
$$= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Psi_n(\cos\theta_0; m) \cos(m\varphi_0).$$

Аналогично имеем

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0; m) =$$
$$= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \Psi_n(\cos\theta_0; m) \sin(m\varphi_0).$$

Случай $m = 0$ рассматривается с помощью формулы (1.38). Имеем

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_{\omega} P_n(\cos\gamma) Y_n(\theta, \varphi; 0) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = Y_n(\theta_0, \varphi_0; 0) =$$
$$= \Psi_n(\cos\theta_0; 0) = P_n(\cos\theta_0).$$

Подставляя все найденные значения в равенство (27), получаем

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta_0) + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\cos(m\varphi) \cos(m\varphi_0) +$$
$$+ \sin(m\varphi) \sin(m\varphi_0)] \, \Psi_n(\cos\theta; m) \Psi_n(\cos\theta_0; m).$$

Отсюда окончательно находим

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta_0) + \\ + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, \Psi_n(\cos\theta; m)\Psi_n(\cos\theta_0; m)\cos m(\varphi-\varphi_0). \quad (28)$$

Эта формула называется *формулой сложения для многочленов Лежандра.* Здесь $\cos\gamma$ определяется формулой (15).

С помощью формулы (28) ряд (12), учитывая формулы (1.36)–(1.38), представляем в виде

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0,\varphi_0)P_n(\cos\gamma)\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_0. \quad (29)$$

Здесь точка $M(\theta,\varphi)$ фиксирована, а точка $M_0(\theta_0,\varphi_0)$ переменная. На единичной сфере ω введем новые сферические координаты такие, что точка $M(\theta,\varphi)$ является полюсом. Тогда новыми сферическими координатами будут (γ,ξ), где $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant \xi \leqslant \pi$. Вводя обозначение $F(\gamma,\xi) = f(\theta_0,\varphi_0)$, ряд (29) представляем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma,\xi)P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma\,d\xi. \quad (30)$$

Далее вводим обозначение

$$\Phi(\cos\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma,\xi)\,d\xi. \quad (31)$$

Подставляя эту функцию в ряд (30), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \Phi(\cos\gamma)P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \Phi(x)P_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_nP_n(1). \quad (32)$$

Здесь через c_n обозначены коэффициенты Фурье–Лежандра функции $\Phi(x)$, определенной формулой (31), и учтено условие $P_n(1) \equiv 1$.

Таким образом, вопрос о сходимости ряда Фурье функции $f(\theta,\varphi)$ по основным сферическим функциям (29) в фиксированной точке $M(\theta,\varphi)$ сводится к вопросу о сходимости ряда Фурье по многочленам Лежандра в точке $x = 1$ для вспомогательной функции $\Phi(x)$. При этом возникает сложная отдельная самостоятельная задача о зависимости свойств функции $\Phi(x)$ на сегменте $[-1,1]$ от глобальных и локальных свойств функции $f(\theta,\varphi)$ на единичной сфере. Нетрудно доказать, что

если функция $f(\theta, \varphi)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на сфере, то функция $\Phi(x)$, определяемая формулой (31), также непрерывна и имеет ограниченную вариацию на сегменте $[-1, 1]$. А при этих условиях ряд (32) сходится. Дальнейшие результаты о свойствах функции $\Phi(x)$ излагаются в монографии Е.В. Гобсона [IV.4].

§ 3. Параболические координаты и многочлены Чебышева–Эрмита

Если некоторая краевая задача рассматривается для пространственной области, ограниченной вертикальным бесконечным параболическим цилиндром, то, прежде чем применять метод разделения переменных, обычно переходят к параболическим координатам.

Как известно, параболические координаты ξ, η, ζ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad z = \zeta. \tag{1}$$

Из этих формул следует, что координатным линиям $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ на плоскости (ξ, η) соответствуют два взаимно ортогональных семейства парабол на плоскости (x, y).

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в том случае, когда область есть бесконечный вертикальный параболический цилиндр, граница которого имеет вид

$$y = \frac{x^2}{2\eta_0^2} - \frac{\eta_0^2}{2}. \tag{2}$$

Разумеется, из двух бесконечных областей, на которые эта цилиндрическая поверхность делит все пространство, внутренней областью естественно считать ту, которая выпукла. А в пространстве (ξ, η, ζ) границе (2) соответствует плоскость $\eta = \eta_0$.

Для преобразования Лапласа к параболическим координатам с помощью формул (1) вычисляем производные:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\eta + \frac{\partial u}{\partial y}\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\eta^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\xi\eta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\xi^2 + \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\xi - \frac{\partial u}{\partial y}\eta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\xi^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\xi\eta - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\xi\eta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\eta^2 - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, уравнение Лапласа в параболических координатах имеет вид

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0. \tag{3}$$

Применяем метод разделения переменных, т. е. ищем решение в виде произведения трех функций:

$$u=u(\xi,\eta,\zeta)=F(\xi)\Phi(\eta)\Psi(\zeta). \tag{4}$$

Подставляя это произведение в левую часть (3), получим

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{F''(\xi)}{F(\xi)}+\frac{\Phi''(\eta)}{\Phi(\eta)}\right]+\frac{\Psi''(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=0.$$

Отделяем последнее слагаемое и вводим произвольный множитель λ^2. В результате имеем

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{F''(\xi)}{F(\xi)}+\frac{\Phi''(\eta)}{\Phi(\eta)}\right]=-\frac{\Psi''(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=\lambda^2.$$

А теперь рассматриваем два уравнения

$$\begin{gathered}\Psi''(\zeta)+\lambda^2\Psi(\zeta)=0,\\ \frac{F''(\xi)}{F(\xi)}+\frac{\Phi''(\eta)}{\Phi(\eta)}=\lambda^2(\xi^2+\eta^2).\end{gathered} \tag{5}$$

Решение первого уравнения

$$\Psi(\zeta)=A(\lambda)\cos(\lambda\zeta)+B(\lambda)\sin(\lambda\zeta) \tag{6}$$

ограничено равномерно при всех ζ. А во втором уравнении снова разделяем переменные и вводим новый параметр по формуле

$$\frac{F''(\xi)}{F(\xi)}-\lambda^2\xi^2=-\frac{\Phi''(\eta)}{\Phi(\eta)}+\lambda^2\zeta^2=-k.$$

Следовательно, вместо (5) имеем два уравнения

$$F''(\xi)+(k-\lambda^2\xi^2)F(\xi)=0, \tag{7}$$

$$\Phi''(\eta)-(k+\lambda^2\eta^2)\Phi(\eta)=0. \tag{8}$$

Покажем, что эти два уравнения можно решить с помощью многочленов Чебышева–Эрмита.

В уравнении (7) вводим новое переменное и новую неизвестную функцию по формулам

$$t=\xi\sqrt{\lambda},\qquad v(t)=F\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)=F(\xi).$$

Так как $F''(\xi)=\lambda v''(t)$, то, следовательно, уравнение (7) приводится к виду

$$v''(t)+\left(\frac{k}{\lambda}-t^2\right)v(t)=0. \tag{9}$$

Это уравнение было подробно рассмотрено в § 3 гл. V. В частности, было установлено, что при условии

$$\frac{k}{\lambda} = 2n + 1 \tag{10}$$

его решение ограничено при всех t и имеет вид

$$v_n(t) = H_n(t)e^{-t^2/2}.$$

Если вернуться к величинам ξ и $F(\xi)$, то получим

$$F_n(\xi) = H_n(\xi\sqrt{\lambda}\,)\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr). \tag{11}$$

Каждая функция вида (11) ограничена равномерно при любых значениях аргумента $\xi\sqrt{\lambda}$.

Далее, в уравнении (8) сделаем замену аргумента и функции по формулам

$$\tau = i\eta\sqrt{\lambda}, \qquad w(\tau) = \Phi\Bigl(\frac{\tau}{i\sqrt{\lambda}}\Bigr) = \Phi(\eta).$$

Тогда в силу равенства

$$w''(\tau) = \Phi''\Bigl(\frac{\tau}{i\sqrt{\lambda}}\Bigr)\frac{1}{i^2\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\,\Phi''(\eta)$$

из (8) приходим к уравнению

$$-\lambda w''(\tau) - (k - \lambda\tau^2)w(\tau) = 0.$$

После сокращения это уравнение приводится к виду

$$w''(\tau) + \Bigl(\frac{k}{\lambda} - \tau^2\Bigr)w(\tau) = 0.$$

Решением этого уравнения при условии (10) является функция

$$w_n(\tau) = H_n(\tau)\exp\Bigl(-\frac{\tau^2}{2}\Bigr).$$

Далее возвращаемся к старым переменным и вводим постоянный множитель $(i)^n$. В результате имеем

$$\Phi_n(\eta) = (i)^n H_n(i\eta\sqrt{\lambda}\,)\exp\Bigl(\frac{\lambda\eta^2}{2}\Bigr). \tag{12}$$

При этом постоянном множителе функция (12) все равно будет решением уравнения (8). Но в силу четности либо нечетности многочлена Чебышева–Эрмита это будет уже действительное решение при любом номере n.

Следует отметить, что, в отличие от формулы (11), в которой переменное ξ может принимать любые значения, переменное η в формуле (12) изменяется при условии $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$. Это следует из того факта, что если точка $M(x, y, z)$ изменяется внутри параболического

цилиндра, то в силу формул (1) и уравнения границы (2) координата η изменяется в полусегменте $[0, \eta_0)$. Следовательно, при фиксированном λ функция (12) также ограничена при всех допустимых значениях координаты η.

Таким образом, с помощью многочленов Чебышева–Эрмита мы нашли системы решений уравнений (7) и (8). При этом оказалось, что в рассматриваемом случае все три уравнения, к которым сводится уравнение Лапласа в параболических координатах в результате применения метода разделения переменных, имеют ограниченные решения. Но главное заключается в том, что системы функций (11) и (12) являются полными в том смысле, что любая достаточно гладкая функция разлагается в ряды Фурье по этим системам. Это факт следует из результатов § 4 гл. V.

Найденные функции (6), (11) и (12) подставляем в формулу (4). В результате получаем последовательность решений

$$u_n(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = [A_n(\lambda)\cos(\lambda\zeta) + B_n(\lambda)\sin(\lambda\zeta)]\, H_n(\xi\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Big) \times \\ \times (i)^n H_n(i\eta\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(\frac{\lambda\eta^2}{2}\Big), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что две последовательности функций $\{A_n(\lambda)\}$ и $\{B_n(\lambda)\}$ сходятся к нулю настолько быстро, что ряд

$$u(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(\lambda)\cos\lambda\zeta + B_n(\lambda)\sin\lambda\zeta] \times \\ \times H_n(\xi\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Big)(i)^n H_n(i\eta\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(\frac{\lambda\eta^2}{2}\Big)$$

сходится при $\lambda \in (0, \infty)$, и его можно дважды дифференцировать по каждому из переменных ξ и η и интегрировать почленно по λ. Тогда получим формальное решение уравнения (3) в виде

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [A_n(\lambda)\cos\lambda\zeta + B_n(\lambda)\sin\lambda\zeta] \times \\ \times H_n(\xi\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Big)(i)^n H_n(i\eta\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(\frac{\lambda\eta^2}{2}\Big)\, d\lambda. \quad (13)$$

Как это обычно делается в методе Фурье, две вышеупомянутые произвольные последовательности функций надо подобрать таким образом, чтобы выполнялось некоторое граничное условие. Конкретно, если рассматривать внутреннюю задачу Дирихле, то является известной функция $f(x, y, z)$ на границе вертикального параболического цилиндра. При переходе в пространство (ξ, η, ζ) в силу условия $\eta = \eta_0$ эта функция преобразуется в функцию двух переменных $f(\xi, \zeta)$. Таким образом, общее решение (13) при $\eta = \eta_0$ должно удовлетворять

условию

$$u(\xi,\eta_0,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}[A_n(\lambda)\cos(\lambda\zeta)+B_n(\lambda)\sin(\lambda\zeta)]\times$$
$$\times H_n(\xi\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr)(i)^nH_n(i\eta_0\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(\frac{\lambda\eta_0^2}{2}\Bigr)\,d\lambda\equiv f(\xi,\zeta). \quad (14)$$

Докажем, что этому равенству действительно можно удовлетворить выбором последовательностей функций $\{A_n(\lambda)\}$ и $\{B_n(\lambda)\}$.

В самом деле, предположим, что функция $f(\xi,\zeta)$ представима интегралом Фурье по переменному ζ, т. е. имеем

$$f(\xi,\zeta)=\int_0^{\infty}\Biggl\{\Biggl[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,t)\cos(\lambda t)\,dt\Biggr]\cos(\lambda\zeta)+$$
$$+\Biggl[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,t)\sin(\lambda t)\,dt\Biggr]\sin(\lambda\zeta)\Biggr\}\,d\lambda. \quad (15)$$

Тогда при фиксированном λ справедливы при достаточных структурных условиях разложения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,t)\cos(\lambda t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda)H_n(\xi\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr), \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,t)\sin(\lambda t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\lambda)H_n(\xi\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr). \quad (17)$$

Эти разложения возможны, так как система функций

$$\Bigl\{H_n(\xi\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr)\Bigr\}$$

ортогональна на интервале $(-\infty,\infty)$ и коэффициенты разложения определяются по методу Фурье.

Но, с другой стороны, формулу (14) можно представить в виде

$$f(\xi,\zeta)=\int_0^{\infty}\Biggl\{\Biggl[\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda)H_n(\xi\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr)\times$$
$$\times(i)^nH_n(i\eta_0\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(\frac{\lambda\eta_0^2}{2}\Bigr)\Biggr]\cos(\lambda\zeta)+$$
$$+\Biggl[\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\lambda)H_n(\xi\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(-\frac{\lambda\xi^2}{2}\Bigr)\times$$
$$\times(i)^nH_n(i\eta_0\sqrt{\lambda})\exp\Bigl(\frac{\lambda\eta_0^2}{2}\Bigr)\Biggr]\sin(\lambda\zeta)\Biggr\}\,d\lambda.$$

Следовательно, для определения неизвестных функций $\{A_n(\lambda)\}$ и $\{B_n(\lambda)\}$ в силу (16) и (17) имеем равенства

$$a_n(\lambda) = A_n(\lambda)(i)^n H_n(i\eta_0\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(\frac{\lambda\eta_0^2}{2}\Big),$$

$$b_n(\lambda) = B_n(\lambda)(i)^n H_n(i\eta_0\sqrt{\lambda}\,)\exp\Big(\frac{\lambda\eta_0^2}{2}\Big).$$

Из этих равенств неизвестные функции действительно определяются, ибо все сомножители справа отличны от нуля.

Не представляет труда сформулировать конкретные условия на граничную функцию $f(\xi,\zeta)$, достаточные для сходимости всех рассмотренных выше разложений.

Изложенный метод применяется и во многих других задачах, в которых области ограничены параболами. При этом возможны некоторые вариации приемов приведения рассматриваемых уравнений к стандартным, решения которых выражаются через многочлены Чебышева–Эрмита.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение Гельмгольца на плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

В параболических координатах это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2(\xi^2+\eta^2)u = 0.$$

Как обычно, решение ищем в виде произведения двух функций

$$u(\xi,\eta) = F(\xi)\Phi(\eta).$$

Разделяя переменные, получаем два уравнения:

$$F''(\xi) + (\lambda^2 + k^2\xi^2)F(\xi) = 0, \qquad (18)$$

$$\Phi''(\eta) + (k^2\eta^2 - \lambda^2)\Phi(\eta) = 0. \qquad (19)$$

Каждое из этих уравнений отличается от уравнений (7) и (8). Однако и здесь эти уравнения можно свести к таким, решения которых представляются через многочлены Чебышева–Эрмита.

В самом деле, в уравнении (18) произведем замену по формулам

$$t = \xi\sqrt{ik}, \qquad v(t) = F\Big(\frac{t}{\sqrt{ik}}\Big) = F(\xi).$$

Тогда в силу равенства $F''(\xi) = ikv''(t)$ уравнение (18) приводится к виду

$$v''(t) + \Big(\frac{\lambda^2}{ik} - t^2\Big)v(t) = 0.$$

А это уравнение при условии

$$\frac{\lambda^2}{ik} = 2n+1, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (20)$$

имеет решением функции

$$v_n(t) = H_n(t)\exp\Bigl(-\frac{t^2}{2}\Bigr), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$F_n(\xi) = H_n(\xi\sqrt{ik}\,)\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\,ik\xi^2\Bigr), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Аналогично во втором уравнении (19) производим подстановки

$$\tau = \eta i\sqrt{ik}, \qquad \psi(\tau) = \Phi\Bigl(\frac{\tau}{i\sqrt{ik}}\Bigr) = \Phi(\eta).$$

Учитывая равенство

$$\Phi''(\eta) = -ik\psi''(\tau),$$

получим уравнение

$$\psi''(\tau) + \Bigl(\frac{\lambda^2}{ik} - \tau^2\Bigr)\psi(\tau) = 0.$$

Следовательно, при том же условии (20) уравнение (19) имеет решения

$$\Phi_n(\eta) = H_n(i\eta\sqrt{ik}\,)\exp\Bigl(\frac{1}{2}\,ik\eta^2\Bigr), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Из найденных функций (21) и (22) можно составить общее решение, аналогичное формуле (13), либо рассматривать какую-либо краевую задачу.

§ 4. Гармонический осциллятор и многочлены Чебышева–Эрмита

В стационарном уравнении Шрёдингера

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{h^2}\,(E - U)\psi = 0 \tag{1}$$

функция $\psi(x, y, z)$, называемая волновой функцией, определяет движение элементарной частицы в силовом поле; μ — масса этой частицы, E — ее полная энергия, U — потенциальная энергия, а h — постоянная Планка.

В настоящем параграфе мы рассмотрим уравнение Шрёдингера (1) в одномерном случае, когда волновая функция и потенциальная энергия зависят только от координаты x. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\psi''(x) + \frac{2\mu}{h^2}\,(E - U)\psi(x) = 0. \tag{2}$$

Кроме того, будем считать, что потенциальная энергия определяется формулой

$$U(x) = \frac{1}{2}\,\mu\omega^2x^2.$$

Это означает, что на частицу действует упругая сила по закону

$$F(x) = -\mu\omega^2 x,$$

где ω есть собственная частота колебаний частицы. При этих предположениях уравнение (2) приводится к виду

$$\psi''(x) + \frac{2\mu}{h^2}\Big(E - \frac{1}{2}\,\mu\omega^2 x^2\Big)\psi(x) = 0. \tag{3}$$

Далее, из физического смысла задачи следует, что неизвестная функция $\psi(x)$ должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

Это условие с математической точки зрения заменяет собой дополнительные данные для определения единственного решения уравнения (3).

С другой стороны, из теории дифференциальных уравнений известно, что уравнение вида (3) не при всяких значениях входящих в него параметров имеет решения, удовлетворяющие определенным условиям. Таким образом, математически задача решения уравнения (3) заключается в том, чтобы найти такие значения величины E, при которых решение этого уравнения было бы ограниченным равномерно при всех x и удовлетворяло условию (4). Физически это означает, что требуется определить такие допустимые значения E, при которых возможны стационарные состояния элементарной частицы в данном силовом поле. Иначе говоря, требуется определить такие значения E (спектр собственных значений энергии), при которых существуют ограниченные на всей оси решения уравнения (3), удовлетворяющие условию (4). Эти решения называются собственными функциями уравнения (3).

С целью упрощения уравнения (3) введем новые обозначения для постоянных и заменим независимое переменное. Положим $x = qt$, где q — некоторая постоянная, и введем обозначение $v(t) = \psi(qt)$. Тогда получим

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{q^2}\,\frac{d^2 v}{dt^2}.$$

Следовательно, уравнение (3) и условие (4) имеют вид

$$v''(t) + \frac{2\mu q^2}{h^2}\Big(E - \frac{1}{2}\,\mu\omega^2 q^2 t^2\Big)v(t) = 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt = \frac{1}{q}. \tag{6}$$

Выберем q так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\mu^2\omega^2 q^4}{h^2} = 1,$$

т. е. полагаем

$$q = \sqrt{\frac{h}{\mu\omega}}. \tag{7}$$

Далее вводим новый параметр

$$\lambda = \frac{2\mu q^2}{h^2} E = \frac{2E}{h\omega}. \tag{8}$$

Тогда вместо (5) и (6) получим

$$v''(t) + (\lambda - t^2)v(t) = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt = \sqrt{\frac{\mu\omega}{h}}. \tag{10}$$

А теперь вместо $v(t)$ введем новую неизвестную функцию $Q(t)$ по формуле

$$v(t) = Q(t)e^{-t^2/2}. \tag{11}$$

Дифференцируя это произведение, находим

$$v'(t) = [Q'(t) - tQ(t)]e^{-t^2/2},$$

$$v''(t) = [Q''(t) - Q(t) - tQ'(t)]e^{-t^2/2} - [Q'(t) - tQ(t)]te^{-t^2/2}.$$

Подставляя в уравнение (9), получаем

$$v''(t) + (\lambda - t^2)v(t) = [Q''(t) - 2tQ'(t) + (\lambda - 1)Q(t)]e^{-t^2/2} = 0.$$

Таким образом, неизвестная функция $Q(t)$, определяемая равенством (11), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Q''(t) - 2tQ'(t) + (\lambda - 1)Q(t) = 0. \tag{12}$$

Это дифференциальное уравнение имеет только одну особую точку $t = \infty$. Следовательно, его решение есть аналитическая во всей комплексной плоскости функция. Поэтому можно искать решение уравнения (12) в виде

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k. \tag{13}$$

В силу формулы (11) относительно неизвестной функции (13) можно сформулировать некоторые ограничения. В самом деле, произведение (11) должно быть равномерно ограниченным на всей оси и должно выполняться условие (6).

Подставляя разложение (13) в уравнение (12), получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} - 2t\sum_{k=1}^{\infty} kc_k t^{k-1} + (\lambda - 1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0.$$

Так как это тождество, то при любом k коэффициент при t^k должен быть равен нулю, т. е. имеем

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + (\lambda - 1)c_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, коэффициенты разложения (13) связаны рекуррентной формулой

$$c_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+1)(k+2)}\, c_k. \tag{14}$$

Эта формула определяет отдельно и независимо коэффициенты с четными и с нечетными номерами, причем два коэффициента, c_0 и c_1, остаются произвольными.

Из формулы (14) следует, что можно рассматривать отдельно четное $Q(t;0)$ и нечетное $Q(t;1)$ решения уравнения (12), первое из которых линейно зависит от c_0, а второе — от c_1.

Пусть сначала параметр λ не является нечетным натуральным числом, т. е. $\lambda \neq 2n+1$. Тогда все коэффициенты разложения $Q(t;0)$, начиная с некоторого номера, имеют один и тот же знак. И поэтому функция $Q(t;0)$ при $t \to \infty$ будет возрастать по абсолютному значению быстрее, чем t в любой сколь угодно большой степени. В связи с этим фактом при условии $\lambda \neq 2n+1$ мы не можем гарантировать равномерную ограниченность произведения (11) на всей оси. Аналогичные утверждения справедливы и для функции $Q(t;1)$, а также и для линейной комбинации этих функций, ибо в силу четности и нечетности этих функций линейная комбинация их может иметь ослабленную скорость возрастания только на одной половине оси.

Более того, исходя из формулы (14) при $\lambda \neq 2n+1$ нетрудно доказать, что произведение (11) не является ограниченным на всей оси для обоих функций, $Q(t;0)$ и $Q(t;1)$.

Таким образом, остается рассмотреть только те значения параметра λ, которые определяются формулой

$$\lambda_n = 2n+1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

При таком выборе параметра λ из формулы (14) находим

$$c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \ldots = 0.$$

Так как формула (14) связывает коэффициенты разложения (13) с номерами одинаковой четности, то решение (13) будет многочленом в том случае, если оно содержит только те степени t, показатель которых имеет одинаковую с номером n четность.

В самом деле, пусть n — четное число, т. е. $n = 2m$. Тогда, оставляя c_0 произвольным, можно выразить через него все остальные коэффициенты. При этом нужно обязательно положить $c_1 = 0$, ибо в противном случае будут отличны от нуля все коэффициенты с нечетными номерами, а тогда решение не будет многочленом.

Аналогично, если n нечетное, т. е. $n = 2m + 1$, то для того, чтобы решение (13) было многочленом, полагаем $c_0 = 0$, и выражаем все нечетные коэффициенты через c_1, который остается произвольным.

Таким образом, если $\lambda = 2(2m) + 1$, то многочлен $Q_{2m}(t)$, коэффициенты которого определяются через c_0 по рекуррентной формуле (14), является решением уравнения (12) при условии, что он содержит только четные степени t, а произвольный множитель c_0 можно определить так, чтобы выполнялось условие (10). Аналогично, если $\lambda = 2(2m+1)+1$, то многочлен $Q_{2m+1}(t)$ должен быть нечетным и за счет выбора c_1 должен удовлетворять тому же условию (10).

Следовательно, в силу (11) последовательности собственных значений (15) соответствует последовательность собственных функций

$$v_n(t) = Q_n(t)e^{-t^2/2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

которые являются решениями уравнения (5) при условии (6), причем каждая функция (16) ограничена равномерно на всей оси.

А теперь перейдем к многочленам Чебышева–Эрмита.

Дифференциальное уравнение (12) при $\lambda = 2n + 1$ совпадает с уравнением (V.1.22), которому удовлетворяют многочлены Чебышева–Эрмита $\{H_n(t)\}$. Поэтому возникает вопрос о взаимосвязи многочленов $Q_n(t)$ и $H_n(t)$. Мы сейчас докажем, что эти многочлены могут отличаться только множителем.

В самом деле, из формулы (V.1.23) следует, что два соседних старших коэффициента многочлена $H_n(t)$ связаны равенством

$$a_{n-2k} = \frac{-2^2(k+1)}{(n-2k-1)(n-2k)}\, a_{n-2k-2}.$$

Полагая здесь $n - 2k = m + 2$, находим

$$a_{m+2} = \frac{2m - 2n}{(m+1)(m+2)}\, a_m.$$

Но такой же вид имеет рекуррентное соотношение (14), если в нем поставить $\lambda = 2n + 1$. Следовательно, многочлены $Q_n(t)$ и $H_n(t)$ могут отличаться только потому, что по-разному выбран первый коэффициент. А так как все коэффициенты у обоих многочленов выражаются линейно через первый, то, следовательно, многочлены $Q_n(t)$ и $H_n(t)$ могут отличаться только постоянным множителем, который можно считать положительным.

Для определения постоянной A_n в формуле

$$Q_n(t) = A_n H_n(t)$$

воспользуемся двумя равенствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t)\, dt = n!\, 2^n \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} Q_n^2(t)\,dt = \sqrt{\frac{\mu\omega}{h}}.$$

Из этих равенств находим

$$A_n^2 n!\,2^n\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{h}}.$$

Следовательно, имеем

$$Q_n(t) = \left(\frac{1}{n!\,2^n\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{h}}\right)^{1/2} H_n(t).$$

Подставляя это значение в формулу (11), получаем

$$v_n(t) = \frac{1}{(n!\,2^n\sqrt{\pi})^{1/2}}\left(\frac{\mu\omega}{h}\right)^{1/4} H_n(t)e^{-t^2/2}.$$

Наконец, возвращаясь к переменному $x = qt$, в силу формулы (7) получаем собственные функции дифференциального уравнения (3) в виде

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(n!\,2^n\sqrt{\pi}\,)^{1/2}}\left(\frac{\mu\omega}{h}\right)^{1/4} H_n\left(x\sqrt{\frac{\mu\omega}{h}}\right)\exp\left(-\frac{\mu\omega}{2h}\,x^2\right),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots \quad (17)$$

В силу формул (8) и (15) функция (17) является решением уравнения (3) в случае, если энергия E удовлетворяет условию

$$\lambda_n = \frac{2E_n}{h\omega} = 2n + 1.$$

Отсюда находим квантовый спектр энергии элементарной частицы в виде

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (18)$$

Именно при этих значениях энергии возможны установившиеся стационарные состояния элементарной частицы в силовом поле.

Таким образом, решения уравнения (3) при условии (18) представляются через многочлены Чебышева–Эрмита по формуле (17).

§ 5. Электрон в кулоновом поле и многочлены Чебышева–Лагерра

В настоящем параграфе показывается, каким образом многочлены Чебышева–Лагерра применяются в квантовой механике при исследовании движения электрона в атоме водорода.

Рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{h^2}\,(E - U)\psi = 0. \quad (1)$$

В физике доказывается, что если потенциальная энергия определяется формулой

$$U(x, y, z) = -\frac{e^2}{r}, \tag{2}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и e — заряд электрона, то функция $\psi(x, y, z)$, являющаяся решением уравнения (1), характеризует движение электрона вокруг ядра, т. е. это есть волновая функция, с помощью которой определяется устойчивая стационарная траектория движения электрона.

Уравнение (1) при условии (2) имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{h^2}\Big(E + \frac{e^2}{r}\Big)\psi = 0. \tag{3}$$

Здесь μ — масса электрона, h — постоянная Планка, E — полная энергия электрона.

Математически задача заключается в том, чтобы найти такие значения энергии E, при которых уравнение (3) имеет решение $\psi(x, y, z)$, непрерывное во всем пространстве, причем в качестве нормировки решения принимается условие

$$\iiint\limits_{\Omega} |\psi(x, y, z)|^2 \, dx\, dy\, dz = 1, \tag{4}$$

где Ω есть все трехмерное пространство.

Для краткости введем обозначения

$$\lambda = \frac{2\mu}{h^2}\, E, \qquad b = \frac{2\mu}{h^2}\, e^2. \tag{5}$$

Подставляя эти величины в уравнение (3), получим

$$\Delta\psi + \Big(\lambda + \frac{b}{r}\Big)\, \psi = 0. \tag{6}$$

Для решения этого уравнения перейдем в нем к сферическим координатам. Считается, что начало координат находится в ядре атома, которое неподвижно. Используем формулу оператора Лапласа в сферических координатах. В результате уравнение (6) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + (\lambda r^2 + br)\psi = 0. \tag{7}$$

Далее, как обычно, применяем метод разделения переменных, т. е. ищем решение в виде произведения

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \tag{8}$$

Подставляем это произведение в уравнение (7). В результате имеем

$$\frac{d}{dr}\Big(r^2\,\frac{dR}{dr}\Big)Y + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)R + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\,R + (\lambda r^2 + br)RY = 0.$$

После деления на произведение (8) это уравнение приводится к виду

$$\left[\frac{1}{R}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR}{dr}\right)+(\lambda r^2+br)\right]+\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]\frac{1}{Y}=0. \tag{9}$$

Поскольку переменные разделены, то оба слагаемых постоянны и противоположны по знаку. Постоянную целесообразно выбрать в виде произведения $A=m(m+1)$. Таким образом, из (9) находим два уравнения:

$$\frac{1}{R}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR}{dr}\right)+(\lambda r^2+br)=m(m+1), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-m(m+1)Y. \tag{11}$$

Уравнение (11) подробно рассмотрено в § 1.

Таким образом, остается рассмотреть уравнение (10). Представим его в виде

$$r^2R''(r)+2rR'(r)+[\lambda r^2+br-m(m+1)]R(r)=0. \tag{12}$$

А теперь вспомним дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева–Лагерра (VI.1.33):

$$xL_n''(x;\alpha)+(\alpha+1-x)L_n'(x;\alpha)+nL_n(x;\alpha)=0. \tag{13}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v_n(x)=x^mL_n(x;\alpha)\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \tag{14}$$

Разрешая равенство (14) относительно многочлена Чебышева–Лагерра, получаем

$$L_n(x;\alpha)=x^{-m}v_n(x)\exp\left(\frac{x}{2}\right). \tag{15}$$

Вычисляем производные:

$$L_n'(x;\alpha)=-mx^{-m-1}v_n(x)e^{x/2}+x^{-m}v_n'(x)e^{x/2}+\frac{1}{2}\,x^{-m}v_n(x)e^{x/2}=$$
$$=x^{-m}e^{x/2}\left[v_n'(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{x}\right)v_n(x)\right],$$

$$L_n''(x;\alpha)=-mx^{-m-1}e^{x/2}\left[v_n'(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{x}\right)v_n(x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\,x^{-m}e^{x/2}\left[v_n'(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{x}\right)v_n(x)\right]+$$
$$+x^{-m}e^{x/2}\left[v_n''(x)+\frac{m}{x^2}\,v_n(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{x}\right)v_n'(x)\right]=$$
$$=x^{-m}e^{x/2}\left\{v_n''(x)+\left(1-\frac{2m}{x}\right)v_n'(x)+\left[\frac{m}{x^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{x}\right)^2\right]v_n(x)\right\}.$$

Подставляем эти выражения в уравнение (13). В результате находим

$$x^{-m+1}e^{x/2}\Big\{v_n''(x) + \Big(1 - \frac{2m}{x}\Big)v_n'(x) + \Big[\frac{m}{x^2} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{m}{x}\Big)^2\Big]v_n(x)\Big\} + \\ + (\alpha + 1 - x)x^{-m}e^{x/2}\Big[v_n'(x) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{m}{x}\Big)v_n(x)\Big] + nx^{-m}e^{x/2}v_n(x) = 0.$$

После очевидных упрощений это уравнение приводится к виду

$$x^2v_n''(x) + (\alpha + 1 - 2m)xv_n'(x) + \\ + \Big[m - \frac{1}{4}\,x^2 + m^2 + (\alpha + 1)\Big(\frac{1}{2}x - m\Big) + nx\Big]v_n(x) = 0. \quad (16)$$

До сих пор параметр α был произвольным. А теперь положим

$$\alpha = 2m + 1. \quad (17)$$

Тогда вместо (16) получим

$$x^2v_n''(x) + 2xv_n'(x) + \Big[-\frac{x^2}{4} + (m + n + 1)x - m(m + 1)\Big]v_n(x) = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) известно. Это решение определяется формулой (14).

Уравнение (18) аналогично уравнению (12), которое надо решать. А чтобы эти два уравнения совпадали полностью, вводим два условия

$$\lambda = -\frac{1}{4}, \qquad m + n + 1 = b. \quad (19)$$

Но ведь постоянная b есть заранее заданная величина, которая определяется второй из формул (5). Поэтому условиям (19) удовлетворить невозможно.

Чтобы связать уравнения (12) и (18) и выразить решение первого через решение второго, применим искусственный прием.

Введем новое независимое переменное

$$x = a_n r, \quad (20)$$

где a_n — пока неизвестное постоянное, а x не является координатой в том пространстве, где рассматривается уравнение (3). Далее по формуле

$$u_n(r) = v_n(a_n r) = v_n(x) \quad (21)$$

вводим новую неизвестную функцию и находим ее производные:

$$u_n'(r) = a_n v_n'(a_n r), \qquad u_n''(r) = a_n^2 v_n''(a_n r).$$

Переходим к новым переменным в уравнении (18). В результате имеем

$$r^2u_n''(r) + 2ru_n'(r) + \Big[-\frac{1}{4}\,a_n^2r^2 + (m + n + 1)a_n r - m(m + 1)\Big]u_n(r) = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения можно написать явно в силу формулы (21). С другой стороны, уравнение (22) уже можно сравнить с уравнением (12), которое нам надо решить. Чтобы уравнения (12) и (22) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

$$\lambda = -\frac{1}{4}\,a_n^2, \qquad b = (m+n+1)a_n.$$

Из второго условия находим

$$a_n = \frac{b}{m+n+1}. \tag{23}$$

Подставляем в первое, имеем

$$\lambda_n = -\frac{b^2}{4(m+n+1)^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Таким образом, мы нашли собственные числа дифференциального уравнения (12), т. е. такие значения параметра λ, при которых это уравнение имеет решение на всем интервале $(0, \infty)$.

Каждому собственному значению λ_n соответствует решение уравнения (12). Это решение в силу формул (14), (17), (21) и (23) можно представить в виде

$$R_{nm}(r) = u_n(r) = v_n(a_n r) = v_n\left(\frac{br}{n+m+1}\right) =$$
$$= \left(\frac{br}{m+n+1}\right)^m L_n\left(\frac{br}{m+n+1}; 2m+1\right) \exp\left[\frac{-br}{2(m+n+1)}\right]. \tag{25}$$

Таким образом, с помощью многочленов Чебышева–Лагерра мы нашли в явном виде решение уравнения (12) и тем самым обосновали применение метода разделения переменных при решении уравнения Шрёдингера в одном частном случае. Заключительная часть метода Фурье для уравнения (3) и в том числе обеспечение условия (4) проводится как обычно, и на этом мы не останавливаемся.

Собственные значения $\{\lambda_n\}$, определяемые формулой (24), подставляем в первое из равенств (5). Учитывая второе из этих равенств, находим

$$E_{nm} = -\frac{\mu e^4}{2h^2(m+n+1)^2}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Таков спектр значений энергии, при которых существуют устойчивые движения электрона вокруг ядра. Эти значения (26) образуют дискретный отрицательный спектр энергии. Что касается положительной части спектра, то она оказывается непрерывной, но это уже другой вопрос, не имеющий отношения к многочленам Чебышева–Лагерра.

§ 6. Решение неоднородных допустимых дифференциальных уравнений в областях ортогональности

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение Чебышева–Эрмита

$$y'' - 2xy' + cy = f(x). \tag{1}$$

Предположим, что функция $f(x)$ определена на всей оси и разлагается в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита, т. е. имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{H}_n(x), \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{2}$$

Решение уравнения (1) будем искать также в виде ряда по многочленам Чебышева–Эрмита

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{H}_n(x). \tag{3}$$

Подставляя разложения (2) и (3) в уравнение (1), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\widehat{H}''_n(x) - 2x\widehat{H}'_n(x)] + c\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{H}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{H}_n(x). \tag{4}$$

Поскольку для многочленов Чебышева–Эрмита выполняется тождество (V.1.21)

$$\widehat{H}''_n(x) - 2x\widehat{H}'_n(x) + 2n\widehat{H}_n(x) \equiv 0, \tag{5}$$

то из тождества (4) следуют равенства

$$a_n(c - 2n) = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Если $c \neq 2n$ при любом n, то из равенств (6) однозначно определяются все коэффициенты разложения (3). А если $c = 2m$, то коэффициент a_m не определяется и остается произвольным. Но в этом случае для разрешимости уравнения (1) для функции $f(x)$ должно выполняться условие $b_m = 0$.

Аналогично рассматривается неоднородное уравнение Чебышева–Лагерра

$$xy'' + (\alpha - 1 + x)y' + cy = \varphi(x). \tag{7}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{L}_n(x; \alpha), \qquad x \in (0, \infty). \tag{8}$$

Тогда для неизвестного решения уравнения (7) вводим разложение

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{L}_n(x;\alpha). \tag{9}$$

А теперь подставляем разложения (8) и (9) в уравнение (7). Учитывая тождество для многочленов Чебышева–Лагерра (VI.1.32)

$$x\widehat{L}_n''(x;\alpha) + (\alpha - x + 1)\widehat{L}_n'(x;\alpha) + n\widehat{L}_n(x;\alpha) \equiv 0, \tag{10}$$

приходим к условиям

$$a_n(c-n) = b_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{11}$$

Если $c \neq n$ при любом n, то коэффициенты разложения (9) определяются однозначно. А если $c = m$, то условием разрешимости уравнения (7) будет равенство $b_m = 0$. При этом коэффициент a_m в разложении (9) остается произвольным.

Далее, для неоднородного уравнения Якоби

$$(1-x^2)\,y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]\,y' + c\,y = \psi(x) \tag{12}$$

вводим два разложения:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{P}_n(x;\alpha,\beta), \qquad x \in (-1,1), \tag{13}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widehat{P}_n(x;\alpha,\beta), \qquad x \in (-1,1). \tag{14}$$

Аналогично предыдущим случаям, используя тождество для многочленов Якоби (VII.2.10)

$$(1-x^2)\widehat{P}_n''(x;\alpha,\beta) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]\widehat{P}_n'(x;\alpha,\beta) + \\ + n(n+\alpha+\beta+1)\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{15}$$

получаем условия

$$a_n[c - n(n+\alpha+\beta+1)] = b_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

Если $c \neq n(n+\alpha+\beta+1)$, то все коэффициенты разложения (13) определяются однозначно. А если $c = m(m+\alpha+\beta+1)$, то коэффициент a_m остается произвольным, но при условии $b_m = 0$.

Разумеется, все вышеизложенные результаты носят формальный характер, т. е. формулы (6), (11) и (16) можно рассматривать без условий сходимости соответствующих рядов Фурье по ортогональным многочленам.

Пусть многочлены $\{B_n(x)\}$ ортонормированы на интервале (a,b) с весовой функцией $h_1(x)$, т. е. имеем

$$\int_a^b h_1(x)B_n(x)B_k(x)\,dx = \delta_{nk}. \tag{17}$$

С другой стороны, пусть многочлены $\{Q_m(y)\}$ ортонормированы с весом $h_2(y)$ на интервале (c, d), т. е.

$$\int_c^d h_2(y)Q_m(y)Q_s(y)\,dy = \delta_{ms}. \tag{18}$$

По этим двум интервалам образуем плоскую область

$$G = \{(x, y)\colon\ a < x < b,\ c < y < d\}. \tag{19}$$

В этой области вводим весовую функцию с разделяющимися переменными

$$h(x, y) = h_1(x)h_2(y), \qquad (x, y) \in G. \tag{20}$$

Рассмотрим многочлены по двум переменным

$$F_{nm}(x, y) = B_n(x)Q_m(y), \qquad n,\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Эти многочлены ортогональны с весом (20) по области (19). В самом деле, в силу (17) и (18) имеем

$$\iint_G h(x, y)F_{nm}(x, y)F_{ks}(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b h_1(x)B_n(x)B_k(x)\,dx \int_a^b h_2(y)Q_m(y)Q_s(y)\,dy = \delta_{nk}\delta_{ms}. \tag{22}$$

По формуле (21) можно рассматривать различные комбинации классических ортогональных многочленов.

Пусть область G есть вся плоскость, а весовая функция определяется формулой

$$h(x, y) = \exp(-x^2 - y^2). \tag{23}$$

Тогда вместо (21) имеем формулу

$$F_{nm}(x, y) = \widehat{H}_n(x)\widehat{H}_m(y). \tag{24}$$

В силу тождества (5) многочлен (24) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''_{xx} + u''_{yy} - 2xu'_x - 2yu'_y + 2(n + m)u = 0. \tag{25}$$

Следовательно, в данном случае можно рассматривать неоднородное дифференциальное уравнение Эрмита

$$u''_{xx} + u''_{yy} - 2xu'_x - 2yu'_y + cu = f(x, y). \tag{26}$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ разлагается в ряд по многочленам (24), т. е. имеем

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\widehat{H}_n(x)\widehat{H}_m(y). \tag{27}$$

Решение уравнения (26) будем искать в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \widehat{H}_n(x) \widehat{H}_m(y). \tag{28}$$

Разложения (27) и (28) подставляем в уравнение (26). Так как многочлен (24) удовлетворяет уравнению (25), то получаем равенства

$$a_{nm}[c - 2(n + m)] = b_{nm}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Если $c \neq 2(n + m)$ при любых n и m, то все коэффициенты разложения (28) определяются однозначно. А если $c = 2N$ (здесь и далее в этой главе через N обозначается целое неотрицательное число), то коэффициенты a_{nm} не определяются для системы номеров

$$n = 0, 1, \ldots, N, \qquad m = N - n. \tag{30}$$

При этих номерах должны выполняться условия $b_{nm} = 0$.

Рассмотрим теперь первый координатный угол

$$G = \{(x, y)\colon\ x > 0,\ y > 0\} \tag{31}$$

и весовую функцию в нем

$$h(x, y) = x^{\alpha} e^{-x} y^{\beta} e^{-y}, \qquad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \tag{32}$$

Тогда многочлены

$$F_{nm}(x, y) = \widehat{L}_n(x; \alpha) \widehat{L}_m(y; \beta), \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

ортогональны по области (31) с весовой функцией (32) и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x u''_{xx} + y u''_{yy} + (1 + \alpha - x) u'_x + (1 + \beta - y) u'_y + (n + m) u = 0. \tag{34}$$

Следовательно, в области (31) можно рассматривать неоднородное уравнение Лагерра

$$x u''_{xx} + y u''_{yy} + (1 + \alpha - x) u'_x + (1 + \beta - y) u'_y + c u = \varphi(x, y). \tag{35}$$

Аналогично предыдущему вводим два разложения

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \widehat{L}_n(x; \alpha) \widehat{L}_m(y; \beta), \tag{36}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \widehat{L}_n(x; \alpha) \widehat{L}_m(y; \beta).$$

Подставляя эти разложения в уравнение (35), в силу тождества (34) находим равенства

$$a_{nm}[c - (n + m)] = b_{nm}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Если $c \neq n + m$ при любых n и m, то коэффициенты разложения (36) определяются однозначно. А если $c = N$, то аналогично предыдущему случаю (30) для системы номеров

$$n = 0, 1, \ldots, N, \qquad m = N - n \tag{37}$$

коэффициенты a_{nm} не определяются, но для разрешимости уравнения (33) необходимо выполнение условий $b_{nm} = 0$ для системы номеров (37).

Далее, в квадрате

$$G = \{(x, y)\colon\ -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\} \tag{38}$$

рассмотрим весовую функцию

$$h(x, y) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}(1 - y)^{\gamma}(1 + y)^{\sigma},$$
$$\alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad \gamma > -1, \quad \sigma > -1. \tag{39}$$

В этом случае многочлены

$$F_{nm}(x, y) = \widehat{P}_n(x; \alpha, \beta)\widehat{P}_m(y; \gamma, \sigma) \tag{40}$$

ортонормированы по области (38) с весом (39) и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)\, u''_{xx} + (1 - y^2)\, u''_{yy} +$$
$$+ [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\, u'_x + [\sigma - \gamma - (\gamma + \sigma + 2)y]\, u'_y +$$
$$+ [n(n + \alpha + \beta + 1) + m(m + \gamma + \sigma + 1)]\, u = 0. \tag{41}$$

Следовательно, в квадрате (38) можно рассматривать неоднородное уравнение Якоби

$$(1 - x^2)\, u''_{xx} + (1 - y^2)\, u''_{yy} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\, u'_x +$$
$$+ [\sigma - \gamma - (\gamma + \sigma + 2)y]\, u'_y + c\, u = \psi(x, y). \tag{42}$$

А теперь, как обычно, вводим два разложения:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\widehat{P}_n(x; \alpha, \beta)\widehat{P}_m(y; \gamma, \sigma), \tag{43}$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\widehat{P}_n(x; \alpha, \beta)\widehat{P}_m(y; \gamma, \sigma).$$

Подставляя эти разложения в уравнение (42) и учитывая тождество (41) для многочленов (40), получаем условия

$$a_{nm}[c - n(n + \alpha + \beta + 1) - m(m + \gamma + \sigma + 1)] = b_{nm}.$$

Если разность в квадратных скобках отлична от нуля, то все коэффициенты разложения (43) определяются однозначно. А в противном случае возникают некоторые условия на функцию $\psi(x, y)$.

В правой полуплоскости рассмотрим весовую функцию

$$h(x,y) = x^{\alpha}e^{-x}e^{-y^2}, \qquad \alpha > -1. \tag{44}$$

Соответствующие этой функции ортогональные многочлены

$$F_{nm}(x,y) = \widehat{L}_n(x;\alpha)\widehat{H}_m(y), \qquad n,\, m = 0,1,2,\ldots, \tag{45}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xu''_{xx} + u''_{yy} + (1+\alpha-x)u'_x - 2yu'_y + (n+2m)u = 0. \tag{46}$$

Следовательно, в правой полуплоскости можно рассматривать неоднородное уравнение Лагерра–Эрмита

$$xu''_{xx} + u''_{yy} + (1+\alpha-x)u'_x - 2yu'_y + cu = f(x,y). \tag{47}$$

Как обычно, вводим два разложения:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\widehat{L}_n(x;\alpha)\widehat{H}_m(y), \tag{48}$$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\widehat{L}_n(x;\alpha)\widehat{H}_m(y). \tag{49}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (47) и учитывая тождество (46), приходим к равенствам

$$a_{nm}[c-(n+2m)] = b_{nm}, \qquad n,\, m = 0,1,2,\ldots \tag{50}$$

Если $c \neq n+2m$, то все коэффициенты разложения (48) определяются однозначно. А если $c = N$, то все коэффициенты a_{nm} с номерами, удовлетворяющими условию $N = n+2m$, остаются произвольными, но зато для разрешимости уравнения (47) вводятся условия $b_{nm} = 0$ для соответствующих условию $N = n+2m$ номеров.

Рассмотрим теперь вертикальную полосу

$$G = \{(x,y)\colon\ -1 < x < 1\}$$

и в ней весовую функцию

$$h(x,y) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}e^{-y^2}.$$

Соответствующие ортогональные многочлены

$$F_{nm}(x,y) = \widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{H}_m(y)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,u''_{xx} + u''_{yy} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,u'_x - {}$$
$$- 2y\,u'_y + [n(n+\alpha+\beta+1)+2m]\,u = 0.$$

Следовательно, в этой вертикальной полосе можно рассматривать неоднородное дифференциальное уравнение Якоби–Эрмита

$$(1-x^2)\,u''_{xx} + u''_{yy} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,u'_x - 2y\,u'_y + c\,u = \varphi(x,y).$$

Как обычно, вводим разложения

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{H}_m(y),$$

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{H}_m(y)$$

и приходим к равенствам

$$a_{nm}[c-n(n+\alpha+\beta+1)-2m]=b_{nm}.$$

Если разность в квадратных скобках отлична от нуля, то все коэффициенты a_{nm} определяются однозначно. А в противном случае для разрешимости уравнения Якоби–Эрмита некоторые из коэффициентов b_{nm} должны быть равны нулю.

Наконец, рассмотрим вертикальную полуполосу

$$G=\{(x,y)\colon\ -1<x<1,\ y>0\}$$

и весовую функцию

$$h(x,y)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y^{\gamma}e^{-y}.$$

Соответствующие ортогональные многочлены

$$F_{nm}(x,y)=\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{L}_m(y;\gamma)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,u''_{xx}+y\,u''_{yy}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,u'_x+ \\ +(1+\gamma-y)\,u'_y+[n(n+\alpha+\beta+1)+m]\,u=0.$$

Следовательно, можно рассматривать неоднородное дифференциальное уравнение Якоби–Лагерра

$$(1-x^2)\,u''_{xx}+y\,u''_{yy}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\,u'_x+ \\ +(1+\gamma-y)\,u'_y+c\,u=\psi(x,y). \quad (51)$$

Как обычно, вводим разложения

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{L}_m(y;\gamma), \quad (52)$$

$$\psi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}\widehat{P}_n(x;\alpha,\beta)\widehat{L}_m(y;\gamma). \quad (53)$$

Подставляя эти разложения в уравнение Якоби–Лагерра, находим равенства

$$a_{nm}[c-n(n+\alpha+\beta+1)-m]=b_{nm}.$$

Если разность в квадратных скобках отлична от нуля при всех номерах n и m, то все коэффициенты a_{nm} определяются однозначно. А в противном случае часть коэффициентов разложения (53) должна быть равна нулю. Это является условием разрешимости уравнения (51).

§ 7. Некоторые дополнения и задачи

Схема решения неоднородных допустимых дифференциальных уравнений в областях ортогональности наиболее естественно реализуется в случае ортогональных многочленов по двум переменным. Здесь мы рассмотрим фактически без доказательства только три примера.

В теории ортогональных многочленов двух переменных хорошо известны и подробно изучаются классические ортогональные многочлены Аппеля по двум переменным. Эти многочлены являются наиболее характерным и нестандартным обобщением многочленов Якоби на случай двух переменных.

Пусть в треугольной области

$$G = \{(x, y)\colon\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\} \tag{1}$$

определена весовая функция

$$h(x, y) = x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1 - x - y)^p, \tag{2}$$

где параметры удовлетворяют условиям

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad p = \gamma - \alpha - \beta > -1. \tag{3}$$

При этих условиях многочлены Аппеля определяются формулой Родрига

$$A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}{(\alpha)_n (\beta)_m (1 - x - y)^p} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \, \partial y^m} \left[\frac{(1 - x - y)^{p+n+m}}{x^{1-n-\alpha} y^{1-m-\beta}} \right]. \tag{4}$$

Эти многочлены удовлетворяют дифференциальному уравнению Аппеля

$$x(x - 1)\, u''_{xx} + 2xy\, u''_{xy} + y(y - 1)\, u''_{yy} + \\ + [(\gamma + 1)x - \alpha]\, u'_x + [(\gamma + 1)y - \beta]\, u'_y = \lambda_{nm} u, \tag{5}$$

где

$$\lambda_{nm} = (n + m)(n + m + \gamma). \tag{6}$$

В отличие от простых случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе, уравнение Аппеля (5) не допускает разделения переменных.

В связи с уравнением (5) рассмотрим неоднородное уравнение Аппеля

$$x(x-1)\,u''_{xx} + 2xy\,u''_{xy} + y(y-1)\,u''_{yy} + \\ + [(\gamma+1)x-\alpha]\,u'_x + [(\gamma+1)y-\beta]\,u'_y + cu = f(x,y). \quad (7)$$

Как обычно, вводим разложения

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}A_{nm}(x,y;\alpha,\beta,\gamma), \quad (8)$$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}A_{nm}(x,y;\alpha,\beta,\gamma). \quad (9)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (5), получаем равенства

$$a_{nm}(c+\lambda_{nm}) = b_{nm}, \qquad n,\, m = 0,1,2,\ldots \quad (10)$$

Если сумма в круглых скобках отлична от нуля при любых номерах n и m, то все коэффициенты разложения (8) определяются однозначно. А если при некотором N оказалось $c+\lambda_{nm} = c+N(N+\gamma) = 0$, то коэффициенты a_{nm} с номерами $n = 0,1,\ldots,N$, $m = N-n$ остаются произвольными. Но при этом для разрешимости уравнения (7) должны при тех же номерах выполняться условия $b_{nm} = 0$.

Рассмотрим теперь многочлены Эрмита по двум переменным. Эти многочлены ортогональны по единичному кругу

$$G = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2<1\} \quad (11)$$

с весовой функцией

$$h(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\alpha}, \qquad \alpha > -1. \quad (12)$$

Для этих многочленов справедлива формула Родрига

$$H_{nm}(x,y;\alpha) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}}\,\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\,\partial y^m}[(1-x^2-y^2)^{\alpha+n+m}]. \quad (13)$$

Эти многочлены удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(x^2-1)\,u''_{xx} + 2xy\,u''_{xy} + (y^2-1)\,u''_{yy} + B(x\,u'_x + y\,u'_y) = \lambda_{nm}\,u, \quad (14)$$

где

$$B = 2\alpha+3, \qquad \lambda_{nm} = (n+m)(n+m+B-1). \quad (15)$$

Следовательно, в единичном круге можно рассматривать неоднородное уравнение Эрмита

$$(x^2-1)\,u''_{xx} + 2xy\,u''_{xy} + (y^2-1)\,u''_{yy} + B(x\,u'_x + y\,u'_y) + c\,u = \varphi(x,y). \quad (16)$$

Вводя разложения

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}H_{nm}(x,y;\alpha), \quad (17)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} H_{nm}(x, y; \alpha), \tag{18}$$

приходим к равенствам

$$a_{nm}(c + \lambda_{nm}) = a_{nm}[c + (n+m)(n+m+B-1)] = b_{nm}, \tag{19}$$

анализ которых проводится, как и в случае многочленов Аппеля.

Рассмотрим еще одну систему ортогональных многочленов по двум переменным.

Пусть область ортогональности есть половина первого координатного угла

$$G = \{(x, y)\colon\ y > 0,\ x - y > 0\}. \tag{20}$$

В этой области вводим весовую функцию

$$h(x, y) = y^{\alpha}(x-y)^{\beta} e^{\gamma x}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma < 0. \tag{21}$$

Соответствующие ортогональные многочлены определяются формулой Родрига

$$B_{nk}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\, \partial y^k} [y^{\alpha+k}(x-y)^{\beta+n} e^{\gamma x}], \tag{22}$$

где $n = 0, 1, \ldots,\ k = 0, 1, \ldots, n$.

Нетрудно доказать, что многочлен (22) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x\, u''_{xx} + 2y\, u''_{xy} + y u''_{yy} + (\gamma x + \alpha + \beta + 2)\, u'_x + (\gamma y + \alpha + 1)\, u'_y = \lambda_n\, u, \tag{23}$$

где $\lambda_n = n\gamma$. Следовательно, можно рассматривать неоднородное уравнение

$$x\, u''_{xx} + 2y\, u''_{xy} + y\, u''_{yy} + (\gamma x + \alpha + \beta + 2)\, u'_x + \\ + (\gamma y + \alpha + 1)\, u'_y + c\, u = \psi(x, y). \tag{24}$$

Далее, вводим два разложения:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} B_{nk}(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \tag{25}$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{nk} B_{nk}(x, y; \alpha, \beta, \gamma). \tag{26}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (24), находим условия

$$a_{nk}(c + \lambda_n) = a_{nk}(c + n\gamma) = b_{nk}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Если $c + n\gamma \neq 0$ при всяком n, то все коэффициенты разложения (25) определяются однозначно. А если $c = -N\gamma$, то $N + 1$

коэффициентов разложения (25) остаются произвольными, но для разрешимости уравнения (24) должны выполняться условия $b_{Nk} = 0$, где $k = 0, 1, \ldots, N$.

Из результатов предыдущего и настоящего параграфов следует, что необходимо рассматривать условия, при которых произвольная функция двух переменных разлагается в ряд Фурье по ортогональным многочленам двух переменных. Этот вопрос не совсем ясен даже в простейших случаях, когда рассматриваются различные произведения классических ортогональных многочленов по разным переменным. Даже в этих простейших случаях можно рассматривать скорость сходимости внутри области, весовую сходимость, а также условия равномерной сходимости во всякой замкнутой ограниченной части области ортогональности. Было бы интересно рассмотреть случаи, когда разлагаемая функция непрерывно дифференцируема в замкнутой области ортогональности и, конечно, с некоторым условием на бесконечности.

Глава XII

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Модули непрерывности и условия Липшица

Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности она и равномерно непрерывна на этом сегменте. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, f)$, что из условия $|t - x| < \delta$ следует неравенство

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon, \qquad x, t \in [a, b], \tag{1}$$

каковы бы ни были точки x и t из сегмента $[a, b]$. Иными словами, значения функции $f(x)$ и $f(t)$ отличаются очень мало, если точки x и t достаточно близки друг к другу. Величина $\delta = \delta(\varepsilon, f)$ характеризует степень непрерывности функции $f(x)$ на всем сегменте $[a, b]$.

Но более удобной характеристикой непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ является ее *модуль непрерывности*

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|t-x| \leqslant \delta} |f(t) - f(x)|, \tag{2}$$

где верхняя грань берется по множеству значений x и t из сегмента $[a, b]$ при условии $|t - x| \leqslant \delta$. Эта величина (2) показывает, насколько могут различаться значения функции $f(x)$ в точках x и t, которые отстоят одна от другой не более чем на δ.

Рассмотрим несколько самых простых свойств модуля непрерывности.

1. Если в формуле (2) увеличить δ, то расширится множество допустимых значений x и t. Поэтому может лишь расшириться и множество значений величины $|f(t) - f(x)|$. Следовательно, при возрастании δ величина $\omega(\delta; f)$ не убывает. И соответственно при убывании δ величина (2) не возрастает.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) = 0. \tag{3}$$

В самом деле, в силу неравенства (1) разность (2) может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом δ. А это и означает, что выполняется условие (3). И обратно, из условия (3) следует равномерная непрерывность функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

3. Для любого натурального n выполняется неравенство

$$\omega(n\delta; f) \leqslant n\omega(\delta; f). \tag{4}$$

Действительно, если две точки x и t удовлетворяют условию $|t - x| \leqslant n\delta$, то, разделив сегмент $[x, t]$ на n равных частей точками $\{x_k\}$, из равенства

$$f(t) - f(x) = [f(x_1) - f(x)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + [f(t) - f(x_{n-1})],$$

учитывая условие для точек деления $|x_k - x_{k-1}| \leqslant \delta$, находим

$$|f(t) - f(x)| \leqslant n\,\omega(\delta; f).$$

Следовательно, неравенство (4) доказано.

4. Если $\lambda > 0$, то имеет место неравенство

$$\omega(\lambda\delta; f) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta; f). \tag{5}$$

В самом деле, пусть n есть целая часть числа λ, т. е. $n \leqslant \lambda < n + 1$. Тогда в силу монотонности модуля непрерывности и условия (4) имеем

$$\omega(\lambda\delta; f) \leqslant \omega[(n+1)\delta; f] \leqslant (n+1)\,\omega(\delta; f) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta; f).$$

Таким образом, неравенство (5) доказано.

Для конкретных функций $f(x)$ модуль непрерывности (2) может быть сложной функцией от δ. И хотя эта функция непрерывна и равна нулю в начале координат, но убывание ее к нулю может быть произвольно медленным. Поэтому представляют интерес такие классы функций, для которых величина $\omega(\delta; f)$ убывает к нулю с определенной скоростью. Простейшими примерами таких классов функций являются классы Липшица.

Обозначим через $\mathrm{Lip}(1, M)$ множество функций, удовлетворяющих на сегменте $[a, b]$ *условию Липшица*

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M|t - x|, \qquad x, t \in [a, b]. \tag{6}$$

Для функций этого класса, используя определение (2), находим неравенство

$$\omega(\delta; f) \leqslant M\delta. \tag{7}$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$, причем ее производная удовлетворяет условию

$$|f'(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a, b], \tag{8}$$

то $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, M)$. В самом деле, по теореме Лагранжа о среднем значении, используя (8), находим

$$|f(t) - f(x)| = |f'(\xi)(t - x)| \leqslant M|t - x|.$$

Более того, непрерывная функция $f(x)$ входит в класс $\mathrm{Lip}(1, M)$, если она дифференцируема на интервале (a, b) всюду, кроме конечного числа точек, причем условие (8) должно выполняться во всех

точках дифференцируемости функции. В самом деле, пусть на интервале (x, t) производная $f'(x)$ не существует в точках $\{a_k\}$, причем имеем $x < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < t$. Тогда к каждому из сегментов $[x, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_m, t]$ можно применить теорему Лагранжа о среднем значении. В результате получим

$$|f(t) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(t) - f(a_m)| + |f(a_m) - f(a_{m-1})| + \ldots + |f(a_1) - f(x)| =$$
$$= |f'(\xi_m)|(t - a_m) + |f'(\xi_{m-1})|(a_m - a_{m-1}) + \ldots + |f'(\xi_0)|(a_1 - x) \leqslant$$
$$\leqslant M|t - x|.$$

Таким образом, функция $f(x)$ не имеет производной в отдельных точках $\{a_k\}$, но условие (6) выполняется. Отсюда следует, что принадлежность функции $f(x)$ классу $\mathrm{Lip}(1, M)$ на сегменте $[a, b]$ не гарантирует дифференцируемость этой функции во всех точках этого сегмента.

С другой стороны, если функция $F(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ и входит в класс $\mathrm{Lip}(1, M)$ на сегменте $[a, b]$, то необходимо $|F'(x_0)| \leqslant M$. В самом деле, в этой точке имеем

$$|F'(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant M.$$

Из этого факта следует, что не может принадлежать классу $\mathrm{Lip}(1, M)$ такая функция $\psi(x)$, которая непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема на интервале, но ее производная не ограничена на всем интервале. Например, функция $\psi(x) = x^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, не входит в класс $\mathrm{Lip}(1, M)$ на сегменте $[0, 1]$ ни при каком M. В самом деле, производная $\psi'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ не ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Далее, обобщая класс функций $\mathrm{Lip}(1, M)$, для которых выполняется неравенство (6), введем множество функций $\mathrm{Lip}(\alpha, M)$, удовлетворяющих условию

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M|t - x|^\alpha, \qquad x, t \in [a, b], \quad \alpha > 0. \tag{9}$$

Условие (9) называется *условием Липшица* порядка $\alpha > 0$.

Во многих случаях при использовании условия (9) величина M не играет существенной роли. Тогда вместо $\mathrm{Lip}(\alpha, M)$ пишут короче: $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Функции класса $\mathrm{Lip}(\alpha, M)$ являются, конечно, равномерно непрерывными на сегменте $[a, b]$. При этом неравенство (9) можно рассматривать как условие сильной непрерывности функции на сегменте, ибо в этом неравенстве приращение функции оценивается непосредственно через приращение аргумента в степени α.

Для модуля непрерывности функции класса $\mathrm{Lip}(\alpha, M)$ аналогично (7) имеем оценку

$$\omega(\delta; f) \leqslant M\delta^\alpha. \tag{10}$$

Очевидно, что неравенства (9) и (10) эквивалентны.

Если в условии (9) считать $\alpha > 1$, то в любой точке x имеем неравенство

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| \leqslant M|t-x|^{\alpha-1}.$$

Устремляя здесь $t \to x$, находим $f'(x) \equiv 0$. Таким образом, если $f(x) \in \in \operatorname{Lip}(\alpha, M)$, где $\alpha > 1$, то эта функция есть тождественное постоянное. Поэтому представляют интерес классы Липшица $\operatorname{Lip}(\alpha, M)$ лишь при условии $0 < \alpha \leqslant 1$.

Докажем, что функция $\psi(x) = x^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, входит в класс $\operatorname{Lip}(\alpha, 1)$ на сегменте $[0,1]$. В самом деле, считая x постоянным и применяя формулу Коши о среднем значении, при $0 \leqslant x < \xi < t \leqslant 1$ получаем

$$0 \leqslant \frac{t^\alpha - x^\alpha}{(t-x)^\alpha} = \frac{\alpha\xi^{\alpha-1}}{\alpha(\xi-x)^{\alpha-1}} = \frac{(\xi-x)^{1-\alpha}}{\xi^{1-\alpha}} = \left(1-\frac{x}{\xi}\right)^{1-\alpha} \leqslant 1.$$

С другой стороны, при фиксированном $\alpha < 1$ функция $\psi(x) = x^\alpha$ не входит в класс $\operatorname{Lip}(\beta, M)$, где $\beta > \alpha$.

Действительно, если бы выполнялось условие

$$|\psi(t) - \psi(x)| \leqslant M|t-x|^\beta, \qquad x, t \in [0,1],$$

то, полагая в нем $x = 0$, получили бы неравенство $t^\alpha \leqslant Mt^\beta$, которое при $t \to 0$ невозможно, ибо $\beta > \alpha$.

В самом общем случае: если $\alpha < \beta$, то имеет место включение $\operatorname{Lip}\alpha \supset \operatorname{Lip}\beta$. Иными словами, при уменьшении показателя в условии Липшица класс функций расширяется. В самом деле, если $f(x) \in \in \operatorname{Lip}(\beta, M)$, то имеем

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M|t-x|^\beta = M|t-x|^{\beta-\alpha}|t-x|^\alpha \leqslant MK|t-x|^\alpha,$$

где

$$K = \max_{t,x\in[a,b]} |t-x|^{\beta-\alpha} = (b-a)^{\beta-\alpha}.$$

Таким образом, чем больше показатель α в условии Липшица, тем уже класс $\operatorname{Lip}(\alpha, M)$ и тем быстрее убывает к нулю модуль непрерывности $\omega(\delta; f)$ каждой функции этого класса. При этом скорость убывания модуля непрерывности максимальна при $\alpha = 1$.

Для классификации малых скоростей убывания модулей непрерывности вводится *условие Дини–Липшица*

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M(-\ln|t-x|)^{-\gamma}, \qquad t, x \in [a,b], \tag{11}$$

где $\gamma > 0$ и $|t-x| < 1$. Класс таких функций обозначается через $D\operatorname{Lip}(\gamma, M)$. Из условия (11) имеем

$$\omega(\delta; f) \leqslant M(-\ln\delta)^{-\gamma}, \qquad 0 < \delta < 1. \tag{12}$$

Далее, в теории тригонометрических рядов Фурье часто применяется *условие Дини* на модуль непрерывности

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta; f)\ln\frac{1}{\delta} = 0. \tag{13}$$

Например, при выполнении условия (13) периодическая функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд Фурье, сходящийся равномерно на всей оси. Условие Дини (13) выполняется, если в неравенстве (12) положить $\gamma > 1$.

Если через D обозначить класс функций, удовлетворяющих условию Дини (13), то получим схему вложения классов функций

$$D\,\mathrm{Lip}\,\lambda \supset D \supset D\,\mathrm{Lip}\,\gamma \supset \mathrm{Lip}\,\alpha \supset \mathrm{Lip}\,\beta.$$

Эта схема справедлива при условиях

$$0 < \lambda \leqslant 1 < \gamma, \qquad 0 < \alpha < \beta \leqslant 1.$$

В теории приближения функций часто любое из вышеперечисленных условий налагается не на саму функцию $f(x)$, а на ее производную некоторого порядка p. В таком случае для соответствующих классов функций вводятся другие обозначения. Например, через $W(p,\alpha,M)$ обозначается класс функций, непрерывно дифференцируемых p раз, причем $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$. Впрочем, для этого же класса применяется и более громоздкое обозначение $W^{(p)}H^{(\alpha)}(M)$.

§ 2. Многочлены наилучшего равномерного приближения

Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a,b]$, то по известной теореме Вейерштрасса для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой алгебраический многочлен $F_n(x)$, что имеет место неравенство

$$|f(x) - F_n(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [a,b]. \tag{1}$$

Поскольку такое неравенство можно записать для каждого числа из последовательности $\{\varepsilon_m\}$, монотонно сходящейся к нулю, то соответствующая последовательность многочленов $\{F_m(x)\}$ (где m есть номер многочлена, а не его степень) сходится равномерно к функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, т. е. имеем

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - F_m(x)| = 0. \tag{2}$$

Теорема Вейерштрасса была опубликована в 1885 г. Но задолго до этого, начиная примерно с 1853 г., вопросы равномерного приближения непрерывных функций алгебраическими многочленами подробно исследовал великий русский математик П.Л. Чебышев. Он ввел многочлены наилучшего равномерного приближения и изучил их свойства.

В пространстве $C[a,b]$ функций, непрерывных на конечном сегменте $[a,b]$, в качестве нормы принимается величина

$$||f|| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{3}$$

Эта величина часто называется *чебышевской нормой* в пространстве $C[a, b]$. Для произвольных функций из класса $C[a, b]$ и постоянной $c > 0$ из определения (3) имеем

$$||cf|| = c||f||, \qquad c > 0, \tag{4}$$

$$||f + F|| \leqslant ||f|| + ||F||. \tag{5}$$

Далее, используя (5), находим неравенства

$$||f|| = ||f - F + F|| \leqslant ||f - F|| + ||F||,$$

$$||F|| = ||F - f + f|| \leqslant ||F - f|| + ||f||,$$

из которых следует оценка

$$|\,||f|| - ||F||\,| \leqslant ||f - F||. \tag{6}$$

Обозначим через W_n множество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Каждый многочлен из класса W_n можно представить в виде

$$F_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n. \tag{7}$$

В соответствии с формулой (3) в качестве уклонения этого многочлена от функции $f(x)$ принимается величина

$$||f - F_n|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - F_n(x)|. \tag{8}$$

Эта величина называется *чебышевским уклонением многочлена* $F_n(x)$ от функции $f(x)$ или *чебышевским приближением* функции $f(x)$ многочленом $F_n(x)$. В силу формулы (7) уклонение (8) зависит от выбора коэффициентов $\{c_k\}$ этого многочлена. Эту зависимость можно представить в виде некоторой сложной функции

$$||f - F_n|| = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n). \tag{9}$$

При этом возникает естественный вопрос: нельзя ли выбрать коэффициенты многочлена (7) таким образом, чтобы уклонение (9) было наименьшим? Иными словами, ставится задача отыскания минимума функции (9), которая зависит от $n + 1$ переменных $\{c_k\}$.

Прежде всего заметим, что можно ввести точную нижнюю границу величины (9) при варьировании чисел $\{c_k\}$. Ввиду неотрицательности уклонения (8) эта нижняя грань существует. Вводим для нее обозначение

$$E_n(f) = \inf_{F_n \in W_n} ||f - F_n||. \tag{10}$$

Здесь нижняя грань берется по множеству всех многочленов степени не более n.

Величина (10) называется *наилучшим приближением функции* $f(x)$ *многочленами* из класса W_n или наименьшим уклонением класса W_n от функции $f(x)$. Иногда для краткости величину $E_n(f)$ называется *наилучшим приближением функции* $f(x)$ *порядка* n.

Определение (10) имеет смысл при любом $n \geqslant 0$. Следовательно, всякой непрерывной функции $f(x)$ ставится в соответствие последовательность ее наилучших приближений $\{E_n(f)\}$. Так как справедливо включение $W_n \subset W_{n+1}$, то эта последовательность не возрастает. А в силу соотношений (1) и (2) эта последовательность сходится к нулю. Следовательно, имеем

$$E_0(f) \geqslant E_1(f) \geqslant \ldots \geqslant E_n(f) \geqslant E_{n+1}(f) \geqslant \ldots, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0. \tag{12}$$

Многочлен $Q_n(x) \in W_n$, для которого выполняется условие

$$E_n(f) = \|f - Q_n\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_n(x)|, \tag{13}$$

называется *многочленом наилучшего равномерного приближения* функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ или *многочленом, наименее уклоняющимся от функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$.

Теорема 12.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то при каждом n в классе многочленов W_n существует многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на $[a,b]$, т. е. такой многочлен $Q_n(x)$, для которого выполняется условие* (13).

Доказательство. Прежде всего докажем, что функция (9) как функция $n+1$ переменных коэффициентов $\{c_k\}$ непрерывна. В самом деле, если взять другой многочлен $R_n(x)$ с коэффициентами $\{b_k\}$, то в силу неравенства (6) имеем

$$\begin{aligned}|\Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n) - \Phi(b_0, b_1, \ldots, b_n)| = \big|\,\|f - F_n\| - \|f - R_n\|\,\big| \leqslant \\ \leqslant \|(f - F_n) - (f - R_n)\| = \|R_n - F_n\| = \\ = \max_{x\in[a,b]} |(b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)x + \ldots + (b_n - c_n)x^n|.\end{aligned} \tag{14}$$

Число n здесь фиксировано. Поэтому, если ввести обозначения

$$m_k = \max_{x\in[a,b]} |x^k|, \qquad M_n = \max\{1, m_1, m_2, \ldots, m_n\},$$

то из (14) получим неравенство

$$|\Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n) - \Phi(b_0, b_1, \ldots, b_n)| \leqslant M_n \sum_{k=0}^{n} |b_k - c_k|.$$

Из этого неравенства и следует непрерывность функции (9) в любой точке $(n+1)$-мерного пространства коэффициентов.

Далее, по второй теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях всякая непрерывная функция достигает в некоторой точке своего минимума, если область изменения ее $n+1$ переменных ограничена и замкнута. Но в данном случае переменные $c_0, c_1, \ldots, c_n$, на первый взгляд, могут принимать любые значения, в том числе сколь угодно

большие. Поэтому без дополнительных пояснений вторую теорему Вейерштрасса здесь применять нельзя.

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициенты многочлена (7) удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 = 1. \tag{15}$$

В этом случае функция Φ определена на единичной сфере пространства $n+1$ измерений. И вторую теорему Вейерштрасса применять можно. Поэтому существует такой многочлен $A_n(x)$ с коэффициентами $\{a_k\}$, что при условии (15) выполняются равенства

$$\|f - A_n\| = \inf_{\{c_k\}} \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

В частности, можно рассматривать случай, когда $f(x) \equiv 0$. Тогда существует такой многочлен $D_n(x)$, для которого норма $\|D_n\|$ при условии (15) имеет минимум, т. е. имеем

$$\|F_n\| \geqslant \|D_n\| = \delta_n > 0. \tag{16}$$

Здесь величина δ_n положительна, ибо хотя бы один из коэффициентов многочлена $D_n(x)$ в силу (15) отличен от нуля.

Пусть теперь $\{c_k\}$ — произвольная система $n+1$ действительных чисел. Введем обозначение

$$c^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k^2. \tag{17}$$

Тогда коэффициенты многочлена $(1/c)F_n(x)$ удовлетворяют условию (15). Поэтому при любой системе коэффициентов $\{c_k\}$ в силу (16) справедливо неравенство

$$\left\|\frac{1}{c}\, F_n\right\| \geqslant \delta_n > 0.$$

Далее, используя (4) и (6), при достаточно больших c находим

$$\Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \|f - F_n\| \geqslant c\left\|\frac{1}{c}\, F_n\right\| - \|f\| \geqslant c\delta_n - \|f\|. \tag{18}$$

Здесь величина δ_n не зависит от выбора чисел $\{c_k\}$. Так как величину c можно выбрать сколь угодно большой, то левая часть неравенства (18) также может быть сколь угодно большой. Следовательно, если мы хотим определить минимум функции $\Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, то можно заранее ограничиться случаем, когда величина (17) для данного многочлена $F_n(x)$ ограничена, т. е., например, выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant R^2.$$

Иными словами, минимум непрерывной функции $\Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ может быть только в замкнутом $(n+1)$-мерном шаре радиуса R. А вне этого шара в силу неравенства (18) минимума не может быть.

При этих условиях вторую теорему Вейерштрасса применять можно. Следовательно, существует такая система чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n$, что выполняется неравенство

$$\Phi(c_0, c_1, \ldots, c_n) \geqslant \Phi(b_0, b_1, \ldots, b_n).$$

А это означает, что существует многочлен наилучшего равномерного приближения

$$Q_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n,$$

для которого выполняется условие (13).

Таким образом, теорема 12.1 доказана.

Аналогичные определения и утверждения имеют место, если ввести множество непрерывных периодических функций $C(2\pi)$ и для каждой функции $f(x) \in C(2\pi)$ рассматривать тригонометрические полиномы равномерного приближения.

Обозначим через $W_n(2\pi)$ множество тригонометрических полиномов порядка не выше n, т. е. множество полиномов вида

$$\Psi_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)). \tag{19}$$

Каждый такой полином содержит $2n + 1$ коэффициентов и имеет не более $2n$ действительных нулей с учетом их кратностей, причем, конечно, имеются в виду существенно различные нули, т. е. такие нули, которые не сводятся один к другому прибавлением или вычитанием числа, кратного периоду 2π.

Для непрерывной и периодической с периодом 2π функции $f(x)$ аналогично (8) вводится величина

$$||f - \Psi_n|| = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \Psi_n(x)|. \tag{20}$$

А вместо (9) здесь получается функция $2n + 1$ переменных

$$||f - \Psi_n|| = \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n). \tag{21}$$

Далее, при каждом n вводим наилучшее тригонометрическое приближение

$$E_n(f, 2\pi) = \inf_{\Psi_n \in W_n(2\pi)} ||f - \Psi_n||. \tag{22}$$

Аналогично алгебраическому случаю находим, что последовательность $\{E_n(f, 2\pi)\}$ не возрастает и сходится к нулю.

Функция (21) имеет минимум в некоторой конечной точке. И, следовательно, существует *тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения* $\Gamma_n(x)$, для которого выполняется условие

$$E_n(f, 2\pi) = ||f - \Gamma_n|| = \inf_{\Psi_n \in W_n(2\pi)} ||f - \Psi_n||. \tag{23}$$

Доказательство этого утверждения аналогично приведенному выше доказательству в алгебраическом случае.

Нетрудно видеть, что произведение двух тригонометрических полиномов $A_n(x)$ и $B_m(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $n+m$. В самом деле, после перемножения этих двух полиномов получим слагаемые вида

$$\sin(kx)\cos(px), \quad \sin(kx)\sin(px), \quad \cos(kx)\cos(px)$$

с некоторыми коэффициентами. А эти произведения можно преобразовать в алгебраические суммы синусов и косинусов кратных значений аргумента. В частности, имеем формулу

$$\cos^n x = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \cos(kx), \qquad \alpha_n^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{24}$$

Левую часть этой формулы можно рассматривать как произведение n тригонометрических полиномов.

Докажем, что имеет место в некотором смысле и обратное формуле (24) равенство

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \cos^k x. \tag{25}$$

В самом деле, при $n = 1, 2$ это равенство очевидно. Допустим, что оно верно для всех номеров не более n. Тогда с помощью равенства

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x \cos(nx)$$

находим

$$\cos(n+1)x = 2\cos x\left[2^{n-1}\cos^n x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \cos^k x\right] - \\ - 2^{n-2}\cos^{n-1} x - \sum_{k=0}^{n-2} a_k^{(n-1)} \cos^k x = 2^n \cos^{n+1} x + \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n+1)} \cos^k x. \tag{26}$$

Этим формула (25) доказана.

§ 3. Теоремы Чебышева об альтернансе

В предыдущем параграфе было доказано, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то при каждом n существует алгебраический многочлен $Q_n(x)$ степени не более n, удовлетворяющий условию

$$E_n(f) = \|f - Q_n\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_n(x)|.$$

Поскольку функция $f(x)$ и многочлен $Q_n(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a, b]$, для которой имеет место равенство

$$|f(x_0) - Q_n(x_0)| = E_n(f).$$

Такая точка x_0 называется *точкой максимального уклонения* многочлена $Q_n(x)$ от функции $f(x)$. В точках максимального уклонения выполняется одно из следующих равенств:

$$f(x_k) - Q_n(x_k) = E_n(f), \tag{1}$$

$$f(x_s) - Q_n(x_s) = -E_n(f). \tag{2}$$

Точки максимального уклонения, в которых выполняется условие (1), называются *точками первого рода*, а в случае условия (2) — *точками второго рода*. Докажем, что при любом n существуют точки и первого, и второго рода.

Пусть, например, точка максимального уклонения, которая всегда существует (по крайней мере одна), есть точка первого рода. Предположим, что точек второго рода нет. Тогда при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) - Q_n(x) > -E_n(f)$. Поскольку разность $f(x) - Q_n(x)$ есть непрерывная функция, то она достигает своего минимума на сегменте $[a, b]$, и этот минимум больше величины $-E_n(f)$. Следовательно, существует такое $h > 0$, что имеет место неравенство

$$-E_n(f) + 2h \leqslant f(x) - Q_n(x) \leqslant E_n(f), \qquad x \in [a, b].$$

Из этого неравенства находим

$$-E_n(f) + h \leqslant f(x) - [Q_n(x) + h] \leqslant E_n(f) - h.$$

Следовательно, многочлен $Q_n(x) + h$ уклоняется от функции $f(x)$ на величину $E_n(f) - h < E_n(f)$. Но это невозможно, ибо $E_n(f)$ есть наилучшее приближение порядка n. Поэтому существует хотя бы одна точка второго рода. Аналогичным образом ведет к противоречию и предположение об отсутствии точек первого рода.

Таким образом, при любом n существуют точки первого рода и точки второго рода.

Обозначим через $M_n(f)$ множество всех точек максимального уклонения многочлена наилучшего приближения $Q_n(x)$. Возникает естественный вопрос: а сколько всего может быть точек максимального уклонения? П.Л. Чебышев доказал, что во множестве $M_n(f)$ содержится по крайней мере $n + 2$ точек.

Теорема 12.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то при любом n множество $M_n(f)$ содержит по крайней мере $n + 2$ точек, которые можно упорядочить с помощью неравенств*

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n+2} \leqslant b \tag{3}$$

таким образом, что в любых двух соседних точках уклонения многочлена $Q_n(x)$ от функции $f(x)$ имеют разные знаки, т. е.

$$[f(x_k) - Q_n(x_k)]\,[f(x_{k+1}) - Q_n(x_{k+1})] < 0. \tag{4}$$

Доказательство. Разобъем сегмент $[a, b]$ на N равных частей точками $\{a_k\}$. При этом число N выберем настолько большим,

чтобы на каждом из сегментов

$$[a, a_1],\ [a_1, a_2],\ \ldots,\ [a_k, a_{k+1}],\ \ldots,\ [a_{N-1}, b] \tag{5}$$

колебание функции $f(x) - Q_n(x)$ было меньше $(1/2)E_n(f)$.

Некоторый сегмент $[a_k, a_{k+1}]$ из системы сегментов (5) назовем *сегментом первого рода*, если он содержит хотя бы одну точку первого рода из множества $M_n(f)$. Аналогично сегмент $[a_s, a_{s+1}]$ назовем *сегментом второго рода*, если он содержит хотя бы одну точку второго рода из $M_n(f)$.

Разумеется, в системе (5) могут быть сегменты, которые вообще не содержат точек из множества $M_n(f)$. Поэтому из системы (5) выделим в том же порядке все сегменты первого и второго рода и занумеруем их снова в виде

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_k,\ \ldots,\ \Delta_p. \tag{6}$$

Предположим для определенности, что Δ_1 есть сегмент первого рода, а за ним в системе (6) непосредственно идут также сегменты первого рода:

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{k_1}. \tag{7}$$

Затем выписываем все следующие за ними подряд сегменты второго рода:

$$\Delta_{k_1+1},\ \Delta_{k_1+2},\ \ldots,\ \Delta_{k_2}. \tag{8}$$

Далее пойдет снова группа сегментов первого рода и т. д. Наконец, последней будет некоторая группа сегментов тоже одного рода:

$$\Delta_{k_{m-1}+1},\ \Delta_{k_{m-1}+2},\ \ldots,\ \Delta_{k_m}, \qquad k_m = p.$$

Таким образом, всего оказалось m групп сегментов вида (7) и (8). При этом в каждой группе собраны сегменты одного рода. И, самое главное, не исключается случай, когда вся группа сегментов состоит из одного сегмента.

Если $m \geqslant n+2$, то теорема доказана, ибо при переходе от одной группы сегментов к другой разность $f(x) - Q_n(x)$ меняет знак. И существование системы точек (3) с условием (4) доказано.

Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $m < n+2$. Докажем, что этот случай невозможен, т. е. предположение $m < n+2$ ведет к противоречию.

Прежде всего заметим, что на каждом сегменте Δ_k из системы (6) колебание разности $f(x) - Q_n(x)$ меньше $(1/2)E_n(f)$. Следовательно, на каждом из сегментов (6) разность $f(x) - Q_n(x)$ не обращается в нуль и сохраняет знак. Поэтому на соседних сегментах Δ_{k_s} и Δ_{k_s+1}, входящих в разные группы, величина $f(x) - Q_n(x)$ имеет разные знаки. Следовательно, крайние сегменты из двух соседних групп, ближайшие один к другому, не имеют общих точек. Поэтому между сегментами Δ_{k_s} и Δ_{k_s+1} можно выбрать точку b_s, не принадлежащую этим сегментам. Поскольку всего групп сегментов m, то по этим точкам образуем вспомогательный многочлен

$$H_{m-1}(x) = (b_1 - x)(b_2 - x)\ldots(b_{m-1} - x). \tag{9}$$

Так как рассматривается случай $m < n+2$, то $m-1 \leqslant n$. Следовательно, многочлен (9) входит в класс W_n.

Многочлен (9) положителен на всех сегментах первой группы (7), ибо точка b_1 и все остальные точки $\{b_k\}$ расположены правее всех сегментов первой группы. Далее, на сегментах второй группы (8) многочлен (9) отрицателен, ибо из всех $\{b_k\}$ только одна точка b_1 расположена левее всех сегментов второй группы, а все остальные точки — правее. Рассуждая аналогично, найдем, что на всех сегментах какой-либо одной группы многочлен (9) имеет тот же знак, что и разность $f(x) - Q_n(x)$.

С другой стороны, обозначим через ε_n максимум величины

$$|f(x) - Q_n(x)|$$

на сегментах, не содержащих точек из $M_n(f)$, т. е. на сегментах, не вошедших в систему (6). В силу построения сегментов (5) имеем

$$\varepsilon_n < E_n(f).$$

Далее, вводим обозначение

$$H = \max |H_{m-1}(x)|$$

при $x \in [a, b]$. Тогда выберем такое малое число $\lambda > 0$, что выполняются неравенства

$$\lambda H < E_n(f) - \varepsilon_n, \qquad \lambda H < \frac{1}{2}\, E_n(f). \tag{10}$$

А теперь рассмотрим вспомогательный многочлен

$$F_n(x) = Q_n(x) + \lambda H_{m-1}(x).$$

Докажем, что он уклоняется от функции $f(x)$ на всем сегменте $[a, b]$ меньше, чем на $E_n(f)$.

В самом деле, если сегмент $[a_k, a_{k+1}]$ не содержит точек из множества $M_n(f)$, то при $x \in [a_k, a_{k+1}]$ в силу (10) имеем

$$|f(x) - F_n(x)| \leqslant |f(x) - Q_n(x)| + \lambda H \leqslant \varepsilon_n + \lambda H < E_n(f).$$

Если же x принадлежит сегментам первого или второго рода, то величины $f(x) - Q_n(x)$ и $H_{m-1}(x)$ имеют одинаковые знаки. С другой стороны, на каждом из сегментов системы (6) колебание разности $|f(x) - Q_n(x)|$ меньше $(1/2)E_n(f)$. Поэтому имеем

$$|f(x) - Q_n(x)| > \frac{1}{2}\, E_n(f), \qquad x \in \Delta_k.$$

Следовательно, в силу (10) находим

$$|f(x) - Q_n(x)| > \lambda\, |H_{m-1}(x)|, \qquad x \in \Delta_k.$$

Далее, на всех сегментах (6) в силу (9) многочлен $H_{m-1}(x)$ в нуль не обращается, и минимум величины $|H_{m-1}(x)|$ положителен. Поэтому, учитывая приведенные выше неравенства, при $x \in \Delta_k$ получаем

$$|f(x) - F_n(x)| = |[f(x) - Q_n(x)] - \lambda H_{m-1}(x)| =$$
$$= |f(x) - Q_n(x)| - \lambda\, |H_{m-1}(x)| \leqslant E_n(f) - \lambda\, |H_{m-1}(x)| < E_n(f).$$

Таким образом, при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - F_n(x)| < E_n(f).$$

А это невозможно в силу самого определения числа $E_n(f)$. Этим теорема 12.2 доказана.

Заметим, что противоречия не получится, если не делать предположения $m < n + 2$. В самом деле, если $m \geqslant n + 2$, то многочлен $H_{m-1}(x)$ будет иметь степень $m - 1 \geqslant n + 1$ и не войдет в класс W_n.

Рассмотрим геометрический смысл теоремы П.Л. Чебышева. Над сегментом $[a, b]$, помимо графика функции $y = f(x)$, построим еще графики двух функций:

$$y = f(x) + E_n(f), \qquad y = f(x) - E_n(f). \tag{11}$$

Тогда график многочлена наилучшего равномерного приближения $Q_n(x)$ будет расположен между графиками функций (11) и бу-

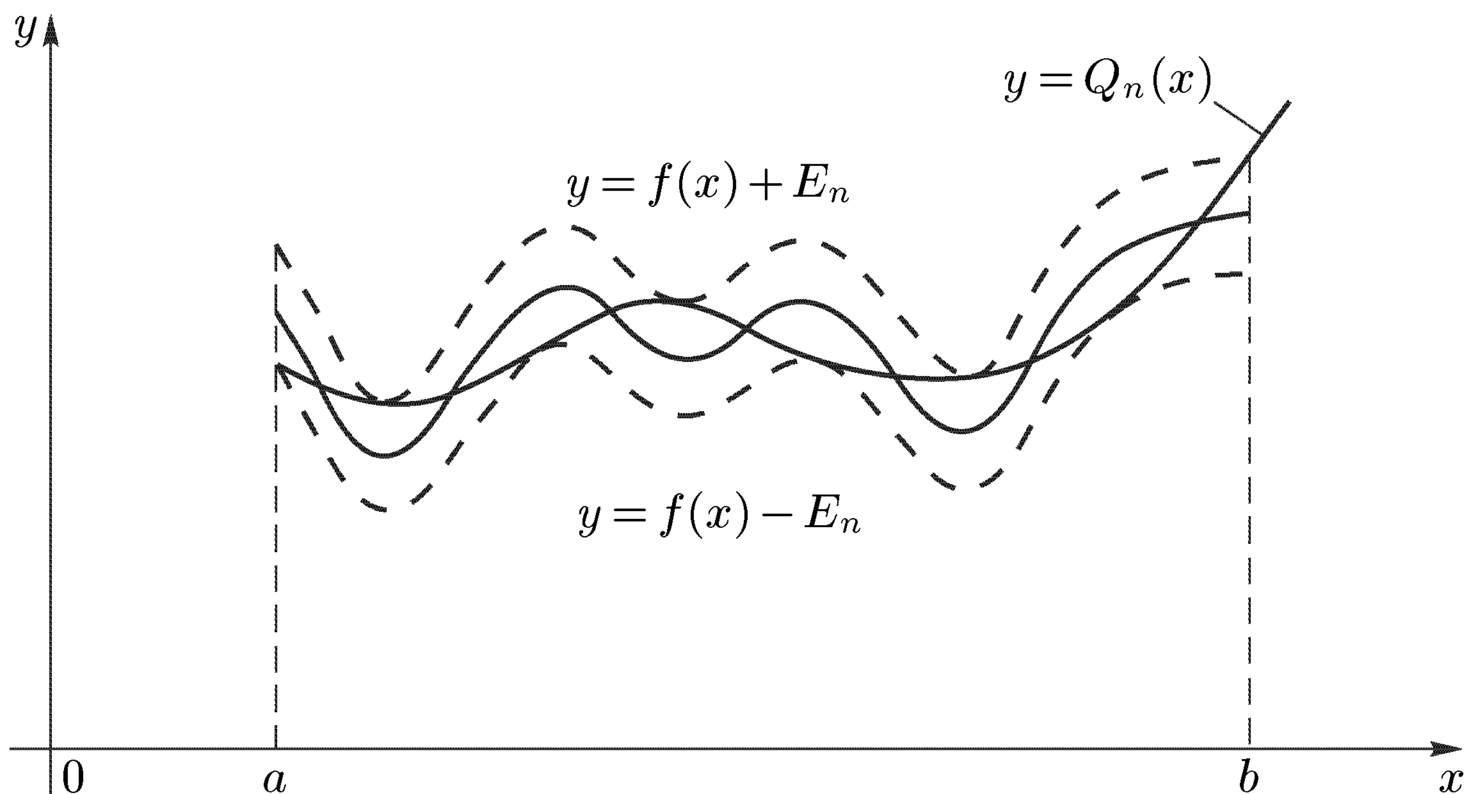


Рис. 12.1

дет попеременно достигать их по крайней мере $n + 2$ раза, касаясь их по крайней мере n раз (рис. 12.1).

Система точек (3), в которых выполняются условия (4), называется *чебышевским альтернансом.*

Теорема 12.3. *При каждом n существует только один многочлен наилучшего равномерного приближения $Q_n(x)$ непрерывной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что нашлись два многочлена наилучшего равномерного приближения, $Q_n(x)$ и $F_n(x)$, для которых выполняются неравенства

$$-E_n(f) \leqslant f(x) - Q_n(x) \leqslant E_n(f), \qquad x \in [a, b],$$

$$-E_n(f) \leqslant f(x) - F_n(x) \leqslant E_n(f), \qquad x \in [a, b].$$

Складывая эти неравенства почленно и деля на 2, получим

$$-E_n(f) \leqslant f(x) - \frac{1}{2}\left[Q_n(x) + F_n(x)\right] \leqslant E_n(f), \qquad x \in [a,b].$$

Следовательно, многочлен

$$R_n(x) = \frac{1}{2}\left[Q_n(x) + F_n(x)\right] \tag{12}$$

также является многочленом наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$.

Пусть $\{x_k\}$ есть чебышевский альтернанс многочлена $R_n(x)$. Если x_k — точка первого рода, то имеем

$$E_n(f) = f(x_k) - R_n(x_k) = \frac{1}{2}\left[f(x_k) - Q_n(x_k)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x_k) - F_n(x_k)\right]. \tag{13}$$

Так как в любом случае имеем $f(x_k) - F_n(x_k) \leqslant E_n(f)$, то из последнего равенства (13) находим $E_n(f) \leqslant f(x_k) - Q_n(x_k)$. Но разность $f(x_k) - Q_n(x_k)$ не может превосходить $E_n(f)$. Следовательно, имеем $f(x_k) - Q_n(x_k) = E_n(f)$. Меняя местами многочлены $Q_n(x)$ и $F_n(x)$, найдем $f(x_k) - F_n(x_k) = E_n(f)$. Аналогично для точек второго рода $\{x_s\}$ многочлена $R_n(x)$ имеем

$$-E_n(f) = f(x_s) - R_n(x_s) = \frac{1}{2}\left[f(x_s) - Q_n(x_s)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x_s) - F_n(x_s)\right].$$

Следовательно, имеем равенства

$$f(x_s) - Q_n(x_s) = f(x_s) - F_n(x_s) = -E_n(f).$$

Таким образом, в точках чебышевского альтернанса многочлена (12) многочлены $Q_n(x)$ и $F_n(x)$ совпадают. Но ведь этих точек не менее $n+2$. Следовательно, многочлены $Q_n(x)$ и $F_n(x)$ тождественны. Этим теорема 12.3 доказана.

Пользуясь теоремой единственности многочлена наилучшего равномерного приближения, мы сейчас докажем, что чебышевский альтернанс является характеристическим признаком многочлена наилучшего приближения.

Теорема 12.4. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, а $F_n(x)$ есть некоторый многочлен порядка не выше n и полагаем*

$$A = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - F_n(x)|. \tag{14}$$

Тогда, если на сегменте $[a,b]$ существует система $n+2$ точек

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n+2} \leqslant b, \tag{15}$$

в которых выполняются условия

$$|f(x_k) - F_n(x_k)| = A,$$

причем разность $f(x_k) - F_n(x_k)$ имеет разные знаки в любых двух

соседних точках (15), *то* $A = E_n(f)$, *а многочлен* $F_n(x)$ *есть многочлен наилучшего равномерного приближения функции* $f(x)$.

Доказательство. Допустим, что $A > E_n(f)$, и пусть, как обычно, $Q_n(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения. Тогда рассмотрим разность

$$Q_n(x_k) - F_n(x_k) = [f(x_k) - F_n(x_k)] - [f(x_k) - Q_n(x_k)]. \tag{16}$$

Так как $|f(x_k) - Q_n(x_k)| \leqslant E_n(f) < A$, то знак разности (16) совпадает со знаком разности $f(x_k) - F_n(x_k)$. А эта последняя разность меняет знак $n+1$ раз. Следовательно, в каждом из интервалов $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n+1}, x_{n+2})$ разность $Q_n(x) - F_n(x)$ имеет по крайней мере один нуль. Но ведь всего интервалов $n+1$, а указанная разность двух многочленов степени не более n есть многочлен степени не более n. Поэтому имеем тождество $Q_n(x) \equiv F_n(x)$, которое противоречит предположению $A > E_n(f)$.

Таким образом, случай $A > E_n(f)$ исключается. А поскольку случай $A < E_n(f)$ тоже невозможен, то остается равенство $A = E_n(f)$, из которого в силу теоремы единственности находим

$$Q_n(x) \equiv F_n(x).$$

Этим теорема 12.4 доказана.

Аналогичные результаты имеют место и для тригонометрических полиномов наилучшего приближения непрерывных периодических функций. В этом случае чебышевский альтернанс тригонометрического полинома наилучшего равномерного приближения порядка n содержит $2n+2$ существенно различных точек. А в остальном и формулировки, и доказательства полностью аналогичны приведенным выше результатам в алгебраическом случае.

В заключение параграфа заметим, что если непрерывная периодическая функция $f(x)$ четна, то ее тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения также является четным, т. е. имеет вид

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx. \tag{17}$$

В самом деле, если в равенстве

$$E_n(f, 2\pi) = \max |f(x) - \Gamma_n(x)| \tag{18}$$

вместо x поставить $-x$, то, используя четность функции $f(x)$, находим

$$E_n(f, 2\pi) = \max |f(-x) - \Gamma_n(-x)| = \max |f(x) - \Gamma_n(-x)|.$$

Поскольку $\Gamma_n(-x)$ есть тригонометрический полином наилучшего приближения, то в силу теоремы единственности имеем $\Gamma_n(x) = \Gamma_n(-x)$. А это и означает, что в разложении полинома $\Gamma_n(x)$ отсутствуют синусы, т. е. имеет место формула (17).

§ 4. Сингулярный интеграл Джексона

В настоящем параграфе рассматривается некоторый интеграл — сингулярный интеграл Джексона, — который зависит от данной периодической функции $f(x)$. Этот интеграл является тригонометрическим полиномом и служит для приближения функции $f(x)$. Но сначала рассмотрим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 12.1. *При любом натуральном n справедливо тождество*

$$\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 = n + 2\,[(n-1)\cos t + (n-2)\cos 2t + \ldots + \cos(n-1)t]. \tag{1}$$

Доказательство. Используя представление разности косинусов через произведение синусов, находим

$$\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,(1-\cos nt) = \\ = \frac{1}{2}\,\{(1-\cos t) + (\cos t - \cos 2t) + \ldots + [\cos(n-1)t - \cos nt]\} = \\ = \left[\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)t}{2}\right]\sin\frac{t}{2}. \tag{2}$$

Для слагаемых в квадратных скобках в силу формулы для разности синусов имеем представления

$$\sin\frac{3t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}\,(1+2\cos t),$$

$$\sin\frac{5t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{5t}{2} - \sin\frac{3t}{2}\right) = \\ = \sin\frac{t}{2}\,(1+2\cos t+2\cos 2t),$$

. . . .

$$\sin\frac{(2n-1)t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \ldots \\ \ldots + \left[\sin\frac{(2n-1)t}{2} - \sin\frac{(2n-3)t}{2}\right] = \\ = \sin\frac{t}{2}\,[1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos(n-1)t].$$

Подставляя эти значения в правую часть равенства (2), получим тождество (1).

Лемма 12.2. *При любом натуральном n имеет место тождество*

$$\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k^{(n)}\cos kt, \tag{3}$$

где $\{c_k\}$ — некоторые коэффициенты, зависящие от k и n.

В самом деле, правая часть тождества (1) есть четный тригонометрический полином порядка $n-1$. После возведения его в квадрат снова получится четный тригонометрический полином, но уже порядка $(2n-2)$.

Лемма 12.3. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = \frac{1}{6}\,n\pi(2n^2+1). \tag{4}$$

Доказательство. Используя тождество (1), находим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left[n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos kt\right]^2 dt =$$

$$= \pi\left[2n^2+4\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2\right] = \pi\left[2n^2+\frac{2}{3}\,(n-1)n(2n-1)\right], \tag{5}$$

ибо имеет место равенство

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{1}{6}\,(n-1)n(2n-1).$$

Далее, преобразуя интеграл в равенстве (5) и вычисляя сумму в квадратных скобках, получим

$$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4 du = 4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = \frac{2}{3}\,\pi n(2n^2+1).$$

Этим равенство (4) доказано.

А теперь рассмотрим очень важное понятие.

Для всякой непрерывной периодической функции $f(x)$ вводится интеграл

$$D_n(x;f) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin\dfrac{n(t-x)}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right]^4 dt. \tag{6}$$

Этот интеграл называется *сингулярным интегралом Джексона*. Для сокращения вычислений будем записывать его в виде

$$D_n(x;f) = A_n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin\dfrac{n(t-x)}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right]^4 dt, \tag{7}$$

где введено обозначение

$$A_n = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}. \tag{8}$$

Теорема 12.5. *Для всякой непрерывной периодической функции $f(x)$ ее сингулярный интеграл Джексона* (6) *есть тригонометрический полином порядка* $2n-2$, *т. е.*

$$D_n(x;f) = a_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{2n-2} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \tag{9}$$

причем полином (9) *четный, если функция* $f(x)$ *четная, и, кроме того,* $a_0^{(n)} = 0$, *если выполняется условие*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Используя формулу (3), находим

$$D_n(x;f) = A_n \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\sum_{k=0}^{2n-2} c_k^{(n)} \cos k(t-x)\Big]\,dt =$$

$$= A_n \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\sum_{k=0}^{2n-2} c_k^{(n)} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\Big]\,dt. \tag{11}$$

Этим формула (9) доказана. Из равенства (11) следует, что если функция $f(t)$ четная, то после интегрирования все слагаемые с синусами обратятся в нуль. А при условии (10) получим $a_0^{(n)} = 0$. Таким образом, теорема 12.5 доказана.

Лемма 12.4. *При любом натуральном* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^{\pi/2} t\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt < \frac{\pi^2 n^2}{4}. \tag{12}$$

В самом деле, на сегменте $[0, \pi/(2n)]$ применяем оценку

$$|\sin nt| \leqslant n\,|\sin t|,$$

которая легко получается индукцией, а на сегменте $[\pi/(2n), \pi/2]$ используем неравенство $\sin t \geqslant 2t/\pi$. В результате получаем

$$\int_0^{\pi/2} t\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt = \int_0^{\pi/(2n)} t\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt + \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} t\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt \leqslant$$

$$\leqslant n^4 \int_0^{\pi/(2n)} t\,dt + \frac{\pi^4}{16}\int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} \frac{dt}{t^3} < n^4\frac{\pi^2}{8n^2} + \frac{\pi^4(2n)^2}{16\cdot 2\pi^2} = \frac{\pi^2 n^2}{4}.$$

Теорема 12.6. *Если $f(x) \in C(2\pi)$ и $\omega(\delta; f)$ — ее модуль непрерывности, то имеет место оценка*

$$|f(x) - D_n(x; f)| \leqslant (3\pi + 1)\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1}; f\Big), \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{13}$$

Доказательство. Прежде всего преобразуем интеграл (7). Заменяя переменное интегрирования по формуле $t = u + x$ и учитывая тот факт, что в силу периодичности подынтегрального выражения пределы интегрирования можно оставить неизменными, получим

$$D_n(x; f) = A_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\Big(\frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}\Big)^4 du.$$

Далее, представляем интеграл по сегменту $[-\pi, \pi]$ в виде суммы двух интегралов по сегментам $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$, причем в первом из них заменяем u на $-u$. В результате этого интеграл Джексона приводится к виду

$$D_n(x; f) = A_n \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]\Big(\frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}\Big)^4 du.$$

А теперь полагая $u = 2t$, приходим к формуле

$$D_n(x; f) = 2A_n \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t)]\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt. \tag{14}$$

С другой стороны, из формул (4) и (8) имеем

$$f(x) = \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} f(x)\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt = 4A_n \int_0^{\pi/2} f(x)\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt.$$

Вычитая из этого равенства почленно равенство (14), находим

$$f(x) - D_n(x; f) = 2A_n \int_0^{\pi/2} [2f(x) - f(x+2t) - f(x-2t)]\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4 dt. \tag{15}$$

Сумма в квадратных скобках под знаком интеграла оценивается через модуль непрерывности функции $f(x)$. В силу (1.2) имеем

$$|f(x) - f(x+2t) + f(x) - f(x-2t)| \leqslant 2\,\omega(2t; f). \tag{16}$$

Далее, в силу четвертого свойства модуля непрерывности (свойство (1.5)) получаем

$$\omega(2t; f) = \omega\Big(\frac{4n-2}{2n-1}\,t; f\Big) \leqslant [(4n-2)t + 1]\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1}; f\Big).$$

Следовательно, из формулы (15), учитывая (16), находим

$$|f(x) - D_n(x;f)| \leqslant 4A_n\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big)\int\limits_0^{\pi/2}[(4n-2)t+1]\Big(\frac{\sin nt}{\sin t}\Big)^4\,dt.$$

Полученный интеграл представляем в виде суммы двух интегралов по слагаемым в квадратных скобках. Первый из них оцениваем с помощью неравенства (12), а второй — в силу формулы (4). В результате, применяя формулу (8), получаем

$$|f(x) - D_n(x;f)| \leqslant 4A_n\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big)\Big[\frac{(4n-2)}{4}\,\pi^2n^2 + \frac{1}{6}\,\pi n(2n^2+1)\Big] =$$
$$= \omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big)\Big[\frac{3(2n^2-n)\pi}{2n^2+1}+1\Big] < \omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big)(3\pi+1).$$

Таким образом, теорема 12.6 доказана.

Поскольку для любой функции $f(x) \in C(2\pi)$ модуль непрерывности $\omega(\delta;f)$ убывает к нулю при $\delta \to 0$, то из неравенства (13) следует теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.

Для постоянной перед модулем непрерывности в неравенстве (13) введем специальное обозначение

$$\beta = 3\pi + 1 < 11. \tag{17}$$

Тогда это неравенство приводится к виду

$$|f(x) - D_n(x;f)| \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big), \qquad x \in (-\infty,\infty). \tag{18}$$

§ 5. Прямые теоремы о наилучших приближениях тригонометрическими полиномами

В настоящем параграфе с помощью сингулярного интеграла Джексона устанавливаются различные оценки сверху для наилучших приближений непрерывных периодических функций.

Т е о р е м а 12.7. *Для всякой функции $f(x) \in C(2\pi)$ имеет место неравенство*

$$E_n(f;2\pi) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{n};f\Big). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку сингулярный интеграл Джексона (4.6) есть тригонометрический полином порядка не выше $2n-2$, то из неравенства (4.18) имеем

$$E_{2n-2}(f;2\pi) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big). \tag{2}$$

Заменяя в этом неравенстве n на $n+1$ и пользуясь свойствами модуля непрерывности, получаем

$$E_{2n}(f;2\pi) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{2n+1};f\Big) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{2n};f\Big).$$

А для нечетных номеров находим

$$E_{2n+1}(f;2\pi) \leqslant E_{2n}(f;2\pi) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{2n+1};f\Big).$$

Таким образом, неравенство (1) доказано.

В частности, если $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$, то в силу неравенства (1.10) имеем

$$E_n(f;2\pi) \leqslant \frac{\beta M}{n^\alpha}. \tag{3}$$

Если же функция $f(x)$ имеет производную, удовлетворяющую условию $|f'(x)| \leqslant M_1$, то вместо (3) справедливо неравенство

$$E_n(f;2\pi) \leqslant \frac{\beta M_1}{n}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь приближения тригонометрическими полиномами без свободного члена, т. е. полиномами вида

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{5}$$

Обозначим через $C_0(2\pi)$ множество непрерывных периодических функций, для которых выполняется условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

В теореме 12.5 доказано, что если $f(x) \in C_0(2\pi)$, то тригонометрический полином Джексона $D_n(x;f)$ не содержит свободного члена. Следовательно, если ввести наилучшее приближение полиномами вида (5)

$$e_n(f;2\pi) = \inf\|f - \Psi_n\|,$$

то в силу (4.18) здесь вместо (2) получим

$$e_{2n-2}(f;2\pi) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{1}{2n-1};f\Big).$$

Следовательно, если $f(x) \in C_0(2\pi)$, то в неравенствах (1), (3) и (4) вместо $E_n(f;2\pi)$ можно поставить величину $e_n(f;2\pi)$.

Л е м м а 12.5. *Если периодическая функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, то справедливо неравенство*

$$E_n(f;2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\,e_n(f';2\pi), \tag{7}$$

причем при условии $f(x) \in C_0(2\pi)$ имеем

$$e_n(f; 2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f'; 2\pi). \tag{8}$$

Доказательство. В силу определения числа $e_n(f'; 2\pi)$ существует такой полином вида (5), для которого имеет место оценка

$$|f'(x) - \Psi_n(x)| \leqslant e_n(f'; 2\pi), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Вводим первообразную от этого полинома:

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,(a_k \sin kx - b_k \cos kx), \tag{9}$$

и вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - v_n(x). \tag{10}$$

Эта функция непрерывно дифференцируема, причем

$$|F'(x)| \leqslant e_n(f'; 2\pi), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Поэтому в силу неравенства (4) имеем

$$E_n(F; 2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f'; 2\pi). \tag{11}$$

А тогда существует такой тригонометрический полином $\Phi_n(x)$ порядка не выше n, что выполняется неравенство

$$|F(x) - \Phi_n(x)| \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f'; 2\pi).$$

Это неравенство в силу (10) можно представить в виде

$$|\, f(x) - [v_n(x) + \Phi_n(x)]\,| \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f'; 2\pi). \tag{12}$$

Этим неравенство (7) доказано, ибо сумма в квадратных скобках есть тригонометрический полином порядка не выше n.

Пусть теперь $f(x) \in C_0(2\pi)$, т. е. выполняется условие (6). Тогда для вспомогательной функции (10), учитывая формулу (9), находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} v_n(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, $F(x) \in C_0(2\pi)$. Следовательно, в левой части неравенства (11) вместо $E_n(F; 2\pi)$ можно поставить $e_n(F; 2\pi)$, откуда следует, что полином $\Phi_n(x)$ не содержит свободного члена. А тогда из (12) получается неравенство (8). Этим лемма 12.5 доказана.

Теорема 12.8. *Если периодическая функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз, то имеет место неравенство*

$$E_n(f; 2\pi) \leqslant \frac{\beta^{p+1}}{n^p}\, \omega\Big(\frac{1}{n}; f^{(p)}\Big), \tag{13}$$

где $\omega(\delta; f^{(p)})$ есть модуль непрерывности производной $f^{(p)}(x)$.

Доказательство. По лемме 12.5 имеем неравенство

$$E_n(f; 2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f'; 2\pi). \tag{14}$$

Далее, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0,$$

то, следовательно, $f'(x) \in C_0(2\pi)$. И поэтому справедливо неравенство

$$e_n(f'; 2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f''; 2\pi).$$

Аналогичным образом получаются неравенства

$$e_n(f''; 2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f'''; 2\pi),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_n(f^{(p-1)}; 2\pi) \leqslant \frac{\beta}{n}\, e_n(f^{(p)}; 2\pi).$$

Наконец, в силу теоремы 12.7 для функций класса $C_0(2\pi)$ имеем оценку

$$e_n(f^{(p)}; 2\pi) \leqslant \beta\, \omega\Big(\frac{1}{n}; f^{(p)}\Big).$$

Учитывая все эти неравенства, из (14) находим (13). Этим теорема 12.8 доказана.

Отметим некоторые частные случаи этой теоремы.

Если последняя производная $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$, то вместо (13) получается неравенство

$$E_n(f; 2\pi) \leqslant \frac{\beta^{p+1}}{n^{p+\alpha}}\, M. \tag{15}$$

Если же существует ограниченная производная порядка $p+1$, т. е. $|f^{(p+1)}(x)| \leqslant M_1$, то имеем

$$E_n(f; 2\pi) \leqslant \frac{\beta^{p+1}}{n^{p+1}}\, M_1. \tag{16}$$

Наконец, если периодическая функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема, то при любом фиксированном p справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n(f; 2\pi) = 0. \tag{17}$$

Из всех этих результатов следует, что чем лучше дифференциальные свойства периодической функции $f(x)$, т. е. чем больше она имеет непрерывных производных, тем быстрее сходится к нулю последовательность ее наилучших приближений $\{E_n(f; 2\pi)\}$.

В теории приближения функций теоремы, в которых устанавливаются оценки сверху для наилучших приближений в зависимости

от дифференциальных и структурных свойств функций, называются *прямыми теоремами о порядке наилучшего приближения.* Такого рода теоремы впервые были установлены американским математиком Дж. Джексоном в 1912 г.

В том же году харьковский математик С.Н. Бернштейн доказал некоторые так называемые *обратные теоремы о порядке наилучшего равномерного приближения.* В этих обратных теоремах из оценок наилучшего приближения выводятся соответствующие дифференциальные и структурные свойства функций. Так, например, одна из теорем С.Н. Бернштейна гласит, что если для наилучших приближений периодической функции $f(x)$ выполняется неравенство (15) при условии $0 < \alpha < 1$, то эта функция непрерывно дифференцируема p раз и ее производная $f^{(p)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α.

Несколько позже С.Н. Бернштейн доказал, что для того чтобы периодическая функция $f(x)$ была аналитической, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$E_n(f; 2\pi) \leqslant cq^n, \qquad c > 0, \quad 0 < q < 1. \tag{18}$$

В заключение параграфа заметим, что постоянная β, определяемая формулой (4.17) и фигурирующая во многих формулах настоящего параграфа, не является наилучшей. Точное неравенство, которое доказывается значительно сложнее, имеет вид

$$E_n(f; 2\pi) < \omega\left(\frac{\pi}{n}; f\right),$$

где постоянная $\beta = 1$ уже не может быть уменьшена. Это доказал Н.П. Корнейчук.

§ 6. Прямые теоремы о наилучших приближениях алгебраическими многочленами

В настоящем параграфе устанавливаются оценки сверху для наилучших приближений непериодических функций алгебраическими многочленами. При этом используются результаты предыдущего параграфа.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$. Введем новое переменное t равенствами

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}, \qquad t = \frac{2x - (a+b)}{b-a}. \tag{1}$$

Когда x изменяется на сегменте $[a, b]$, переменное t изменяется на сегменте $[-1, 1]$. Следовательно, функция

$$\varphi(t) = f\left[\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right] \tag{2}$$

определена и непрерывна на единичном сегменте $[-1,1]$. Поэтому функция

$$\psi(\theta) = \varphi(\cos\theta) = f\left[\frac{(b-a)\cos\theta + (a+b)}{2}\right] \tag{3}$$

непрерывна, четна и имеет период 2π.

Таким образом, каждой функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a,b]$, ставится в соответствие вспомогательная функция $\psi(\theta)$, определяемая формулой (3). Поскольку функция $\psi(\theta)$ непрерывная и периодическая, то для ее наилучших приближений тригонометрическими полиномами справедливы оценки, установленные в предыдущем параграфе.

Лемма 12.6. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a,b]$, *то имеет место равенство*

$$E_n(f) = E_n(\psi; 2\pi). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ имеет вид

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right| \leqslant E_n(f), \qquad x \in [a,b].$$

Заменяя здесь x по формуле (1) и учитывая (2), найдем

$$\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{2^k} \left[(b-a)t + (a+b)\right]^k \right| \leqslant E_n(f).$$

Положим теперь $t = \cos\theta$. Учитывая определение (3), получаем

$$\left| \psi(\theta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{2^k} \left[(b-a)\cos\theta + (a+b)\right]^k \right| \leqslant E_n(f). \tag{5}$$

В силу формулы (2.24) сумма в квадратных скобках в степени k есть тригонометрический полином порядка k. Поэтому вся сумма в левой части (5) есть тригонометрический полином порядка не выше n. Следовательно, из (5) получаем неравенство

$$E_n(\psi; 2\pi) \leqslant E_n(f).$$

Для доказательства обратного неравенства прежде всего заметим, что функция $\psi(\theta)$ периодическая и четная. Поэтому, как отмечено в самом конце § 3, тригонометрический полином наилучшего приближения функции $\psi(\theta)$ является четным. В силу формулы (2.25) этот

полином можно представить в виде

$$\Psi_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\theta = \sum_{m=0}^{n} b_m \cos^m \theta.$$

Так как $\psi(\theta) = \varphi(\cos\theta)$, то имеем неравенство

$$\left| \varphi(\cos\theta) - \sum_{m=0}^{n} b_m \cos^m \theta \right| \leqslant E_n(\psi; 2\pi).$$

Положим здесь $\cos\theta = t$. В результате получим

$$\left| \varphi(t) - \sum_{m=0}^{n} b_m t^m \right| \leqslant E_n(\psi; 2\pi), \qquad t \in [-1, 1].$$

А теперь от t переходим к x по формулам (1). Имеем

$$\left| f(x) - \sum_{m=0}^{n} b_m \left[\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right]^m \right| \leqslant E_n(\psi; 2\pi).$$

Поскольку вся сумма в левой части есть алгебраический многочлен порядка не выше n, то, следовательно, имеем неравенство

$$E_n(f) \leqslant E_n(\psi; 2\pi).$$

Этим лемма 12.6 доказана.

Лемма 12.7. *Если $f(x) \in C[a,b]$, то справедливо неравенство*

$$\omega(\delta; \psi) \leqslant \omega\left(\frac{b-a}{2}\,\delta; f\right). \tag{6}$$

Доказательство. Если $\delta > 0$ фиксировано и $|\theta_2 - \theta_1| \leqslant \delta$, то в силу очевидного неравенства

$$|\cos\theta_2 - \cos\theta_1| \leqslant |\theta_2 - \theta_1| \leqslant \delta$$

имеем

$$|\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1)| = |\varphi(\cos\theta_2) - \varphi(\cos\theta_1)| \leqslant \omega(\delta; \varphi).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\omega(\delta; \psi) \leqslant \omega(\delta; \varphi). \tag{7}$$

Далее, если $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, причем $t_1, t_2 \in [-1, 1]$, то соответствующие точки

$$x_1 = \frac{(b-a)t_1 + (a+b)}{2}, \qquad x_2 = \frac{(b-a)t_2 + (a+b)}{2}$$

принадлежат сегменту $[a, b]$ и удовлетворяют условию $|x_2 - x_1| \leqslant$ $\leqslant (b-a)\delta/2$. Следовательно, имеем неравенство

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \omega\left(\frac{b-a}{2}\,\delta; f\right),$$

из которого находим

$$\omega(\delta;\varphi) \leqslant \omega\Big(\frac{b-a}{2}\,\delta; f\Big). \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получаем (6). Этим лемма 12.7 доказана.

Теорема 12.9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a,b]$, то справедливо неравенство*

$$E_n(f) \leqslant \beta\,\omega\Big(\frac{b-a}{2n}; f\Big). \tag{9}$$

В самом деле, для вспомогательной периодической функции $\psi(\theta)$, определенной равенством (3), в силу (5.1) имеем оценку $E_n(\psi; 2\pi) \leqslant \beta\,\omega(1/n;\psi)$. А затем применяем соотношения (4) и (6). Этим оценка (9) установлена и теорема 12.9 доказана.

В частности, если $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$ на сегменте $[a,b]$, то вместо (9) имеем неравенство

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta}{n^\alpha}\,M\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^\alpha. \tag{10}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a,b]$ ограниченную производную, причем $|f'(x)| \leqslant M_1$, то справедлива оценка

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta}{2n}\,M_1(b-a). \tag{11}$$

Лемма 12.8. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a,b]$, то имеет место неравенство*

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta(b-a)}{2n}\,E_{n-1}(f'). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $Q_{n-1}(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения производной $f'(x)$ на сегменте $[a,b]$, т. е.

$$|f'(x) - Q_{n-1}(x)| \leqslant E_{n-1}(f'), \qquad x \in [a,b]. \tag{13}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \int_a^x Q_{n-1}(t)\,dt. \tag{14}$$

Для этой функции в силу (13) имеем $|F'(x)| \leqslant E_{n-1}(f')$. Поэтому в силу (11) находим

$$E_n(F) \leqslant \frac{\beta}{2n}\,(b-a)E_{n-1}(f').$$

Далее, если $R_n(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения функции $F(x)$, то в силу (14) получаем

$$\bigg|f(x) - \Big[\int_a^x Q_{n-1}(t)\,dt + R_n(x)\Big]\bigg| \leqslant \frac{\beta}{2n}\,(b-a)E_{n-1}(f'). \tag{15}$$

Поскольку сумма в квадратных скобках есть многочлен степени не выше n, то в левой части неравенства (15) можно поставить величину $E_n(f)$. Этим неравенство (12) доказано.

Теорема 12.10. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[a,b]$, то при $n > p$ справедливо неравенство*

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_p}{n^p}\,\omega\Big(\frac{b-a}{2(n-p)};f^{(p)}\Big), \tag{16}$$

где

$$c_p = \frac{\beta^{p+1}}{p!\,2^p}\,p^p(b-a)^p. \tag{17}$$

Доказательство. Неравенство (12) здесь можно применить p раз. В результате находим последовательно

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta}{2n}\,(b-a)E_{n-1}(f'),$$

$$E_{n-1}(f') \leqslant \frac{\beta}{2(n-1)}\,(b-a)E_{n-2}(f''),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$E_{n-p+1}(f^{(p-1)}) \leqslant \frac{\beta}{2(n-p+1)}\,(b-a)E_{n-p}(f^{(p)}).$$

Учитывая эти неравенства почленно, находим

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta^p(b-a)^p}{2^pn(n-1)\dots(n-p+1)}\,E_{n-p}(f^{(p)}).$$

Далее применяем неравенство (9). В результате получаем

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta^{p+1}(b-a)^p}{2^pn(n-1)\dots(n-p+1)}\,\omega\Big(\frac{b-a}{2(n-p)};f^{(p)}\Big). \tag{18}$$

Для оценки знаменателя снизу воспользуемся неравенствами

$$1-\frac{k}{n} > 1-\frac{k}{p}, \qquad n-k > \frac{p-k}{p}\,n,$$

которые справедливы при условиях $n > p$ и $k = 1,2,\dots,p-1$. Следовательно, имеем

$$n(n-1)\dots(n-p+1) \geqslant n\,\frac{(p-1)(p-2)\dots2\cdot1}{p^{p-1}}\,n^{p-1} = \frac{p!}{p^p}\,n^p.$$

А теперь из (18) следует (16) при условии (17). Этим теорема 12.10 доказана.

В частности, если $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha,M)$, то при $n > p$ вместо (16) имеем

$$E_n(f) \leqslant \frac{A_pM}{n^{p+\alpha}}, \tag{19}$$

где

$$A_p = \frac{\beta^{p+1}}{2^p}\,\frac{p^p}{p!}\Big(\frac{p+1}{2}\Big)^{\alpha}(b-a)^{p+\alpha}.$$

В самом деле, оценивая модуль непрерывности через условие Липшица, находим

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_p(b-a)^\alpha M}{n^{p+\alpha}2^\alpha}\left(\frac{n}{n-p}\right)^\alpha \leqslant \frac{c_p M(b-a)^\alpha}{n^{p+\alpha}}\left(\frac{p+1}{2}\right)^\alpha,$$

ибо при $n > p$ выполняется условие $n \geqslant p+1$, и, значит, справедливо неравенство $1 - p/n \geqslant 1 - p/(p+1)$, из которого и следует $n - p \geqslant n/(p+1)$.

Далее, если функция $f(x)$ дифференцируема $p+1$ раз, причем $|f^{(p+1)}(x)| \leqslant M_{p+1}$ при $x \in [a,b]$, то имеет место оценка

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_p(b-a)}{n^{p+1}}\left(\frac{p+1}{2}\right)M_{p+1}.$$

Если же функция $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ имеет производные всех порядков, то при любом фиксированном $p > 0$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n(f) = 0.$$

А если функция $f(x)$ аналитическая на сегменте $[a,b]$, то, как показал С.Н. Бернштейн, существуют такие постоянные $c > 0$ и $0 < q < 1$, что имеет место неравенство

$$E_n(f) \leqslant cq^n.$$

В настоящем параграфе изложены оценки для наилучших приближений непериодических функций в зависимости от дифференциальных и структурных свойств функций. Все такие результаты называются *прямыми теоремами о порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами.* Но в отличие от периодического случая полученные здесь результаты, вообще говоря, нельзя обратить, т. е., например, из неравенства (19) не следует, что производная $f^{(p)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$ на всем сегменте $[a,b]$.

Для того чтобы можно было доказывать некоторые обратные теоремы, надо прямые теоремы в алгебраическом случае формулировать в несколько ином виде.

§ 7. Поточечные оценки приближения функций алгебраическими многочленами

В теории приближений функций наряду с оценками наилучших равномерных приближений $\{E_n(f)\}$ рассматриваются также поточечные оценки, в которых разность между функцией и приближающим многочленом оценивается по-разному в зависимости от положения точки на сегменте. Впервые такие оценки были получены в работах С.М. Никольского, А.Ф. Тимана и В.К. Дзядыка в связи с задачей

о характеристике дифференциальных и структурных свойств функции на основе известной скорости ее приближения алгебраическими многочленами.

В настоящем параграфе приводятся две теоремы А.Ф. Тимана [III.12], причем рассматривается стандартный случай, когда функция $f(x)$ определена на сегменте $[-1,1]$, ибо переход к общему случаю не представляет затруднений и, кроме того, излагаемые ниже результаты применяются при изучении рядов Фурье–Лежандра и рядов Фурье–Якоби именно в случае сегмента $[-1,1]$.

Начнем с некоторых вспомогательных предложений.

При натуральных n и p рассмотрим функцию

$$F_N(t) = \left(\frac{\sin(nt/2)}{n\sin(t/2)}\right)^{2p+4}, \qquad N=(n-1)(p+2). \tag{1}$$

Если вместо показателя $2p+4$ поставить 2, то в силу леммы 12.1 (формула (4.1)) получился бы четный тригонометрический полином порядка $n-1$. Следовательно, в общем случае функция (1) есть четный тригонометрический полином порядка $N=(n-1)(p+2)$, т. е. имеем формулу

$$F_N(t) = \left(\frac{\sin(nt/2)}{n\sin(t/2)}\right)^{2p+4} = \sum_{k=0}^{N} a_k(p,n)\cos kt. \tag{2}$$

Л е м м а 12.9. *Если $\varphi(t)$ есть четная периодическая функция, то интеграл*

$$P_N(x;\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)F_N(t-y)\,dt = \sum_{k=0}^{N} b_k(p,n)\cos ky \tag{3}$$

есть четный тригонометрический полином порядка не выше N относительно y и алгебраический многочлен порядка не выше N относительно $x=\cos y$.

В самом деле, используя равенство (2) и развертывая $\cos k(t-y)$ по формуле косинуса разности двух углов, найдем, что интеграл (3) есть четный тригонометрический полином порядка не старше N, ибо функция $\varphi(t)$ четная и интегралы от произведений $\varphi(t)\sin kt$ все равны нулю. Далее, суперпозиция $\cos(k\arccos x)$ есть многочлен Чебышева первого рода. Этим лемма 12.9 доказана.

Л е м м а 12.10. *При фиксированном m, удовлетворяющем условиям $0\leqslant m<2p+3$, существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, зависящие от m и от p, что при всех $N\geqslant p+2$ имеет место неравенство*

$$\frac{c_1}{N^{m+1}} \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|^m F_N(t)\,dt \leqslant \frac{c_2}{N^{m+1}}. \tag{4}$$

Доказательство. Используя неравенство $\sin t \geqslant 2t/\pi$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^m F_N(t)\,dt = 2^{m+2} \int_0^{\pi/2} \tau^m \left(\frac{\sin n\tau}{n \sin \tau}\right)^{2p+4} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+4} \int_0^{\pi/2} \tau^m \left(\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{2p+4} d\tau =$$

$$= 2^{m+2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+4} \frac{1}{n^{m+1}} \int_0^{n\pi/2} t^m \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2p+4} dt <$$

$$< \frac{c_3}{n^{m+1}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2p+4} dt + \int_1^{\infty} t^{m-2p-4}\,dt\right] \leqslant \frac{c_4}{n^{m+1}} \leqslant \frac{c_5}{N^{m+1}}.$$

Аналогично, учитывая неравенство $|\sin t| \leqslant |t|$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^m F_N(t)\,dt > 2^{m+2} \int_0^{\pi/(2n)} \tau^m \left(\frac{\sin n\tau}{n \sin \tau}\right)^{2p+4} d\tau \geqslant$$

$$\geqslant 2^{m+2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p+4} \int_0^{\pi/(2n)} \tau^m \left(\frac{n\tau}{n\tau}\right)^{2p+4} d\tau \geqslant \frac{c_6}{n^{m+1}} \geqslant \frac{c_7}{N^{m+1}}.$$

Этим лемма 12.10 доказана.

В частности, для чисел

$$A_N^{(p)} = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt \tag{5}$$

имеем неравенство

$$\frac{c_1}{N} \leqslant A_N^{(p)} \leqslant \frac{c_2}{N}. \tag{6}$$

Теорема 12.11. *Если $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$ на сегменте $[-1,1]$, то существует такая последовательность многочленов $\{P_n(x; f)\}$, что выполняется неравенство*

$$|f(x) - P_n(x; f)| \leqslant \frac{c_8}{n^\alpha} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{7}$$

Доказательство. Непрерывная функция $f(x)$ задана на сегменте $[-1,1]$. Поэтому функция $f(\cos t)$ четная, периодическая и непрерывная по переменному t. Следовательно, в силу леммы 12.9

при условиях $x = \cos y$ и $y = \arccos x$ функция

$$P_N(x;f) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \left[\frac{\sin \dfrac{n(t-y)}{2}}{n \sin \dfrac{t-y}{2}}\right]^4 dt \tag{8}$$

есть алгебраический многочлен степени не выше $N = 2n - 2$. Фактически этот интеграл был рассмотрен в § 4. Как и в § 4, рассматриваем, разность

$$|f(x) - P_N(x;f)| = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(\cos y) - f(\cos t)] \left[\frac{\sin \dfrac{n(t-y)}{2}}{n \sin \dfrac{t-y}{2}}\right]^4 dt.$$

Под знаком интеграла сделаем замену $t - y = u$, а затем вместо u снова поставим t. Переходя к неравенству и учитывая условие $f(x) \in \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$, получим

$$|f(x) - P_N(x;f)| \leqslant c_9 n \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos y - \cos(y+t)|^\alpha \left(\frac{\sin(nt/2)}{n\sin(t/2)}\right)^4 dt. \tag{9}$$

Для разности косинусов имеем

$$\begin{aligned}|\cos y - \cos(y+t)| &= 2\left|\sin\left(y + \frac{t}{2}\right) \sin\frac{t}{2}\right| = \\ &= 2\left|\sin\frac{t}{2}\left(\sin y \cos\frac{t}{2} + \cos y \sin\frac{t}{2}\right)\right| \leqslant |t|\left(|\sin y| + \frac{|t|}{2}\right) \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{|\sin y|}{N} + \frac{1}{N^2}\right)\left[N|t| + \frac{1}{2}(N|t|)^2\right].\end{aligned} \tag{10}$$

Последняя часть этого неравенства проверяется непосредственным вычислением. Далее, учитывая очевидное неравенство $a^\alpha \leqslant a + 1$, справедливое при условиях $a > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$, из (10) находим

$$|\cos y - \cos(y+t)|^\alpha \leqslant \left(\frac{|\sin y|}{N} + \frac{1}{N^2}\right)^\alpha \left[N|t| + \frac{1}{2}(N|t|)^2 + 1\right]. \tag{11}$$

Следовательно, из (9), учитывая (11), получаем

$$\begin{aligned}&|f(x) - P_N(x;f)| \leqslant \\ &\leqslant c_9 n \left(\frac{|\sin y|}{N} + \frac{1}{N^2}\right)^\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[N|t| + \frac{1}{2} N^2 t^2 + 1\right] \left(\frac{\sin(nt/2)}{n\sin(t/2)}\right)^4 dt.\end{aligned}$$

Последний интеграл представляем в виде суммы трех интегралов, к каждому из которых применяем неравенство (4). В результате имеем

$$\begin{aligned}|f(x) - P_N(x;f)| &\leqslant c_9 n \left(\frac{|\sin y|}{N} + \frac{1}{N^2}\right)^\alpha c_2 \left(\frac{N}{N^2} + \frac{N^2}{N^3} + \frac{1}{N}\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_{10}}{N^\alpha}\left(|\sin y| + \frac{1}{N}\right)^\alpha = \frac{c_{10}}{N^\alpha}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{N}\right)^\alpha, \qquad x \in [-1, 1].\end{aligned} \tag{12}$$

Так как в формуле (8) $N = 2n - 2$, то неравенство (7) установлено для четных номеров n.

Чтобы установить аналогичное неравенство для нечетных номеров n, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(-x)$. Для этой функции можно повторить все рассуждения, приведшие к неравенству (12). В результате получим

$$|\varphi(x) - P_N(x;\varphi)| \leqslant \frac{c_{10}}{N^\alpha}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{N}\right)^\alpha, \qquad x \in [-1,1]. \tag{13}$$

А теперь приближающий многочлен нечетной степени можно построить по формуле

$$P_{N+1}(x;f) = \frac{1}{2}\,(1-x)P_N(x;f) + \frac{1}{2}\,(1+x)P_N(-x;\varphi). \tag{14}$$

Учитывая оценки (12) и (13), находим

$$|f(x) - P_{N+1}(x;f)| \leqslant \frac{1}{2}\,|1-x|\,|f(x) - P_N(x;f)| +$$
$$+ \frac{1}{2}\,|1+x|\,|\varphi(-x) - P_N(-x;\varphi)| \leqslant \frac{2c_{10}}{N^\alpha}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{N}\right)^\alpha. \tag{15}$$

Так как $N+1 \leqslant 2N$ при $N \geqslant 1$, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{N}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{N}\right) \leqslant \frac{2}{N+1}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{N+1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{N+1}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{N+1}\right). \tag{16}$$

Следовательно, из (15) получаем

$$|f(x) - P_{N+1}(x;f)| \leqslant \frac{c_{11}}{(N+1)^\alpha}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{N+1}\right)^\alpha, \qquad x \in [-1,1].$$

Этим теорема 12.11 доказана полностью.

Теорема 12.12. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$, причем $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$, то существует такая последовательность многочленов $\{P_n(x;f)\}$, что имеет место неравенство*

$$|f(x) - P_n(x;f)| \leqslant \frac{c_{12}}{n^{p+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{p+\alpha}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{17}$$

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по p. Случай $p = 0$ уже рассмотрен в теореме 12.11. Допустим, что теорема справедлива для всех случаев, когда $f^{(m)}(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, M)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Сделаем переход от $p-1$ к p.

Рассмотрим производные $f^{(k)}(x)$ при $k \geqslant 1$. В силу индуктивного предположения для каждой из этих производных существует своя последовательность многочленов $\{P_n(x;f^{(k)})\}$, для которой выполняется неравенство

$$|f^{(k)}(x) - P_n(x;f^{(k)})| \leqslant \frac{c_{13}(k)}{n^{p-k+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{p-k+\alpha}, \qquad x \in [-1,1]. \tag{18}$$

Это неравенство справедливо потому, что в силу условия $f^{(p)}(x) \in$ $\in \operatorname{Lip}(\alpha, M)$ функция $f^{(k)}(x)$ имеет $p-k$ непрерывных производных, последняя из которых входит в класс $\operatorname{Lip}(\alpha, M)$.

Далее, используя обозначение (5), вводим вспомогательные многочлены

$$Q_k(x) = \frac{1}{A_N^{(p)}} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^k F_N(t-y)\,dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, p, \quad (19)$$

$$\Phi_N(x; f) = \frac{1}{A_N^{(p)}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) F_N(t-y)\,dt, \qquad y = \arccos x. \quad (20)$$

Интеграл (20) является многочленом по x в силу леммы 12.9. А к интегралу (19) также можно применить эту лемму, если предварительно степень разности косинусов представить в виде суммы $k+1$ слагаемых. С помощью многочленов (19) и (20) образуем основной приближающий многочлен в виде

$$P_{N_0}(x; f) = \Phi_N(x; f) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} P_n(x; f^{(k)}) Q_k(x). \quad (21)$$

Так как степень многочлена $Q_k(x)$ есть $N + k = (n-1)(p+2) + k$, то степень многочлена (21) равна $N_0 = N + p + n = n(p+3) - 2$.

Учитывая очевидное равенство

$$f(x) = \frac{1}{A_N^{(p)}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos y) F_N(t-y)\,dt, x = \cos y,$$

находим

$$f(x) - P_{N_0}(x; f) = \frac{1}{A_N^{(p)}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\cos y) - f(\cos t)] F_N(t-y)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{A_N^{(p)}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} P_n(x; f^{(k)}) \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^k F_N(t-y)\,dt. \quad (22)$$

С другой стороны, из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем равенство

$$f(u) = f(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(u-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(u-x)^p}{p!} R_p(x; \xi), \quad (23)$$

где величина $R_p(x; \xi)$ в силу условия $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}(\alpha, M)$ допускает оценку

$$|R_p(x; \xi)| = |f^{(p)}(\xi) - f^{(p)}(x)| \leqslant c_{14} |u - x|^{\alpha}. \quad (24)$$

Далее, имея в виду, что $u = \cos t$ и $x = \cos y$, с помощью (23) из (22) получаем

$$f(x) - P_{N_0}(x; f) = = \frac{1}{A_N^{(p)}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} [P_n(x; f^{(k)}) - f^{(k)}(x)] \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^k F_N(t-y)\, dt - - \frac{1}{p!\, A_N^{(p)}} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^p R_p(\cos y; \xi) F_N(t-y)\, dt. \quad (25)$$

Интегралы в сумме оцениваются с помощью леммы 12.10. Имеем последовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^k F_N(t-y)\, dt = 2^k \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{y+t}{2} \sin \frac{y-t}{2} \right|^k F_N(t-y)\, dt = = 2^k \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\Big(y + \frac{\tau}{2}\Big) \sin \frac{\tau}{2} \right|^k F_N(\tau)\, d\tau \leqslant \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin y \cos \frac{\tau}{2} + \cos y \sin \frac{\tau}{2} \right|^k |\tau|^k F_N(\tau)\, d\tau \leqslant \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Big(|\sin y| + \frac{|t|}{2} \Big)^k |t|^k F_N(t)\, dt = = \sum_{m=0}^{k} C_k^m |\sin y|^{k-m} \frac{1}{2^m} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^{k+m} F_N(t)\, dt \leqslant \leqslant c_{15} \sum_{m=0}^{k} C_k^m |\sin y|^{k-m} \frac{1}{n^{k+m+1}} \leqslant \frac{c_{16}}{n^{k+1}} \Big(|\sin y| + \frac{1}{n} \Big)^k.$$

Следовательно, для суммы (25), учитывая неравенства (6) и (18), получаем

$$\left| \frac{1}{A_N^{(p)}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} [P_n(x; f^{(k)}) - f^{(k)}(x)] \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^k F_N(t-y)\, dt \right| \leqslant \leqslant c_{16} n \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^{p-k+\alpha}} \Big(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \Big)^{p-k+\alpha} \frac{1}{n^{k+1}} \Big(|\sin y| + \frac{1}{n} \Big)^k \leqslant \leqslant \frac{c_{17}}{n^{p+\alpha}} \Big(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \Big)^{p+\alpha}.$$

Остается оценить последний интеграл в равенстве (25). Для этого интеграла, учитывая неравенство (24), находим

$$\left| \frac{1}{p!\, A_N^{(p)}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^p R_p(\cos y; \xi) F_N(t-y)\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant c_{18} n \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^{p+\alpha} F_N(t-y)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant c_{19} n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\left(|\sin y| + \frac{|t|}{2} \right) |t| \right]^{p+\alpha} F_N(t)\, dt. \quad (26)$$

Далее, аналогично неравенствам (10) и (11) имеем

$$\left[\left(|\sin y| + \frac{|t|}{2} \right) |t| \right]^{\alpha} \leqslant \left(\frac{|\sin y|}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\alpha} \left[n\,|t| + \frac{1}{2}\,(nt)^2 + 1 \right].$$

Следовательно, правая часть (26) не превосходит величины

$$c_{20} n \left(\frac{|\sin y|}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{p} C_p^m |\sin y|^{p-m} \frac{1}{2^m} \times$$
$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|^{p+m} \left[n\,|t| + \frac{1}{2}\,(nt)^2 + 1 \right] F_N(t)\, dt.$$

Интеграл оцениваем с помощью неравенства (4). В результате получаем мажоранту

$$c_{21} n \left(\frac{|\sin y|}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{p} C_p^m |\sin y|^{p-m} \left(\frac{n}{n^{p+m+2}} + \frac{n^2}{n^{p+m+3}} + \frac{1}{n^{p+m+1}} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{22}}{n^{p+\alpha}} \left(|\sin y| + \frac{1}{n} \right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{p} C_p^m |\sin y|^{p-m} \frac{1}{n^m} =$$
$$= \frac{c_{22}}{n^{p+\alpha}} \left(|\sin y| + \frac{1}{n} \right)^{p+\alpha} = \frac{c_{22}}{n^{p+\alpha}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{p+\alpha}.$$

Таким образом, установлено неравенство

$$|f(x) - P_{N_0}(x; f)| \leqslant \frac{c_{23}}{n^{p+\alpha}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{p+\alpha}, \qquad x \in [-1, 1]. \quad (27)$$

Многочлен $P_{N_0}(x; f)$, определенный формулой (21), имеет степень $N_0 = n(p+3) - 2$. Поэтому в формуле (27) необходимо так преобразовать правую часть, чтобы вместо n было N_0. Это можно сделать, если увеличить постоянную. В самом деле, учитывая очевидное нера-

венство $N_0 \leqslant c_{24}n$, аналогично оценке (16) имеем

$$\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{p+\alpha} = \\ = \left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_0}\right)^{p+\alpha}\left(\frac{N_0}{n}\right)^{p+\alpha}\left(\frac{n\sqrt{1-x^2}+1}{N_0\sqrt{1-x^2}+1}\right)^{p+\alpha} \leqslant \\ \leqslant (c_{24})^{p+\alpha}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_0}\right)^{p+\alpha}. \quad (28)$$

Следовательно, из неравенства (27) находим

$$|f(x)-P_{N_0}(x;f)| \leqslant \frac{c_{25}}{N_0^{p+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_0}\right)^{p+\alpha}, \qquad x\in[-1,1]. \quad (29)$$

Итак, неравенство (17) доказано для некоторой редкой последовательности номеров $\{N_0\}$, где $N_0 = n(p+3)-2$ и $n = 1, 2, \ldots$

Для построения недостающей подпоследовательности приближающих многочленов можно поступить так же, как в самом конце доказательства теоремы 12.11.

Наряду с функцией $f(x)$ рассмотрим еще функцию $\varphi(x) = f(-x)$. Для этой вспомогательной функции можно повторить все рассуждения, в результате которых получено неравенство (29). Следовательно, существует такая последовательность многочленов $\{P_{N_0}(x;\varphi)\}$, что аналогично (29) выполняется неравенство

$$|\varphi(x)-P_{N_0}(x;\varphi)| \leqslant \frac{c_{26}}{N_0^{p+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_0}\right)^{p+\alpha}, \qquad x\in[-1,1]. \quad (30)$$

С другой стороны, для любого $q = 0, 1, 2, \ldots$ многочлены $(1-x)^{q+1}$ и $(1+x)^{q+1}$ взаимно просты. Поэтому, как доказывается в алгебре многочленов, существуют такие два многочлена $A_q(x)$ и $B_q(x)$ степени не выше q, что имеет место тождество

$$1 \equiv (1-x)^{q+1}A_q(x) + (1+x)^{q+1}B_q(x). \quad (31)$$

А теперь аналогично формуле (14) образуем приближающий многочлен в виде

$$P_{N_1}(x;f) = (1-x)^{q+1}A_q(x)P_{N_0}(x;f) + (1+x)^{q+1}B_q(x)P_{N_0}(-x;\varphi). \quad (32)$$

Номер $N_1 = N_0 + 2q + 1$ должен принимать значения между $N_0 = n(p+3)-2$ и номером $(n+1)(p+3)-2 = N_0 + (p+3)$. Следовательно, число q должно изменяться при условиях $0 < 2q+1 < p+3$.

Умножая тождество (31) на $f(x)$ и вычитая из полученного тождества почленно равенство (32), находим

$$f(x) - P_{N_1}(x;f) = (1-x)^{q+1}A_q(x)[f(x)-P_{N_0}(x;f)] + \\ + (1+x)^{q+1}B_q(x)[\varphi(-x)-P_{N_0}(-x;\varphi)].$$

Переходим к неравенствам. Используя (29) и (30), аналогично (28), получаем

$$|f(x) - P_{N_1}(x;f)| \leqslant \frac{c_{27}}{N_0^{p+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_0}\right)^{p+\alpha} \leqslant \leqslant \frac{c_{27}}{N_1^{p+\alpha}}\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{2p+2\alpha}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_1}\right)^{p+\alpha} \leqslant \leqslant \frac{c_{28}}{N_1^{p+\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{N_1}\right)^{p+\alpha}, \qquad x \in [-1,1].$$

В этом неравенстве постоянная c_{28} общая для всех q при условиях $0 < 2q+1 < p+3$, и эта постоянная зависит от многочленов $A_q(x)$ и $B_q(x)$.

Таким образом, неравенство (17) доказано для номеров

$$n(p+3)-2,\ n(p+3)-1,\ n(p+3)+1,\ n(p+3)+3,\ n(p+3)+5,\ \ldots \ldots,\ n(p+3)+2\left[\frac{p}{2}\right]+1,\ n(p+3)+p+1,$$

где $n = 1, 2, \ldots$ А еще одну недостающую «разреженную» подпоследовательность многочленов можно образовать аналогично формуле (14). Этим теорема 12.12 доказана полностью.

Многочлены $\{P_n(x;f)\}$, приближающие функцию $f(x)$ с условием (17), конечно, не являются многочленами наилучшего равномерного приближения, но они обладают тем свойством, что в окрестности концов сегмента $[-1,1]$ скорость приближения увеличивается, а в точках ± 1 точность приближения в два раза выше в смысле порядка, чем во внутренних точках.

Конечно, неравенство (17) можно рассматривать как усиление неравенства (6.19), хотя в последнем есть конкретная постоянная, а в теореме 12.12 постоянная лишь существует.

В теории приближения функций доказывается, что теорему 12.12 можно обратить, т. е. если существует последовательность многочленов, удовлетворяющая условию (17), то функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1,1]$, причем $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. В этом заключается значение поточечных оценок приближения функций алгебраическими многочленами.

§ 8. Краткий обзор дальнейших результатов

1. В теории приближения функций важную роль играет неравенство Бернштейна для производной тригонометрического полинома.

Рассмотрим тригонометрический полином порядка n

$$\Psi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1}$$

Для его производной справедлива оценка

$$|\Psi_n'(x)| \leqslant n \max_{x\in[-\pi,\pi]} |\Psi_n(x)|. \tag{2}$$

Если использовать обозначения чебышевских норм, то это неравенство представляется в виде

$$\|\Psi_n'\| \leqslant n\|\Psi_n\|. \tag{3}$$

Имеется целый ряд обобщений неравенства Бернштейна в различных направлениях.

2. С помощью неравенства Бернштейна (3) доказываются обратные теоремы о приближении функций тригонометрическими полиномами.

Теорема Бернштейна I. *Если для наилучших приближений периодической функции $f(x)$ выполняется неравенство*

$$E_n(f; 2\pi) \leqslant \frac{c_1}{n^{p+\alpha}}, \tag{4}$$

где p — натуральное число и $0 < \alpha < 1$, то функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз и $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$.

3. Во всех предыдущих результатах непрерывной периодической функции $f(x)$ ставилась в соответствие последовательность ее наилучших равномерных приближений $\{E_n(f; 2\pi)\}$. С.Н. Бернштейн доказал в некотором смысле обратный результат.

Пусть дана последовательность положительных чисел $\{A_n\}$, удовлетворяющая только двум условиям:

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant \ldots \geqslant A_n \geqslant A_{n+1} \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0. \tag{5}$$

Тогда существует такая непрерывная периодическая функция $f(x)$, для которой выполняются равенства

$$E_n(f; 2\pi) = A_n. \tag{6}$$

Более того, для данной последовательности $\{A_n\}$, удовлетворяющей условиям (5), можно подобрать четную периодическую функцию $f(x)$, для которой выполняется равенство (6).

4. С.Н. Бернштейн установил аналог тригонометрического неравенства (3) в алгебраическом случае.

Теорема Бернштейна II. *Если алгебраический многочлен с действительными коэффициентами*

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{7}$$

на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет условию

$$|Q_n(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a, b], \tag{8}$$

то для его производной выполняется неравенство

$$|Q_n'(x)| \leqslant \frac{nM}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \qquad x \in [a, b]. \tag{9}$$

5. Неравенство (9) оценивает производную внутри интервала (a, b). Оценку на сегменте установил А.А. Марков.

Теорема Маркова. *Если для алгебраического многочлена* (7) *выполняется условие* (8), *то для его производной имеет место неравенство*

$$|Q'_n(x)| \leqslant \frac{2n^2 M}{b-a}, \qquad x \in [a, b]. \tag{10}$$

6. Многочлены наилучшего приближения теоретически существуют, но практически их найти очень трудно. Поэтому имеют большое значение методы построения конкретных приближающих многочленов. Один из таких методов указал С.Н. Бернштейн.

Пусть на сегменте $[0, 1]$ определена непрерывная функция $f(x)$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на n равных частей точками деления $\{k/n\}$ и вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках. Тогда можно определить многочлен

$$B_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{11}$$

Этот многочлен называется *многочленом Бернштейна* функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то последовательность многочленов (11) сходится к этой функции равномерно на сегменте $[0, 1]$. Конечно, скорость сходимости хуже, чем в случае многочленов наилучшего приближения, но зато многочлены (11) вычисляются просто. А если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[0, 1]$, то ее производную $f'(x)$ можно приближать производной от многочленов Бернштейна (11).

7. Как известно, в случае периодических функций основным аппаратом приближения являются тригонометрические ряды Фурье.

Если периодическая и непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) \ln \frac{1}{\delta} = 0, \tag{12}$$

то она разлагается в ряд Фурье по тригонометрической системе:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{13}$$

который сходится равномерно, а коэффициенты его определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \tag{14}$$

Частичная сумма ряда (13) в силу формул (14) представляется в виде

$$s_n(x;f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\left(\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}u}{\sin\dfrac{u}{2}}\right)du=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\left(\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}u}{\sin\dfrac{u}{2}}\right)du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \qquad (15)$$

Далее, поскольку $f(x)\in C(2\pi)$, то можно ввести последовательность тригонометрических полиномов наилучшего приближения $\{\Psi_n(x)\}$. Для этих полиномов имеем

$$|f(x)-\Psi_n(x)|\leqslant\max_x|f(x)-\Psi_n(x)|=E_n(f;2\pi). \qquad (16)$$

Кроме того, в силу формулы (15) справедливо равенство

$$\Psi_n(x)=s_n(x;\Psi_n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}[\Psi_n(x+2t)+\Psi_n(x-2t)]\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \qquad (17)$$

Следовательно, для остатка тригонометрического ряда Фурье (13) в силу (15) и (17) получаем

$$f(x)-s_n(x;f)=[f(x)-\Psi_n(x)]+[\Psi_n(x)-s_n(x;f)]=$$
$$=[f(x)-\Psi_n(x)]+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\{[\Psi_n(x+2t)-f(x+2t)]+$$
$$+[\Psi_n(x-2t)-f(x-2t)]\}\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Переходя к неравенствам и учитывая (16), находим

$$|f(x)-s_n(x;f)|\leqslant E_n(f;2\pi)+E_n(f;2\pi)\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt. \qquad (18)$$

Далее вводим специальное обозначение

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Эти числа называются *постоянными Лебега для тригонометрического ряда Фурье.*

Используя обозначение (19), из (18) получаем

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leqslant E_n(f; 2\pi)(1 + L_n). \tag{20}$$

Это неравенство называется *неравенством Лебега для тригонометрического ряда Фурье.*

Оценим постоянные Лебега (19). Разобьем сегмент интегрирования в (19) на два сегмента $[0, \varepsilon_n]$ и $[\varepsilon_n, \pi/2]$, где $\varepsilon_n = \pi/(2(2n+1))$. Тогда, применяя на первом сегменте оценку $|\sin mt| \leqslant m|\sin t|$, а на втором неравенство $\sin t \geqslant 2t/\pi$, находим последовательно

$$L_n = \frac{2}{\pi} \left[\int\limits_0^{\varepsilon_n} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt + \int\limits_{\varepsilon_n}^{\pi/2} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \left[(2n+1)\varepsilon_n + \frac{\pi}{2} \int\limits_{\varepsilon_n}^{\pi/2} \frac{dt}{t} \right] \leqslant 1 + \ln(2n+1). \tag{21}$$

Следовательно, неравенство Лебега (20) приводится к виду

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leqslant E_n(f; 2\pi)[2 + \ln(2n+1)]. \tag{22}$$

Сумму в квадратных скобках (22) можно записать по-другому. В самом деле, так как $2n + 1 \leqslant en$ при $n \geqslant 2$, то имеем

$$\ln(2n+1) \leqslant 1 + \ln n, \qquad 2 + \ln(2n+1) \leqslant 3 + \ln n \leqslant 3(1 + \ln n),$$

причем последнее неравенство справедливо при $n \geqslant 1$. Следовательно, неравенство Лебега (22) можно представить в виде

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leqslant c_1 E_n(f; 2\pi)(1 + \ln n), \qquad n \geqslant 1, \tag{23}$$

где при $n \geqslant 2$ постоянная $c_1 \leqslant 3$ (конечно, эту постоянную можно оценить и точнее [III.2]). Кроме того, неравенство Лебега иногда записывается в виде

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leqslant c_2 E_n(f; 2\pi) \ln n, \qquad n \geqslant 2. \tag{24}$$

Неравенство Лебега показывает, что частные суммы ряда Фурье (1) приближают функцию $f(x)$ лишь на величину $\ln n$ хуже порядка наилучшего приближения.

Рассмотрим частные случаи неравенства Лебега.

Поскольку $f(x) \in C(2\pi)$, то, оценивая наилучшее приближение $E_n(f; 2\pi)$ через модуль непрерывности по неравенству (5.1),

находим

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leqslant c_3\, \omega\Big(\frac{1}{n}; f\Big)(1 + \ln n). \tag{25}$$

Следовательно, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини (12), то она разлагается в тригонометрический ряд Фурье, сходящийся равномерно на всей оси.

Далее, предположим, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз и $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. Тогда в силу (5.15) имеем неравенство

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leqslant \frac{c_4 \ln n}{n^{p+\alpha}}, \qquad n \geqslant 2. \tag{26}$$

Таким образом, скорость сходимости тригонометрических рядов Фурье зависит от дифференциальных и структурных свойств периодической функции.

Еще раз заметим, что в настоящей главе изложены только некоторые результаты из теории приближения функций, которые применяются в теории ортогональных многочленов. Дальнейшие результаты по теории приближения функций изложены в монографиях, которые упомянуты в разделе III списка литературы.

КОММЕНТАРИИ И ДОПОЛНЕНИЯ

В теории ортогональных многочленов можно различать два крайних существенно различных направления исследований. В первом из них свойства ортогональных многочленов рассматриваются при наиболее общих условиях на весовую функцию без конкретизации вида этой функции. Во втором направлении изучаются наиболее характерные классы ортогональных многочленов, определяемые весовыми функциями конкретного вида. В первом из этих направлений получено не так уж много результатов, и эти результаты почти не имеют применений. Напротив, второе направление весьма богато по содержанию, характеризуется конструктивными результатами, интенсивно развивается и имеет многочисленные применения. Так, например, если весовая функция только суммируема, то для соответствующих ей ортогональных многочленов можно доказать теорему существования, экстремальные свойства, некоторые алгебраические свойства и очень мало из дальнейших свойств. А если предположить, что весовая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона, то возникает целая теория классических ортогональных многочленов.

Таким образом, в теории ортогональных многочленов наиболее важной является задача исследования асимптотических свойств ортогональных многочленов при весовых функциях конкретных классов. При этом сужение класса весовых функций во многих случаях не обедняет тему, не упрощает задачи и, самое главное, не исключает возможности важных применений полученных результатов.

Глава I

В гл. I рассмотрены элементарные свойства ортогональных многочленов в самом общем случае, когда весовая функция только интегрируема на интервале ортогональности и существуют все ее степенные моменты. Дальнейшие результаты в этом общем случае рассматриваются в монографиях Г. Сегё [I.6], Я.Л. Геронимуса [I.2], И.П. Натансона [III.8] и Г. Фройда [I.11]. Приведем краткий обзор этих результатов.

1. Более подробно изучены свойства нулей ортогональных многочленов. При этом рассматриваются асимптотические свойства нулей как в общем случае, так и в случае классических ортогональных многочленов.

2. На основе свойств нулей рассматриваются более общие интерполяционные процессы.

3. Значительно подробнее изложены вопросы теории квадратурных формул интерполяционного типа и интерполяционно-ортогонального типа Гаусса.

4. В монографии Г. Сегё [I.6] подробно излагается весьма оригинальный метод исследования асимптотических свойств ортогональных многочленов в случае единичного сегмента $[-1, 1]$. Этот метод основан на формуле Г. Сегё (VIII.2.9). В этом методе главным является существование интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \tag{1}$$

Если этот интеграл существует, то говорят, что функция $h(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ удовлетворяет *условию Сегё*. А в случае окружности условие Сегё имеет вид

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \ln g(\theta)\, d\theta > -\infty. \tag{2}$$

5. В монографии Г. Сегё [I.6] рассматриваются различные теоремы о равносходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам. Приведены две теоремы о равносходимости ряда Фурье по многочленам, ортогональным на окружности, с рядом Тейлора той же аналитической функции на единичной окружности. Еще две теоремы содержат условия равносходимости ряда Фурье по многочленам, ортогональным на сегменте $[-1, 1]$, с рядом Фурье по многочленам Чебышева первого рода.

Теорема 1. *Если весовая функция $h(x)$ определена на сегменте $[-1, 1]$ и такова, что функция*

$$g(\theta) = h(\cos\theta)|\sin\theta| \tag{3}$$

удовлетворяет условию Дини–Липшица

$$|g(\theta+\delta) - g(\theta)| \leqslant \frac{c_1}{(\ln 1/\delta)^{1+\lambda}}, \qquad \lambda > 0, \quad 0 < \delta < 1, \tag{4}$$

а функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[-1, 1]$, то выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \Big[S_n(x; f, h) - S_n\Big(x; f, -\frac{1}{2}\Big)\Big] = 0, \qquad x \in (-1, 1), \tag{5}$$

где $S_n(x; f, h)$ — *частичная сумма ряда Фурье по многочленам, ортогональным с весом* $h(x)$, *а* $S_n(x; f, -1/2)$ — *частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышева первого рода той же функции* $f(x)$.

Теорема 2. *Если интеграл* (1) *существует, а функция* $f(x)$ *удовлетворяет двум условиям*:

$$\int_{-1}^{1} h(x) f^2(x)\, dx < \infty, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\, dx < \infty, \tag{6}$$

то условие равносходимости (2) *также выполняется.*

6. В монографии И.П. Натансона [III.8] рассматриваются некоторые общие теоремы о сходимости почти всюду рядов Фурье по ортогональным многочленам.

Теорема 3 (И.П. Натансон). *Если* $h(x)$ — *весовая функция на сегменте* $[a, b]$, *а функция* $f(x)$ *на этом сегменте удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha > 1/2$, *то разложение*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n(x) \tag{7}$$

имеет место почти всюду на сегменте $[a, b]$.

А.Н. Колмогоров усилил этот результат, доказав разложение (7) при условии $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, где $\alpha > 0$.

Теорема 4 (И.П. Натансон). *Если весовая функция* $h(x)$ *на сегменте* $[-1, 1]$ *удовлетворяет условию*

$$h(x) \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1),$$

а функция $f(x)$ *имеет ограниченное изменение на сегменте* $[-1, 1]$, *то разложение* (7) *имеет место почти всюду на сегменте* $[-1, 1]$.

7. Наиболее законченные результаты об асимптотических свойствах ортогональных многочленов при общих условиях на весовую функцию и свойства рядов Фурье по этим многочленам изложены в монографии Я.Л. Геронимуса [I.2].

8. При некоторых минимальных условиях на весовую функцию $h(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ для старшего коэффициента ортонормированного многочлена имеет место двусторонняя оценка [I.2]

$$c_3 2^n \leqslant \mu_n \leqslant c_4 2^n.$$

9. Для функций второго рода в случае произвольного веса на интервале (a, b) справедлива рекуррентная формула

$$\lambda_n q_{n+1}(t) = (t - \alpha_n) q_n(t) - \lambda_{n-1} q_{n-1}(t).$$

В самом деле, из формул (I.2.4) и (I.6.35) имеем

$$\lambda_n q_{n+1}(t) = \int_a^b \frac{h(x)\lambda_n B_{n+1}(x)}{t-x}\,dx = \int_a^b \frac{h(x)\,xB_{n+1}(x)}{t-x}\,dx - $$
$$- \alpha_n q_n(t) - \lambda_{n-1}q_{n-1}(t) = tq_n(t) - \alpha_n q_n(t) - \lambda_{n-1}q_{n-1}(t).$$

Глава II

Многие формулы для классических ортогональных многочленов остаются справедливыми и при тех значениях параметров, при которых соответствующие весовые функции становятся неинтегрируемыми. Так, например, представление многочленов Якоби через гипергеометрическую функцию позволяет определять эти многочлены $P_n(x;\alpha,\beta)$ не только при $\alpha > -1$ и $\beta > -1$, но даже и при любых комплексных значениях параметров α и β. При этом многочлен $P_n(x;\alpha,\beta)$ удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению, для него справедлива формула Родрига и многие другие формулы. Аналогичным образом можно определять и рассматривать многочлены Чебышева–Лагерра $L_n(x;\alpha)$ при любом комплексном α. Но, конечно, условия ортогональности во всех этих случаях отсутствуют.

В монографии В.В. Старинца [I.7] вводятся некоторые методы регуляризации весовых функций, которые позволяют рассматривать свойство ортогональности во многих сингулярных случаях. В этой монографии фактически рассматриваются функциональные гильбертовы пространства с индефинитной метрикой. Приведем один результат из монографии В.В. Старинца [I.7].

Рассматривается весовая функция

$$h(x) = |x|^{2p+1}e^{-x^2}, \qquad p < -1, \quad x \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

причем p не является целым числом. Регуляризующий множитель этой функции имеет вид

$$\psi_\alpha^{(p)}(x) = \frac{-1}{\sin \pi p}\cos\Big[(2p+1)\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big]\Big(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\Big)^{p+1/2}.$$

Скалярное произведение в этом случае определяется по формуле

$$(f,\varphi) = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)|x|^{2p+1}e^{-x^2}\psi_\alpha^{(p)}(x)\,dx.$$

Соответствующие многочлены называются *обобщенно-классическими многочленами Чебышева–Эрмита.* Для этих многочленов доказываются пять свойств, аналогичных свойствам классических ортогональных многочленов.

Аналогичным образом вводятся регуляризирующие множители и для других весовых функций с особыми точками.

Глава III

Значение многочленов Чебышева в теоретических и практических вопросах объясняется многими причинами.

1. В теории ортогональных многочленов многочлены $T_n(x)$ являются самым простым, самым характерным и самым важным классом ортогональных многочленов. При исследовании всех других систем ортогональных многочленов пытаются прежде всего установить, насколько на эти системы переносятся свойства многочленов $T_n(x)$.

2. В теории приближения функций многочлены $T_n(x)$ важны потому, что частичные суммы рядов Фурье–Чебышева приближают любую непрерывную функцию на сегменте $[-1, 1]$ в смысле порядка лишь на величину $\ln n$ хуже, чем многочлены наилучшего равномерного приближения.

3. Главное экстремальное свойство многочленов $T_n(x)$ — наименьшее уклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$ — очень удачно используется в теории интерполяции и в квадратурных формулах. Именно поэтому многочлены Чебышева первого рода рассматриваются почти во всех монографиях и учебниках по вычислительной математике.

4. Некоторые свойства многочленов Чебышева как идея распространяются на более сложные ситуации. Например, пусть на плоскости комплексного переменного z определена конечная односвязная область G, ограниченная замкнутой гладкой кривой Γ. Тогда для каждого многочлена

$$\widetilde{\Phi}_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n \qquad (1)$$

можно ввести чебышевскую норму по области $\overline{G}$

$$\|\widetilde{\Phi}_n\| = \max_{z \in \overline{G}} |\widetilde{\Phi}_n(z)|.$$

А теперь вводим величину

$$m_n = \inf_{\{c_k\}} \|\widetilde{\Phi}_n\| = \inf_{\{c_k\}} \max_{z \in \overline{G}} |\widetilde{\Phi}_n(z)|.$$

Доказывается, что среди всех многочленов вида (1) существует единственный многочлен $\widetilde{T}_n(z; \overline{G})$, который наименее уклоняется от нуля на замкнутом множестве $\overline{G}$. Этот многочлен называется *многочленом Чебышева для множества* $\overline{G}$. Свойства этих многочленов $\widetilde{T}_n(z; \overline{G})$ изучены недостаточно. Эти свойства зависят от вида области G [III.10, III.11].

Глава IV

Среди всех систем ортогональных многочленов наиболее важные применения в математической физике имеют многочлены Лежандра. Эти многочлены, а также связанные с ними присоединенные функции Лежандра и сферические функции применяются при решении различных краевых задач для дифференциальных уравнений. Именно поэтому во многих монографиях и даже учебных пособиях по математической физике подробно излагаются свойства многочленов Лежандра. В качестве характерного примера можно привести монографию Е.В. Гобсона [IV.4], которая целиком посвящена применению многочленов Лежандра и присоединенных функций Лежандра в математической физике. В этой монографии подробно рассматриваются ряды Фурье по основным сферическим функциям (XI.2.12)

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_{n0}P_n(\cos\theta)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)\Psi_n(\cos\theta;m)] \quad (1)$$

и ряды Фурье–Лапласа (XI.2.10)

$$F(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n[A_{n0}P_n(\cos\theta)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)\Psi_n(\cos\theta;m)]. \quad (2)$$

Эти ряды изучались многими математиками. При исследовании рядов (1) и (2) главную роль играют свойства многочленов Лежандра и присоединенных функций Лежандра. В обзорной статье [X.5] рассмотрены различные свойства рядов (1) и (2). Список литературы в этой статье насчитывает 464 наименования.

Глава V

1. В монографии Г. Сегё [I.6] приведена теорема о равносходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита. Эта теорема полностью решает вопрос об условиях сходимости этого ряда на любом конечном сегменте, а также об условиях равномерной сходимости и о скорости сходимости на любом конечном сегменте.

2. В 1880 г. Н.Я. Сонин обобщил многочлены Чебышева–Эрмита, введя весовую функцию

$$h(x)=|x|^{2\alpha}e^{-x^2},\qquad \alpha>-\frac{1}{2},\quad x\in(-\infty,\infty). \quad (1)$$

Для соответствующих ортогональных многочленов $C_n(x;\alpha)$ Н.Я. Сонин нашел производящую функцию и представления через многочлены Чебышева–Лагерра

$$C_{2m}(x;\alpha) = \frac{L_m(x^2;\alpha-1/2)}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1/2)}, \tag{2}$$

$$C_{2m+1}(x;\alpha) = \frac{xL_m(x^2;\alpha+1/2)}{m!\,\Gamma(m+\alpha+3/2)}. \tag{3}$$

3. В некоторых книгах, например, в монографии Д. Джексона [I.3], а также иногда в прикладных вопросах многочлены Чебышева–Эрмита определяются при весовой функции

$$h(x) = \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2}\Bigr), \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{4}$$

В этом случае некоторые формулы несколько видоизменяются, но все свойства многочленов Чебышева–Эрмита сохраняются и при весовой функции (4). Вводя новое обозначение, получим формулу Родрига

$$H_n\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) = (-1)^n \exp\Bigl(\frac{x^2}{2}\Bigr)\Bigl[\exp\Bigl(-\frac{x^2}{2}\Bigr)\Bigr]^{(n)}, \tag{5}$$

рекуррентное соотношение

$$H_{n+1}\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) = xH_n\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) - nH_{n-1}\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) \tag{6}$$

и дифференциальное уравнение–тождество

$$H_n''\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) - xH_n'\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) + nH_n\Bigl(x;\frac{1}{2}\Bigr) \equiv 0. \tag{7}$$

Глава VI

1. В монографии Г. Сегё [I.6] приведена теорема о равносходимости ряда Фурье по многочленам Чебышева–Лагерра, которая полностью решает вопросы об условиях сходимости этих рядов на любом конечном сегменте $[A,B]$, где $A > 0$, об условиях равномерной сходимости и о скорости сходимости этих рядов при различных дифференциальных и структурных свойствах разлагаемой функции. Более того, если $\alpha = -1/2$, то разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n\Bigl(x;-\frac{1}{2}\Bigr)$$

на любом сегменте $[0,B]$ по свойствам сходимости аналогично рядам Фурье по многочленам Чебышева первого рода.

2. В монографии Г. Сегё [I.6] приводятся важные формулы

$$H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m!\, L_m\Bigl(x^2;-\frac{1}{2}\Bigr),$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m!\, xL_m\Bigl(x^2;\frac{1}{2}\Bigr).$$

Эти формулы фактически получаются из формул Н.Я. Сонина при $\alpha = 0$ с точностью до нормировки.

Глава VII

1. Ввиду наличия двух независимых параметров многочлены Якоби характеризуются большим диапазоном свойств. Приведем наиболее характерные дальнейшие результаты.

Многочлены Чебышева первого и второго рода можно представить через многочлены Якоби в виде

$$P_n\Big(x; -\frac{1}{2}\Big) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\, T_n(x) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cos n\theta,$$

$$P_n\Big(x; \frac{1}{2}\Big) = 2\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots(2n+2)}\, U_n(x) = 2\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots(2n+2)}\,\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

где $x = \cos\theta$. Аналогично имеем еще две формулы

$$P_n\Big(x; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \tag{1}$$

$$P_n\Big(x; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\cos((2n+1)\theta/2)}{\cos(\theta/2)}. \tag{2}$$

Для многочленов (1) и (2) нетрудно установить равномерные и весовые оценки, оценить функцию Лебега и рассмотреть условия сходимости в различных точках сегмента ортогональности.

Г. Сегё [I.6] ввел весовую функцию

$$h(x) = |x|^{2\alpha}, \qquad \alpha > -\frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1],$$

и для соответствующих ортогональных многочленов доказал формулы

$$S_{2k}(x; 2\alpha) = a_k^{(\alpha)} P_k\Big(2x^2 - 1; 0, \alpha - \frac{1}{2}\Big),$$

$$S_{2k+1}(x; 2\alpha) = b_k^{(\alpha)} P_k\Big(2x^2 - 1; 0, \alpha + \frac{1}{2}\Big).$$

В монографии Г. Сегё [I.6] приводятся важные формулы

$$P_{2m}(x; \alpha) = \frac{\Gamma(2m+\alpha+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(2m+1)}\, P_m\Big(2x^2 - 1; \alpha, -\frac{1}{2}\Big) =$$
$$= (-1)^m \frac{\Gamma(2m+\alpha+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(2m+1)}\, P_m\Big(2x^2 - 1; -\frac{1}{2}, \alpha\Big),$$

$$P_{2m+1}(x; \alpha) = \frac{\Gamma(2m+\alpha+2)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(2m+2)}\, xP_m\Big(2x^2 - 1; \alpha, \frac{1}{2}\Big) =$$
$$= (-1)^m \frac{\Gamma(2m+\alpha+2)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(2m+2)}\, xP_m\Big(2x^2 - 1; \frac{1}{2}, \alpha\Big).$$

Таким образом, многочлены Якоби, у которых один из индексов равен $\pm 1/2$, представляются через ультрасферические многочлены Гегенбауэра.

Многочлены Якоби применяются в теории ортогональных многочленов по двум переменным [I.9]. В работах Т. Коорнвиндера ортогональные многочлены по двум переменным иногда представляются через различные суперпозиции с помощью многочленов Якоби.

П р и м е р 1. Многочлены Эрмита по двум переменным

$$H_{nk}(x,y;\alpha) = \widehat{P}_{n-k}(x;\alpha_k)(1-x^2)^{k/2}\widehat{P}_k\Big(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}};\alpha\Big),$$

где $n = 0,1,\ldots$, $k = 0,1,\ldots,n$ и $\alpha_k = \alpha + k + 1/2$, ортонормированы по единичному кругу $G = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 < 1\}$ с весовой функцией Эрмита $h(x,y) = (1-x^2-y^2)^\alpha$, где $\alpha > -1$.

П р и м е р 2. Многочлены Аппеля

$$A_{nk}(x,y;\alpha,\beta,\gamma) = \widehat{P}_{n-k}(1-2x;a_k)(1-x)^k\widehat{P}_k\Big(\frac{2y}{1-x};\gamma,\beta\Big),$$

где $n = 0,1,\ldots$, $k = 0,1,\ldots,n$ и $a_k = \beta+\gamma+2k+1$, ортонормированы по треугольнику $G = \{(x,y)\colon\ x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1\}$ с весовой функцией Аппеля $h(x,y) = x^\alpha y^\beta(1-x-y)^\gamma$, где $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > -1$.

П р и м е р 3. Многочлены по двум переменным

$$F_{nk}(x,y;\alpha,\beta) = \widehat{P}_{n-k}(2x-1;\alpha,\beta_k)(2x)^{k/2}\widehat{P}_k\Big(\frac{y}{\sqrt{x}};\beta\Big),$$

где $n = 0,1,\ldots$, $k = 0,1,\ldots,n$ и $\beta_k = \beta + k + 1/2$, ортонормированы по области $G = \{(x,y)\colon\ y^2 < x < 1\}$ с весовой функцией $h(x,y) = (1-x)^\alpha(x-y^2)^\beta$, где $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Эти результаты Т. Коорнвиндера подробно изложены в монографии автора [I.9]. Из этих результатов следует, что необходимо изучать многочлены Якоби и при возрастающих индексах весовой функции.

В работах Р.С. Лариончикова [XI.19–XI.21] для исследования асимптотических свойств многочленов Якоби и других классических ортогональных многочленов применяются новейшие результаты по теории дифференциальных уравнений и, в частности, лемма М.В. Федорюка [V.5].

Глава VIII

В § 5 этой главы рассмотрены основные определения и первоначальные результаты по теории многочленов, ортогональных на дискретном множестве. Дальнейшие результаты по этому направле-

нию излагаются в монографиях Г. Сегё [I.6] и А.В. Никифорова, С.К. Суслова и В.Б. Уварова [I.4]. Следует отметить, что теория ортогональных многочленов дискретной переменной фактически является самостоятельной дисциплиной, которая развивается параллельно и независимо от общей теории ортогональных многочленов. В этой теории есть аналоги классических ортогональных многочленов. Более того, введены и рассмотрены оригинальные и весьма характерные классы ортогональных многочленов дискретной переменной, которые имеют важные применения в вычислительной математике и особенно в теории вероятностей. Такие системы ортогональных многочленов дискретной переменной ввели и исследовали В. Хан, Дж. Майкснер, М.Ф. Кравчук, С. Шарлье, Ф. Поллачек.

Глава IX

В монографии В.М. Амербаева [II.1] излагается новый подход к построению операционного исчисления. Основу этого подхода составляют формальные ряды Чебышева–Лагерра и метод аналитического продолжения функций. Рассматривается формула операционного соответствия (IX.4.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{p^{k+1}}. \qquad (1)$$

Главное внимание обращается на правую часть этой формулы. К ряду, стоящему в правой части, применяются различные методы суммирования и аналитического продолжения. В результате получается обобщенное изображение, которому ставится в соответствие обобщенный оригинал без конкретизации его. В пространстве обобщенных оригиналов и обобщенных изображений рассматриваются обычные формулы операционного исчисления. Таким образом, формула (1) значительно обобщает формулу преобразования Лапласа (IX.4.1).

Глава X

Значение ортогональных многочленов для технических наук давно признано. В качестве характерного примера можно привести широко известную книгу Анго А. «Математика для электро- и радиоинженеров» (М.: Наука, 1964). В этой книге подробно излагаются свойства многочленов Лежандра, Чебышева и многочленов Чебышева–Эрмита. Ортогональные многочлены применяются в теории оболочек (И.Н. Векуа), в теории упругости (А.И. Каландия, Ш.Е. Микеладзе), в аэродинамике и гидродинамике (Г.И. Петров), в строительной механике (Я.И. Протусевич) и в других технических науках.

В книге Б.Р. Левина «Теоретические основы статистической радиотехники» [IX.4] все классические ортогональные многочлены применяются для разложения плотности вероятности.

Наконец, в качестве весьма характерного примера можно упомянуть работу:

Taylor J. The value of orthogonal Polynomials in the Analysis of change-over trials with dairy cows // Biometrics. — 1967. — V. 23, № 2. — P. 297–311.

Глава XI

В работе [XI.31] излагаются две общих схемы применения классических ортогональных многочленов в математической физике.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$A\,u''_{tt} + B\sum_{k=1}^{m} u''_{x_k x_k} + C\,u'_t + (\lambda - v)\,u = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C — постоянные, λ — параметр, а неизвестная функция u и потенциал v зависят от $m+1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$.

Как показано в гл. II, классические ортогональные многочлены удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$D(x)\,y'' + [A(x) + D'(x)]\,y' - \gamma_n\,y = 0, \qquad (2)$$

где

$$A(x) = p_0 + p_1 x, \qquad D(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2, \qquad (3)$$

$$\gamma_n = n[p_1 + (n+1)q_2]. \qquad (4)$$

Собственные функции уравнения (1) можно искать в виде суперпозиции

$$u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = Q_n[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)]\exp\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, t), \qquad (5)$$

где многочлен $Q_n(x)$ удовлетворяет уравнению (2), а две вспомогательные функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ и $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ надо выбирать так, чтобы уравнение (1) при подстановке в него функции (5) превратилось в тождество (2). При этом с помощью формул (3) и (4) определяются собственные значения λ_n и потенциал v в уравнении (1).

Коэффициенты в формулах (3) и (4) определяются отдельно для многочленов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и для многочленов Якоби. Поэтому вспомогательные функции φ и Φ, а также собственные значения λ_n и потенциал v определяются отдельно для каждой из этих систем ортогональных многочленов. В результате получается много случаев. Во всех этих случаях в формуле для функции Φ, кроме конкретных слагаемых, прибавляется еще некоторая суперпозиция, составленная с помощью произвольной функции m

переменных

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{6}$$

которая дважды непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u'_t - a^2 \sum_{k=1}^{m} u''_{x_k x_k} + (\lambda - v)u = 0. \tag{7}$$

В этом случае потенциал определяется формулой

$$v = \Phi'_t - a^2 \left[\sum_{k=1}^{m} \Phi''_{x_k x_k} + \sum_{k=1}^{m} (\Phi'_{x_k})^2 \right]. \tag{8}$$

В случае многочленов Чебышева–Эрмита имеем решение

$$u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = H_n(\varphi) \exp \Phi, \tag{9}$$

где

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} x_k + abt, \quad \lambda_n = -2nma^2, \quad \Phi = c_1\varphi^2 + c_2 \sum_{k=1}^{m} x_k + F_1, \tag{10}$$

а функция F_1 определяется через функцию (6) по формуле

$$F_1 = F(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{m-1} - x_m, bt). \tag{11}$$

Разумеется, формула (9) дает решение уравнения (7) и при некоторых других функциях φ и Φ.

Вместо (9) можно рассматривать решения вида

$$u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = L_n(\psi; \alpha) \exp \Phi, \tag{12}$$

$$u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = P_n(\cos\omega; \alpha, \beta) \exp \Phi. \tag{13}$$

Аналогичные результаты получаются для телеграфного уравнения

$$u''_{tt} + cu'_t - a^2 \sum_{k=1}^{m} u''_{x_k x_k} + (\lambda - v)u = 0 \tag{14}$$

и для уравнения Шрёдингера

$$iu'_t + h \sum_{k=1}^{m} u''_{x_k x_k} + (\lambda - v) = 0. \tag{15}$$

Решения уравнений (14) и (15) получаются также в виде суперпозиций (9), (12) и (13). При этом все вспомогательные функции φ, ψ, ω и Φ различны, а потенциалы v в каждом случае определяются отдельно [XI.31].

По второй общей схеме, изложенной в работе [XI.31], вместо формулы (5) следует рассматривать формулу

$$u_N(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = t^p Q_N(\varphi) \exp \Phi, \tag{16}$$

где параметр p зависит от уравнения (1), от системы многочленов $Q_n(x)$ и от номера N. В отличие от формулы (5) формула (16)

определяет последовательность решений уравнения (1) при фиксированном λ. Например, если в уравнении теплопроводности (7) положить $\lambda = 0$, то при том же потенциале (8) в случае многочленов Чебышева–Эрмита последовательность (16) имеет вид

$$u_N(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) = t^p H_N(\varphi) \exp \Phi, \tag{17}$$

где

$$\varphi = \frac{b}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{m} x_k, \quad p = -2Nma^2b^2, \quad \Phi = \frac{c_3}{t} \sum_{k=1}^{m} x_k^2 + F_1. \tag{18}$$

Аналогичные результаты вида (16) и (17) получаются и для других пар «уравнение вида (1) и система многочленов $\{Q_n(x)\}$». При этом формулы (18) заменяются другими [XI.31, XI.37, XI.48].

Глава XII

В этой главе изложены классические первоначальные результаты по теории приближения функции. Все эти результаты обобщены, усилены и развиты в различных направлениях.

В дальнейшем развитии теории приближения функций наиболее важные результаты получили М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев, С.М. Никольский, А.А. Гончар, П.Л. Ульянов, О.В. Бесов, Л.Д. Кудрявцев, С.Н. Мергелян, Б.С. Кашин, С.Б. Стечкин, П.П. Коровкин, В.М. Тихомиров и другие.

По теории приближения функций периодически в разных странах проводятся международные конференции с большим числом участников. По результатам этих конференций издаются сборники научных трудов. Издаются специальные журналы по теории приближения функций.

В настоящее время теория приближения функций является самой популярной математической дисциплиной. Идеи и методы этой теории проникают во многие математические и технические дисциплины. В качестве характерных примеров можно привести две книги: Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. — Киев: Наукова думка, 1980. — 352 с.; Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1988. — 304 с.

Список литературы

В последние десятилетия теория ортогональных многочленов развивается очень интенсивно. Постоянно публикуется много работ, в которых рассматриваются собственные свойства ортогональных многочленов и особенно приложения этих многочленов в различных

областях науки и техники. Эти работы и результаты в них становятся необозримыми.

Список литературы состоит из одиннадцати разделов, в каждом из которых приведены наиболее важные и характерные работы.

Большинство работ из списка литературы процитированы в тексте. Многие работы упомянуты в предисловии и в комментариях. Некоторые работы в тексте не цитируются, но включены в список литературы, ибо имеют непосредственное отношение к тем результатам, которые излагаются в тексте.

Разумеется, список литературы в настоящей книге не является полным, и его можно было бы продолжить по всем разделам.

Прежде всего, кроме авторов, указанных в списке литературы, ортогональные многочлены изучали и применяли в разных вопросах В.П. Моторный, И.И. Шарапудинов, Б.Л. Голинский, Г.Л. Лопес, А.Д. Шишкин, С.Г. Кальней, Г.К. Энгелис, П. Неваи, С.Д. Байпай, Л.Л. Литтлджон, С.З. Рафльсон, З.С. Гриншпун, А.А. Цыганков, А.Р. Лакерник и многие другие.

Далее, в списке литературы приведены не все работы упомянутых там авторов.

Наконец, в первый раздел списка литературы можно было бы добавить монографии по теории ортогональных многочленов, авторами которых являются Р. Аски и М. Исмаил, Р. Аски и Дж. Вильсон, Т.С. Чихара, Р. Неваи, В. Ван Асше, М. Шнудер, Л. Фокс и И. Паркер.

Подробные списки работ имеются в монографиях и книгах, указанных в первом и втором разделах списка литературы. В обзорной статье [X.6] список литературы насчитывает 226 наименований.

Много статей по теории ортогональных многочленов ежегодно публикуется в журнале «Интегральные преобразования и специальные функции», а также в Информационном бюллетене этого журнала.

КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Исторически первой системой ортогональных многочленов были, по-видимому, многочлены Лежандра $\{P_n(x)\}$, которые ввел в 1785 г. А. Лежандр (1752–1833).

К. Якоби (1804–1851) ввел в 1854 г. многочлены $\{P_n(x;\alpha,\beta)\}$ в связи с решением гипергеометрического уравнения.

Определение многочленов Чебышева–Эрмита $\{H_n(x)\}$ встречается еще у П. Лапласа (1749–1827) в работе, опубликованной в 1810 г. А подробное исследование этих многочленов опубликовал в 1859 г. П.Л. Чебышев (1821–1894). Затем эти многочлены начал изучать в 1864 г. Ш. Эрмит (1822–1901).

Многочлены Чебышева–Лагерра при $\alpha = 0$ встречаются в трудах Ж. Лагранжа (1736–1813) и Н. Абеля (1802–1829), изданных посмертно соответственно в 1867 г. и в 1881 г. Независимо от этого многочлены $\{L_n(x)\}$ были вновь определены и подробно исследованы в работе П.Л. Чебышева, опубликованной в 1859 г. Затем эти многочлены изучал петербургский математик К.А. Поссе в 1873 г.

В общем случае при $\alpha > -1$ многочлены Чебышева–Лагерра $\{L_n(x;\alpha)\}$ были впервые определены и подробно рассмотрены в 1873 г. другим петербургским математиком Ю.В. Сохоцким (1842–1929). И лишь в 1876 г. вышла первая работа Э. Лагерра (1834–1886), в которой многочлены Чебышева–Лагерра рассматривались при условии $\alpha = 0$. Далее многочлены $\{L_n(x;\alpha)\}$ при условии $\alpha > -1$ в 1880 г. изучал Н.Я. Сонин (1849–1915).

Из вышесказанного по поводу многочленов $\{L_n(x;\alpha)\}$ следует, что эти многочлены более естественно называть многочленами Чебышева–Сохоцкого, но в силу традиции сохраняется наименование «многочлены Чебышева–Лагерра». К сожалению, в некоторых книгах, особенно зарубежных, эти многочлены при $\alpha = 0$ называются многочленами Лагерра, а в общем случае — обобщенными многочленами Лагерра.

Много работ по теории ортогональных многочленов опубликовал Л. Гегенбауэр (1849–1903). Он подробно исследовал многочлены Якоби при $\alpha = \beta$.

В библиографическом справочнике по теории ортогональных многочленов [I.13] указана всего лишь одна работа Б. Родрига (1794–1851). В этой работе для многочленов Лежандра была введена формула, которая позднее была названа формулой Родрига. Но в дальнейшем аналогичные формулы были получены другими математиками для многих систем ортогональных многочленов одного и двух переменных с сохранением названия.

Основы общей теории ортогональных многочленов в случае произвольного веса и произвольного интервала были заложены в трудах П.Л. Чебы-

шева, которому принадлежат также и наиболее существенные первоначальные результаты по всей теории приближения функций.

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев родился в 1821 г. в Калужской губернии. В 1841 г. окончил Московский университет. С 1847 г. по 1882 г. работал в Петербургском университете.

За выдающиеся научные труды и изобретения П.Л. Чебышев в 1853 г. был избран в Петербургскую академию наук, а затем — в Парижскую (1860 г.), Берлинскую (1871 г.), Болонскую (1873 г.), Лондонскую (1877 г.), Шведскую (1893 г.).

П.Л. Чебышев ввел многочлены наилучшего равномерного приближения функций, изучил их свойства и тем самым создал новое направление в математике — теорию приближения функций. В теории ортогональных многочленов он глубоко исследовал свойства общих и классических ортогональных многочленов.

В теории вероятностей П.Л. Чебышев своими трудами систематизировал научные факты, развил новые методы исследования, установил закон больших чисел и многие другие результаты. В теории чисел П.Л. Чебышев доказал важные теоремы о распределении простых чисел. В математическом анализе П.Л. Чебышеву принадлежит теорема об условиях интегрируемости в элементарных функциях дифференциального бинома, методы приближенного вычисления интегралов, различные неравенства.

П.Л. Чебышев — создатель науки о механизмах. Он впервые поставил и разрешил основные задачи по синтезу механизмов и сконструировал ряд сложных машин и приборов (паровая машина с параллелограммом Чебышева, арифмометр, центробежный регулятор и др.). Много лет П.Л. Чебышев работал в артиллерийском ведомстве. Он исследовал вопросы внешней и внутренней баллистики, занимался расчетом и конструированием орудий и снарядов, заложил основы применения теории вероятностей в артиллерийской стрельбе.

Большую работу П.Л. Чебышев проводил по развитию математического образования в России (разрабатывал школьные уставы, планы и программы, рецензировал математические учебники, принимал участие в организации Московского математического общества).

Умер П.Л. Чебышев в 1894 г.

Ввиду общепризнанных заслуг П.Л.Чебышева в развитии общей теории ортогональных многочленов в иностранной литературе и особенно во французских книгах и статьях продолжительное время общие ортогональные многочлены $\{B_n(x)\}$ в случае произвольного веса $h(x)$ и произвольного интервала (a, b) назывались *многочленами Чебышева*, и это наименование до недавнего времени фигурировало в названиях многих работ по общей теории ортогональных многочленов. Однако в отечественной литературе это название не удержалось, и теперь с именем П.Л. Чебышева связываются только четыре конкретные системы классических ортогональных многочленов.

В 1881 г. вышла монография Г. Орлова [I.5]. На титульном листе указано, что эта работа представлена на физико–математический факультет Санкт–Петербургского университета для получения степени магистра чистой математики. В этой монографии излагаются различные свойства многочленов Лежандра, Чебышева, общих многочленов Якоби, а также

свойства многочленов Эрмита по двум переменным. Цитируются работы П.Л. Чебышева, К. Якоби, Ф. Дидона, Ш. Эрмита. Рассматриваются производящие функции для различных систем ортогональных многочленов. Изложение вполне современное. В целом книгу Г. Орлова можно рассматривать как первую монографию по теории ортогональных многочленов.

Следует заметить, что первоначально ортогональные многочлены во многих работах и особенно в работах Т. Стилтьеса (1856–1894) изучались в процессе исследования некоторых типов непрерывных дробей, причем определением ортогональных многочленов было минимальное свойство, которое сформулировано в теореме 1.11 как второй критерий ортогональности, а ортогональность доказывалась как свойство.

Весьма существенные результаты в теории ортогональных многочленов получил Владимир Андреевич Стеклов (1864–1926).

В.А. Стеклов ввел понятие замкнутости, доказал замкнутость систем многочленов Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра, рассмотрел примеры незамкнутых систем ортогональных многочленов и сформулировал общие условия незамкнутости.

В.А. Стеклов разработал весьма эффективный метод исследования асимптотических свойств классических ортогональных многочленов. В упрощенном виде этот метод применялся Ж. Лиувиллем (1809–1882) для изучения асимптотических свойств решений некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В.А. Стеклов усовершенствовал этот метод и применил его к классическим ортогональным многочленам. Метод Лиувилля–Стеклова подробно излагается в гл. IV–VII.

Разумеется, метод Лиувилля–Стеклова можно изложить в общем виде применительно ко всей системе классических ортогональных многочленов. Но наибольший эффект достигается в том случае, когда этот метод применяется к конкретным частным системам классических ортогональных многочленов (многочлены Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общие многочлены Якоби), ибо в каждом из этих случаев условия применения метода различны и поэтому получаются различные асимптотические формулы с различными оценками остаточных членов.

В 1921 г. В.А. Стеклов сформулировал задачу о необходимых и достаточных условиях на весовую функцию, при которых система ортонормированных многочленов ограничена в отдельной точке, на некотором множестве либо на всем сегменте ортогональности. Эта задача В.А. Стеклова, а также ее различные обобщения и модификации рассматривались многими авторами. Подробный обзор полученных по этой теме результатов содержится в работе [X.6].

Большое число работ посвящено исследованию классических ортогональных многочленов как единой системы. В гл. II установлены *пять свойств* классических ортогональных многочленов.

1. Весовая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона и некоторым граничным условиям.

2. Ортогональный многочлен является решением некоторого дифференциального уравнения второго порядка.

3. Ортогональные многочлены представляются через весовую функцию по формуле Родрига.

4. Имеется простая конкретная формула представления производящей функции через весовую функцию.

5. Производные ортогональных многочленов также ортогональны на том же интервале.

Этими свойствами обладают только классические ортогональные многочлены, т. е. многочлены Якоби, Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра, а также многочлены, получающиеся из этих трех систем линейными преобразованиями независимого переменного. В некоторых работах излагаются выводы одних этих свойств из других. Все эти вопросы рассматривали Н.Я. Сонин, В. Хан, М. Уэбстер, Х. Кролл, С. Бохнер, Ф. Трикоми и многие другие, причем некоторые результаты передоказывались и публиковались повторно математиками разных стран.

Много работ по теории ортогональных многочленов опубликовал А.А. Марков (1856–1922). Результаты А.А. Маркова подробно описаны в обзорной статье [X.7].

Классические результаты в теории ортогональных многочленов получил венгерский математик Габор Сегё (1895–1985). Он открыл новый метод исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на окружности с произвольным весом. С помощью этого метода Г. Сегё получил асимптотические формулы для ортогональных многочленов вне окружности и на самой окружности. Далее, Г. Сегё нашел формулу представления многочленов, ортогональных на сегменте, через многочлены, ортогональные на окружности. С помощью этой формулы были подробно исследованы асимптотические свойства многочленов, ортогональных на сегменте.

Сергей Натанович Бернштейн (1880–1968) разработал еще один метод исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на сегменте. Этот метод основан на результатах теории приближения функций [I.2].

Главной книгой по теории ортогональных многочленов, безусловно, является монография Г. Сегё [I.6], впервые изданная в 1939 г. Русский перевод этой, вышедший в 1962 г., содержит дополнения Я.Л. Геронимуса, в которых дается подробный обзор всех результатов по теории ортогональных многочленов, полученных примерно за 20 лет.

В монографии Г. Сегё [I.6] излагаются все наиболее важные результаты по теории ортогональных многочленов, подробно рассматриваются методы Сегё и Стеклова.

Большое число работ по теории ортогональных многочленов опубликовал харьковский математик Яков Лазаревич Геронимус (1898–1982). Его монография [I.1] содержит подробный обзор многочисленных результатов, полученных отечественными математиками. А вторая его монография [I.2] посвящена развитию методов Сегё и Бернштейна.

Весьма важные результаты по теории ортогональных многочленов получены в работах Е.А. Рахманова [XI.23–XI.25]. В этих работах приводятся сложные контрпримеры в связи с известной проблемой Стеклова в теории ортогональных многочленов при наиболее общих условиях на весовую функцию.

В работах В.М. Бадкова [XI.8–XI.12] глубоко исследованы аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным многочленам и асимпто-

тические свойства ортогональных многочленов при степенных и логарифмических особенностях весовых функций.

Челябинский математик Г.И. Барков (1932–1961) получил важные результаты о преобразованиях весовой функции системы ортогональных многочленов [XI.17] и о свойствах многочленов, ортогональных на двух сегментах [XI.16].

Венгерский математик Г. Фройд (1922-1979) опубликовал весьма содержательную монографию [I.11] и много других работ по теории ортогональных многочленов.

В монографии Б.П. Осиленкера [I.12] рассматриваются многие важные результаты о сходимости и суммируемости рядов Фурье по общим ортогональным многочленам.

В комплексной области Г. Сегё ввел многочлены, ортогональные по контуру, и рассмотрел их свойства при простейших условиях.

Т. Карлеман (1892–1949) и С. Бохнер (1899–1982) почти одновременно ввели комплексные многочлены, ортогональные по площади области.

В библиографическом справочнике по теории ортогональных многочленов [I.13], изданном в 1940 г., приводится примерно 2000 работ. Редактором этого справочника является известный специалист по теории ортогональных многочленов Я.А. Шохат (1866–1944). Дальнейшие списки работ, а также исторические сведения имеются в книгах [I.1, I.2, I.6, III.8, IV.2, IV.4, VII.1].

Все вышесказанное относится к случаю ортогональности по одному переменному. А в случае двух и более переменных ортогональные многочлены изучены значительно меньше, хотя основные определения и простейшие свойства этих многочленов были рассмотрены более 100 лет назад.

В 1865 г. Ш. Эрмит ввел многочлены по двум переменным (XI.7.13) и доказал, что эти многочлены удовлетворяют дифференциальному уравнению (XI.7.14) при условиях (XI.7.15). При этом оказалось, что свойство ортогональности двух многочленов Эрмита $H_{nm}(x, y; \alpha)$ и $H_{pk}(x, y; \alpha)$ имеет место лишь в том случае, когда эти многочлены имеют разные степени по совокупности переменных. Поэтому для рассмотрения разложений вида (XI.7.17) и (XI.7.18) вводится соответствующая биортогональная система многочленов по двум переменным.

В 1881 г. П. Аппель (1855–1930) ввел многочлены по двум переменным (XI.7.4) и доказал, что они удовлетворяют дифференциальному уравнению (XI.7.5) при условии (XI.7.6). Как и в случае многочленов Эрмита, свойство ортогональности для многочленов Аппеля $A_{nm}(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$ и $A_{pk}(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$ выполняется лишь в том случае, когда эти многочлены имеют разные степени по совокупности переменных. Поэтому для рассмотрения разложений вида (XI.7.8) и (XI.7.9) вводится соответствующая биортогональная система многочленов [I.9].

Таким образом, первоначально при введении классических многочленов Эрмита и Аппеля исходными были формулы Родрига и соответствующие им дифференциальные операторы.

В 1881 г. Г. Орлов [I.5] рассмотрел свойства некоторых многочленов по двум переменным, определяемых формулой Родрига.

В 1926 г. вышла большая монография П. Аппеля и Ж. Кампе де Ферье [I.10], в которой подробно излагаются свойства многочленов Аппеля

двух переменных и многочленов Эрмита по многим переменным. При этом основным аппаратом исследования являются обобщенные гипергеометрические функции двух и более переменных.

В 1938 г. американский математик Д. Джексон (1888–1946) рассмотрел простейшие свойства многочленов по двум переменным, ортогональных по области с произвольным весом. При этом оказалось, что весовая функция и область ортогональности при каждом n определяют некоторое пространство размерности $n+1$ ортогональных многочленов степени n. Для таких многочленов установлены аналогичные одномерному случаю алгебраические и экстремальные свойства, а также рассмотрены ряды Фурье по этим многочленам.

Подробный обзор всех вышеупомянутых результатов по теории ортогональных многочленов нескольких переменных содержится в справочнике Г. Бейтмена и Д.А. Эрдейи [IV.2]. В библиографическом справочнике [I.13] перечисляются все работы по теории ортогональных многочленов двух и более переменных, опубликованные до 1940 г.

Как известно [II.2], в вычислительной математике важную роль играют квадратурные формулы с наивысшей алгебраической степенью точности. В этих формулах применяются ортогональные многочлены. Такие формулы впервые рассматривал великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1775–1855). Поэтому эти формулы называются квадратурами типа Гаусса.

В 1981 г. вышла монография И.П. Мысовских «Интерполяционные кубатурные формулы» (М.: Наука, 1981). В этой книге рассматриваются различные экстремальные задачи из теории кубатурных формул и аналогично одномерному случаю широко применяются ортогональные многочлены двух и более переменных. В связи с этим в книге излагаются необходимые общие свойства ортогональных многочленов нескольких переменных и рассматриваются многие наиболее важные частные случаи.

Анализ содержания монографии И.П. Мысовских показывает, что применение ортогональных многочленов при построении кубатурных формул опережает и стимулирует развитие самой теории ортогональных многочленов нескольких переменных.

В 1988 г. вышла монография автора [I.9]. В этой монографии подробно излагаются общие свойства ортогональных многочленов по двум переменным. Но главное внимание уделяется связям ортогональных многочленов с дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом излагаются результаты Д. Джексона, П. Аппеля, Г. Кролла и И. Шеффера, Г.К. Энгелиса, Т. Коорнвиндера, С.А. Агаханова и многих других авторов.

Прежде всего, необходимо отметить своеобразие методики введения наиболее важных и характерных классов ортогональных многочленов по двум переменным. Так, например, классические многочлены Эрмита и Аппеля были введены не по свойству ортогональности, а как собственные функции некоторых дифференциальных операторов в частных производных второго порядка с коэффициентами в виде многочленов по двум переменным. При этом оказалось, что первоначально определенные по формуле Родрига многочлены Эрмита и Аппеля не являются полностью ортогональными. Но соответствующие дифференциальные операторы однозначно определяют области ортогональности и весовые функции Аппеля и Эрмита

в них. А тогда уже по теореме существования, которая справедлива и для случая двух переменных, однозначно определяются некоторые основные системы ортогональных многочленов Эрмита и Аппеля, которые уже могут не удовлетворять соответствующим исходным дифференциальным уравнениям.

В связи с этой оригинальной методикой, первоначально разработанной Ш. Эрмитом и П. Аппелем, в теории ортогональных многочленов двух переменных вводится понятие допустимого дифференциального оператора. А именно, некоторый дифференциальный оператор $D(u)$ в частных производных второго порядка с коэффициентами в виде многочленов называется допустимым, если для данного оператора $D(u)$ существует такая бесконечная последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$, что при каждом n уравнение $D(u) = \lambda_n u$ имеет $n+1$ линейно независимых решений в виде алгебраических многочленов двух переменных степени n. Эти многочлены называются фундаментальными многочленами оператора $D(u)$. Поскольку оператор $D(u)$ однозначно определяет и область ортогональности G, и весовую функцию $h(x, y)$ в ней, то возникает естественная задача нахождения всех таких допустимых операторов, для которых фундаментальные многочлены являются ортогональными или хотя бы биортогональными. Такие многочлены можно рассматривать как обобщение классических ортогональных многочленов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и общих многочленов Якоби на случай двух переменных.

В 1967 г. Г. Кролл и И. Шеффер подробно рассмотрели свойства допустимых дифференциальных операторов, нашли необходимые и достаточные условия допустимости и указали девять различных классов таких операторов. Разумеется, в число этих девяти классов вошли и системы, первоначально рассмотренные Ш. Эрмитом и П. Аппелем.

Аналогичные результаты получил в 1974 г. рижский математик Г.К. Энгелис, но он применил другой метод исследования и, кроме того, получил формулу Родрига для некоторых из девяти классов фундаментальных многочленов.

Разумеется, кроме этих девяти классов ортогональных многочленов существует много других характерных систем ортогональных многочленов двух переменных, которые не входят в эту классификацию.

Весьма оригинальные системы ортогональных многочленов по двум переменным рассмотрел Т. Коорнвиндер.

Все эти результаты изложены в монографии автора [I.9].

В последнее время А.Д. Шишкин ввел некоторые обобщения классических ортогональных многочленов на случай многих переменных. Результаты А.Д. Шишкина изложены в английском издании монографии автора [I.9].

При переходе к двум переменным наиболее важные обобщения классических ортогональных многочленов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и Якоби получаются в тех случаях, когда исходными являются допустимые дифференциальные операторы эллиптического типа. Перечислим наиболее характерные такие случаи.

1. Дифференциальный оператор Эрмита (XI.7.14)

$$D_1[u] = (x^2 - 1)\, u''_{xx} + 2xy\, u''_{xy} + (y^2 - 1)\, u''_{yy} + B\,(x\, u'_x + y\, u'_y)$$

эллиптичен в единичном круге (XI.7.11) и определяет там весовую функ-

цию (XI.7.12). При этом многочлены Эрмита определяются по формуле Родрига (XI.7.13).

2. Дифференциальный оператор Аппеля (XI.7.5)

$$D_2[u] = x(x-1)\,u''_{xx} + 2xy\,u''_{xy} + y(y-1)\,u''_{yy} + \\ + [(\gamma+1)x-\alpha]\,u'_x + [(\gamma+1)y-\beta]\,u'_y$$

эллиптичен в треугольнике (XI.7.1) и определяет там весовую функцию (XI.7.2). А многочлены Аппеля определяются по формуле Родрига (XI.7.4).

3. Дифференциальный оператор (XI.7.23)

$$D_3[u] = x\,u''_{xx} + 2y\,u''_{xy} + y\,u''_{yy} + (\gamma x+\alpha+\beta+2)\,u'_x + (\gamma y+\alpha+1)\,u'_y$$

эллиптичен в половине первого координатного угла (XI.7.20), в котором определяет весовую функцию (XI.7.21).

4. Дифференциальный оператор

$$D_4[u] = (x^2-2px)\,u''_{xx} + 2(xy-py)\,u''_{xy} + (y^2-x)\,u''_{yy} + \\ + (Bx+d)\,u'_x + (By+g)\,u'_y$$

эллиптичен в области

$$G_4 = \{(x,y)\colon\ p^2y^2 < x^2(2p-x),\ p>0\}$$

и определяет там весовую функцию

$$h_4(x,y) = (2px^2 - x^3 - p^2y^2)^\alpha.$$

5. Дифференциальный оператор

$$D_5[u] = \left(x^2+\frac{x}{2}-y+\frac{9}{16}\right)u''_{xx} + 2\left(xy+\frac{x}{4}+\frac{y}{4}-\frac{9}{16}\right)u''_{xy} + \\ + \left(y^2-x+\frac{y}{2}+\frac{9}{16}\right)u''_{yy} + (Bx+d)\,u'_x + (By+g)\,u'_y$$

эллиптичен в области

$$G_5 = \left\{(x,y)\colon \frac{9xy}{4} - x^3 - y^3 > 0\right\}$$

и определяет там весовую функцию

$$h_5(x,y) = \left(\frac{9xy}{4} - x^3 - y^3\right)^\alpha.$$

6. Дифференциальный оператор

$$D_6[u] = (x^2-3x+1)\,u''_{xx} + 2(xy-x-y+2)\,u''_{xy} + (y^2-3y+1)\,u''_{yy} + \\ + (Bx+d)\,u'_x + (By+g)\,u'_y$$

эллиптичен в области

$$G_6 = \{(x,y)\colon 3-x-y>0,\ xy-1>0\}$$

и определяет там весовую функцию

$$h_6(x,y) = (3-x-y)^\alpha(xy-1)^\beta.$$

7. Дифференциальный оператор

$$D_7[u] = (x^2-x)\,u''_{xx} + 2xy\,u''_{xy} + (y^2-x-1)\,u''_{yy} + (Bx+d)\,u'_x + (By+g)\,u'_y$$

эллиптичен в полукруге

$$G_7 = \{(x, y) : x > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$$

и определяет там весовую функцию

$$h_7(x, y) = x^\alpha (1 - x^2 - y^2)^\beta.$$

8. Дифференциальный оператор

$$D_8[u] = (x^2 - x)\, u''_{xx} + 2(xy - y)\, u''_{xy} + (y^2 - 1)\, u''_{yy} + \\ + (Bx + \alpha)\, u'_x + (By + g)\, u'_y$$

эллиптичен в области

$$G_8 = \{(x, y) : y^2 < x < 1\}$$

и определяет там весовую функцию

$$h_8(x, y) = (1 - x)^\alpha (x - y^2)^\beta.$$

9. Обобщенный дифференциальный оператор Эрмита

$$D_9[u] = (x^2 - a^2)\, u''_{xx} + 2xy\, u''_{xy} + (y^2 - b^2)\, u''_{yy} + (Bx + \alpha)\, u'_x + (By + g)\, u'_y$$

эллиптичен в эллипсе с полуосями a и b и определяет там весовую функцию

$$h_9(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^\alpha.$$

Еще три допустимых дифференциальных оператора определяются формулами (XI.6.26), (XI.6.34) и (XI.6.47).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Книги по теории ортогональных многочленов

1. Геронимус Я.Л. Теория ортогональных многочленов (Обзор достижений отечественной математики). — М.: Гостехиздат, 1950. — 164 с.
2. Геронимус Я.Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. — М.: Физматгиз, 1958. — 240 с.
3. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948. — 260 с.
4. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. — М.: Наука, 1985. — 216 с.
5. Орлов Г.А. О некоторых полиномах с одною и многими переменными. — СПб.: Изд-во Академии наук, 1881. — 124 с.
6. Сегё Г. Ортогональные многочлены / Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.
7. Старинец В.В. Обобщенно-классические ортогональные многочлены. — М.: Изд-во МГУП, 2000. — 462 с.
8. Суетин П.К. Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бибербаха // Труды МИАН СССР. Т. 100. — М.: Наука, 1971. — 92 с.
9. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. — М.: Наука, 1988. — 384 с.
10. Appell P., Kampé de Feriet J. Fonction hypergeométriques et hypersphériques. Polynome d'Hermite. — Paris: Gauthier–Villars, 1926. — 441 p.
11. Freud G. Orthogonale Polynome. — Berlin: Deutscher Verl. der Vissenschaften, 1969. — 294 s.
12. Osilenker B.P. Fourier series in orthogonal polynomials. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999. — 296 p.
13. Shohat J.A., Hille E., Walsh J.L. A bibliography on orthogonal polynomials // Bull. of the Nat. Res. Conn., № 103. — Washington: Pabl. National Academy of Sciences, 1940. — 204 p.

II. Книги по наиболее важным применениям ортогональных многочленов

1. Амербаев В.М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра. — Алма-Ата: Изд-во АН КазССР, 1974. — 182 с.

2. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1967. — 500 с.
3. Н е м ч и н о в В.С. Полиномы Чебышева и математическая статистика. — М.: Изд-во Моск. сельхозакадемии, 1946. — 139 с.
4. Н и к и ш и н Е.М., С о р о к и н В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. — М.: Наука, 1988. — 256 с.
5. П а ш к о в с к и й С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / Пер. с польск. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
6. R u s e v P. Analytic functions and classical orthogonal Polynomials. — Sofia: Pablishing house of the Bulgarian Academy of Sciences, 1984. — 134 p.

III. Некоторые книги по теории приближения функций

1. А х и е з е р Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — 2-е изд. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
2. Б а р и Н.К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
3. Б е й к е р Дж., Г р е й в с-М о р и с П. Аппроксимации Паде / Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 504 с.
4. Г о н ч а р о в В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. — 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1954. — 328 с.
5. К а ч м а ж С., Ш т е й н г а у з Г. Теория ортогональных рядов / Пер. с нем. — М.: Физматгиз, 1958. — 508 с.
6. К а ш и н Б.С., С а а к я н А.А. Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 496 с.
7. К о р о в к и н П.П. Линейные операторы и теория приближений. — М.: Физматгиз, 1959. — 212 с.
8. Н а т а н с о н И.П. Конструктивная теория функций. — М.: Гостехиздат, 1949. — 688 с.
9. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
10. С м и р н о в В.И., Л е б е д е в Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.–Л. : Наука, 1964. — 440 с.
11. С у е т и н П.К. Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984. — 336 с.
12. Т и м а н А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.
13. Т и х о м и р о в В.М. Некоторые вопросы теории приближения функций. — М.: Изд-во МГУ, 1976. — 304 с.
14. У о л ш Дж.Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961. — 508 с.

IV. Книги по специальным функциям

1. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра / Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
2. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1974. — 296 с.

3. Гаспер Дж., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды / Пер. с англ. — М.: Мир, 1993. — 350 с.
4. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1952. — 476 с.
5. Кузнецов Д.С. Специальные функции. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1965. — 424 с.
6. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их применения. — 2-е изд. — М.–Л.: Физматгиз, 1963. — 358 с.
7. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
8. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — 2-е изд. — М.: Наука, 1984. — 344 с.

V. Некоторые книги по дифференциальным уравнениям

1. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. — М.: Физматгиз, 1963. — 340 с.
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с.
3. Стеклов В.А. Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и их приложение к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1956. — 138 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
5. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.

VI. Некоторые книги по вычислительной математике

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. I. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1973. — 632 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. I. — 3-е изд. — М.: Физматгиз, 1966. — 632 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — 5-е изд. — М.: Наука, 1962. — 708 с.
4. Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. — М.: Наука, 1995. — 580 с.
5. Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р. Математический анализ (вычисление элементарных функций). — М.: Физматгиз, 1963. — 248 с.

VII. Справочники и таблицы

1. Абрамовиц М., Стиган И. (Ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Пер. с англ. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. Айзенштат В.С., Крылов В.И., Метельский А.С. Таблицы многочленов и функций Лягерра. — Минск: Изд-во АН Бел. ССР, 1963. — 160 с.

3. Белоусов С.А. Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — 380 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
5. Кармазина Л.Н. Таблицы полиномов Якоби. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — 250 с.
6. Кронрод А.С. Узлы и веса квадратурных формул. Шестнадцатизначные таблицы. — М.: Наука, 1964. — 144 с.
7. Крылов В.И., Скобля Н.С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. — Минск: Наука и техника, 1968. — 296 с.
8. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа (Справочная книга). — Минск: Наука, 1974. — 224 с.
9. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966. — 370 с.
10. Справочник по антенной технике. В 5 т. Т. I. — М.: ИПРЖР, 1997. — 256 с.

VIII. Книги по общим математическим дисциплинам

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 6-е изд. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — 4-е изд. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
3. Математическая энциклопедия. Т. I–V. — М.: Сов. энциклопедия, 1977–1985.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — 3-е изд. — СПб.: Лань, 1999. — 560 с.
5. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. II / Пер. с нем. — 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1956. — 432 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979. — 228 с.
7. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. II / Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1963. — 516 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. — 6-е изд. — М.: Физматгиз, 1966. — 608 с.

IX. Книги по техническим применениям теории ортогональных многочленов

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 1983. — 536 с.
2. Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д. Синтез излучающих систем (теория и методы расчета). — М.: Сов. радио, 1974. — 232 с.
3. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн (фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом). — М.: Сов. радио, 1980. — 296 с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 652 с.

5. Минкович Б.М., Яковлев В.П. Теория синтеза антенн. — М.: Сов. радио, 1969. — 296 с.
6. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 440 с.
7. Херреро Д., Уиллонер Т. Синтез фильтров / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1971. — 232 с.

X. Некоторые обзорные статьи

1. Гагаев Б.М. Работы казанских математиков по ортогональным системам // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, вып. 4. — С. 251–262.
2. Гагаев Б.М. Работы казанских математиков по ортогональным системам (1957–1959 гг.) // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 168–178.
3. Гагаев Б.М. Некоторые свойства ортогональных многочленов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям высшего порядка // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. — Баку, Изд-во АН Азерб. ССР, 1965 — С. 419–424.
4. Геронимус Я.Л. Дополнения // Сегё Г. Ортогональные многочлены / Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 414–494.
5. Жижиашвили Л.В., Топурия С.Б. Ряды Фурье–Лапласа на сфере // Математический анализ. Т. 15. Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1977. — С. 83–130.
6. Суетин П.К. Проблема В.А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Математический анализ. Т. 15. Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1977. — С. 5–82.
7. Суетин П.К. Работы академика А.А. Маркова по математическому анализу // Гродзенский С.Я. Андрей Андреевич Марков. — М.: Наука, 1987. — С. 164–222.

XI. Научные статьи и тезисы докладов

1. Агаханов С.А., Натансон Г.И. Приближение функций суммами Фурье–Якоби // Доклады АН СССР. — 1966. — Т. 166, № 1. — С. 9–10.
2. Андрианов С.Н. Равносходимость и множества единственности ортогональных полиномов // Известия Казан. физ.–матем. общества. — 1945. — Т. 13, № 3. — С. 51–92.
3. Аптекарев А.И. Асимптотика ортогональных многочленов в окрестости концов интервала ортогональности // Матем. сб. — 1992. — Т. 183, № 5. — С. 43–62.
4. Аптекарев А.И., Буяров В.С., Дегеза И.С. Асимптотическое поведение L^p-норм и энтропии для общих ортогональных многочленов // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, № 8. — С. 3–30.
5. Арутюнян Р.В. Оценки скорости максимальной сходимости рядов Фурье–Лагерра // Применение функционального анализа в теории приближений. — Калинин: Калин. гос. ун-т, 1988. — С. 12–15.

6. Арутюнян Р.В. Оценки скорости максимальной сходимости рядов Фурье–Якоби для аналитических функций. — Киев: Наукова думка, 1989. — С. 18–20.
7. Арутюнян Р.В. Ряды Фурье–Эрмита для аналитических функций в канонических областях // Теория функций и приближений: Тр. IV Сарат. зимней школы. Т. IV, № 2. — Саратов: Сарат. гос. ун-т, 1990. — С. 28–30.
8. Бадков В.М. Сходимость в среднем и почти всюду рядов Фурье по многочленам, ортогональным на отрезке // Матем. сб. — 1974. — Т. 95, № 2. — С. 229–262.
9. Бадков В.М. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи матем. наук. — 1978. — Т. 33, № 4 (202). — С. 51–106.
10. Бадков В.М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. Мат. инст. им. В.А.Стеклова. — 1980. — Т. 145. — С. 20–62.
11. Бадков В.М. О системах ортогональных многочленов, выражающихся в явном виде через многочлены Якоби // Матем. заметки. — 1987. — Т. 42, № 5. — С. 650–659.
12. Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. Мат. инст. им. В.А. Стеклова. — 1992. — Т. 198. — С. 41–88.
13. Байгузов Н.С. Приближенное дифференцирование с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Эрмита // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 182, № 1 — С. 16–19.
14. Байгузов Н.С. Некоторые оценки для производных алгебраических многочленов и их применение к приближенному дифференцированию // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, вып. 2. — С. 183–195.
15. Байгузов Н.С. О скорости сходимости продифференцированных интерполяционных многочленов Лагранжа и Эрмита // Доклады АН СССР. — 1969. — Т. 188, № 3. — С. 507–511.
16. Барков Г.И. О некоторых системах многочленов, ортогональных на двух симметричных интервалах // Известия вузов. Математика. — 1960. — № 4. — С. 3–16.
17. Барков Г.И. К вопросу сравнения ограниченности двух ортогональных нормированных систем многочленов // Тр. Челяб. пед. ин-та. — 1964. — № 2. — С. 5–12.
18. Гусевский В.И. Применение метода апертурных ортогональных полиномов в антенной технике // Радиотехнические тетради. — М.: МЭИ, 1991. — С. 56–68.
19. Лариончиков Р.С. Об одной новой асимтотической формуле для многочленов Якоби // Тр. XXIII конф. молодых ученых мех.–мат. фак. МГУ (9–14 апреля 2001 г.). — С. 229–232.
20. Лариончиков Р.С. Формула Планшереля–Ротаха для функций Чебышева–Эрмита на сужающихся к бесконечности полуинтервалах // Матем. заметки. — 2002. — Т. 72, вып. 1. — С. 74–83.
21. Лариончиков Р.С. Асимптотическая формула для многочленов Лежандра // Матер. X межд. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». 15–18 апреля 2003 г. — М., 2003. — С. 305.

22. О с и л е н к е р Б.П. О квазипотенциальных функциях, ассоциированных с ортогональными полиномами // Доклады РАН. — 1995. — Т. 342, № 5. — С. 589–591.
23. Р а х м а н о в Е.А. О гипотезе В.А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Матем. сборник. — 1979. — Т. 108, № 4. — С. 581–608.
24. Р а х м а н о в Е.А. К проблеме В.А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 254, № 4. — С. 851–854.
25. Р а х м а н о в Е.А. Об оценках роста ортогональных многочленов, вес которых отграничен от нуля // Матем. сборник. — 1981. — Т. 114, № 2. — С. 269–298.
26. С у е т и н П.К. О представлении непрерывных и дифференцируемых функций рядами Фурье по многочленам Лежандра // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 158, № 6. — С. 1275–1277.
27. С у е т и н П.К. Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру // Успехи математических наук. — 1966. — Т. 21, вып. 2. — С. 41–88.
28. С у е т и н П.К. Решение уравнений в дискретных свертках в связи с некоторыми задачами из радиотехники // Успехи математических наук. — 1989. — Т. 44, вып. 5 (239). — С. 97–116.
29. С у е т и н П.К. Собственные функции преобразования Лапласа (нерешенные задачи) // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. — Т. 1, № 2. — 1997. — С. 46–47.
30. С у е т и н П.К. Ортогональные многочлены в комплексной области и пространства обобщенных функций // Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч. тр. Ч. 2. — Тверь: Тверс. гос. ун-т, 1998. — С. 170–173.
31. С у е т и н П.К. Классические ортогональные многочлены в математической физике // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. — Т. 1, № 3. — 1998. — С. 13–16.
32. С у е т и н П.К. Применение рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам двух переменных к решению ассоциированных с ними неоднородных уравнений эллиптического типа // VII межд. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование». Межд. симп. «Ряды Фурье и их приложения». 26 мая–1 июня 1999 г.: Тез. докл. — Ростов-на-Дону, 1999. — С. 344–345.
33. С у е т и н П.К. Обратные задачи математической теории фильтрации двумерных дискретных сигналов // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. науч. тр. — Тверь: Тверс. гос. ун-т, 1999. — С. 86–90.
34. С у е т и н П.К. Новый метод приближенного решения задач фазового синтеза из теории антенн // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Тверс. гос. ун-т, 2000. — С. 102–108.
35. С у е т и н П.К. Оптимальный выбор узлов интерполяции в формуле Лагранжа для приближенного дифференцирования // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. — Т. 2, № 1. — 2001. — С. 115–118.
36. С у е т и н П.К. Сходимость и расходимость рядов Фурье по многочленам Чебышева–Эрмита для целых функций различных порядков // X межд. конф. «Математика. Экономика. Образование». II межд. симп.

«Ряды Фурье и их приложения». 27 мая–2 июня 2002 г.: Тез. докл. — Ростов-на-Дону, 2002. — С. 49.

37. Суетин П.К. Применение ультрасферических многочленов Гегенбауэра к решению телеграфного уравнения при некоторых потенциалах // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. — Т. 3, № 1. — 2002. — С. 18–21.
38. Фадеев Н.П. О дифференциальных уравнениях для некоторых ортогональных многочленов // Известия вузов. Математика. — 1976. — № 5 (168). — С. 99–103.
39. Фадеев Н.П. Полиномы, ортогональные с весом на двух симметричных промежутках // Вопросы функционального анализа. — Сыктывкар, 1991. — С. 130–134.
40. Хаиров Р.А. Ортогональные системы дробно–рациональных функций с симметричным весом на полуоси // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Тверс. гос. ун-т, 2000. — С. 115–122.
41. Aptekarev A.I., Marcellan F., Rocha I.A. Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi–Bessel polynomials // Journal of Approximation Theory. — 1997. — V. 90, № 1. — P. 117–146.
42. Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // American Journ. Mathem. — 1965. — V. 87. — P. 695–708.
43. Igashov S.Yu. Asymptotic approximation and weight estimate for the Laguerre polynomials // Integral Transforms and Special Functions. — 1999. — V. 8, № 3–4. — P. 209–216.
44. Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I. II // Transactions of the American Mathem. Soc. — 1970. — V. 147. — P. 419–431; 433–460.
45. Suetin P.K. Orthogonal polynomials in two variables in filtration theory of the two dimensional digital signals // Integral Transforms and Special Functions. — 1993. — V. 1., № 2. — P. 135–141.
46. Suetin P.K. The weight estimates for classical orthogonal polynomials (Open problems) // Integral Transforms and Special Functions. — 1994. — V. 2, № 3. — P. 239–242.
47. Suetin P.K. New applications of orthogonal polynomials to some problems of the antennas theory // Integral Transforms and Special Functions. — 1997. — V. 5, № 3–4. — P. 273–286.
48. Suetin P.K. Classical orthogonal polynomials in the theory of Shrödinger equation // International Workshop «Self-Similar Systems». July 30–August 7, 1998. — Dubna, 1999. — P. 390–391.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель Н. 458
Агаханов С.А. 261, 463
Амербаев В.М. 453
Андрианов С.Н. 79
Аппель П. 463
Аптекарев А.И. 471
Арутюнян Р.В. 119, 267
Аски Р. 193, 230, 457
Ахиезер Н.И. 80, 274

Бадков В.М. 261, 294, 461
Байгузов Н.С. 318, 320
Барков Г.И. 79, 297, 462
Бахвалов Н.С. 326
Березин И.С. 325
Бернштейн С.Н. 132, 256, 261, 286, 303, 305, 424, 429, 461
Бесов О.В. 456
Боголюбов А.Н. 6
Бохнер С. 462
Бржечка В.Ф. 80

Ваингер С. 193, 230
Ван Асше В. 457
Векуа И.Н. 453
Вилсон Дж. 457

Гавриков М.Б. 6, 326
Гагаев Б.М. 79, 471
Гаспер Дж. 468
Гаусс К.Ф. 307, 463
Гегенбауэр Л. 458
Геронимус Я.Л. 80, 274, 294, 461
Гобсон Е.В. 161, 449
Гончар А.А. 456
Голинский Б.Л. 294
Гусевский В.И. 340

Джексон Д. 424, 450, 463
Дзядык В.К. 429
Дидон Ф. 460
Дмитриев А.Н. 360

Егупов Н.Д. 360

Жидков Н.П. 325

Зелкин Е.Г. 360
Золотарев Е.И. 108
Зорщиков А.В. 261

Исмаил М. 457

Каландия А.И. 453
Кампе де Ферье Ж. 462
Карлеман Т. 462, 468
Качмаж С. 47
Кашин Б.С. 456
Келдыш М.В. 456
Колмогоров А.Н. 446
Коноплев В.П. 79
Коорнвиндер Т. 452, 463, 464
Кораус Дж. 280
Коркин А.Н. 108
Коровкин П.П. 456
Корнейчук Н.П. 424
Кравцов В.В. 6
Кравчук М.Ф. 453
Крейн М.Г. 274
Кролл Г. 463, 464
Кролл Х. 461
Крылов В.И. 314, 326
Кудрявцев Л.Д. 456

Лаврентьев М.А. 456
Лагерр Э. 458
Лагранж Ж. 458
Лаплас П. 458

Ларіончиков Р.С. 452
Лащенов К.В. 79
Лебедев Н.А. 274
Левин Б.Р. 454
Лежандр А. 458
Лиувилль Ж. 134, 460
Локуциевский О.В. 6, 326

Майкснер Дж. 453
Марков А.А. 80, 307, 440, 461
Мергелян С.Н. 456
Микеладзе Ш.Е. 453
Минкевич Б.М. 360
Муккенхоупт В. 193, 230
Мысовских И.П. 463

Натансон Г.И. 261
Натансон И.П. 9, 446
Неваи Р. 457
Никишин Е.М. 468
Никифоров А.Ф. 453
Никольский С.М. 429, 456

Орлов Г. 459, 462
Осиленкер Б.П. 462

Паркер И. 457
Пашковский С. 115
Поллачек Ф. 453
Поссе К.А. 307, 458

Рахман М. 468
Рахманов Е.А. 294, 461
Родриг Б. 458
Русев П.К. 267

Свешников А.Г. 6
Сегё Г. 230, 274, 286, 451, 461, 462
Смирнов В.И. 274
Соколов В.Г. 360
Солодовников В.В. 360
Сонин Н.Я. 131, 449, 458, 461
Сорокин В.Н. 468
Сохоцкий Ю.В. 458
Старинец В.В. 447
Стеклов В.А. 134, 460, 462
Стечкин С.Б. 456
Стилтьес Т. 132, 307, 461
Суслов С.К. 453

Тиман А.Ф. 429, 430
Тихомиров В.М. 456
Трикоми Ф. 461

Уваров В.Б. 453
Ульянов П.Л. 456
Уолш Дж.Л. 117
Уэбстер М. 461

Фабер Г. 305
Фадеев Н.П. 80
Фокс Л. 457
Фройд Г. 294, 462

Хаиров Р.А. 474
Хан В. 453, 461
Хилле Е. 467

Чебышев П.Л. 92, 293, 404, 410, 458, 459
Чихара Т.С. 457

Шарлье С. 453
Шеффер И. 463, 464
Шишкин А.Д. 464
Шохат Я.А. 462
Штейнгауз Т. 47

Энгелис Г.К. 457, 463
Эрмит Ш. 458, 461, 462

Якоби К. 458, 460
Яковлев В.П. 360

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы 310
Альтернанс чебышевский 413
Антенны интегральное уравнение 338
Асимптотическая формула Лапласа 134
— — Стилтьеса 142

Вес дифференциальный 19, 44
— интегральный 19, 44
— тригонометрический 282
Весовая сходимость рядов Фурье–Якоби 261
Весовая функция 15
Весовое неравенство для многочленов Лежандра 132
— — — — Чебышева–Лагерра 219
— — — — Чебышева–Эрмита 184
— — — — Якоби 256
Взаимное разделение нулей ортогональных многочленов 29

Грама определитель 24
Гегенбауэра многочлены 22, 262

Дифференциально-возвратные уравнения 80

Задача фазового синтеза 339

Интегральное представление многочленов Лежандра 128
— — — Чебышева–Лагерра 206
— — — Чебышева–Эрмита 172
Интервал ортогональности 15
Интерполяционная функция Лебега 302
Интерполяционное неравенство Лебега 302

Канонический эллипс для сегмента 98
Каноническая область для сегмента 98
Квадратуры интерполяционного типа 307
— интерполяционно-ортогонального типа 307
— типа Гаусса 307
Классические ортогональные многочлены 21, 56
Критерий ортогональности второй 29
— — первый 20

Лагранжа многочлены интерполяционные 298
— — фундаментальные 298
Лежандра многочлены 21, 120
— — обобщенные 283
— — ортонормированные 122
— — смещенные 324
— — стандартизованные 120
Липшица условие 37, 40, 401

Максимальная сходимость рядов Фурье–Чебышева 117
Метод Лиувилля–Стеклова 134, 177, 210, 249
Многочлены Аппеля 396
— Бернштейна 440
— Гегенбауэра 22, 262
— наилучшего равномерного приближения 40, 406
— ультрасферические 22, 262
— Фабера 117

— Чебышева для равноотстоящих точек 293
— Эрмита 397
Модуль непрерывности 400

Наилучшее квадратическое приближение функции 35
— равномерное приближение функции 32, 405
— тригонометрическое приближение 408
Наименьшее уклонение 405
Неравенство Бернштейна 439
— Бесселя 34
— Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам 39
— — — — Фурье–Чебышева 97
Нули весовой функции 16
— многочленов Чебышева первого рода 83
— ортогональных многочленов 27

Обратные теоремы о порядке наилучшего приближения 424
Ортогональность производных классических ортогональных многочленов 74
Ортогональные многочлены 15
— — на окружности 269
— — по дискретному множеству 286
— — с единичным старшим коэффициентом 16
Ортонормированные многочлены 15
Особые точки весовой функции 16

Пирсона уравнение 52
— распределения 357
Постоянные Лебега 41
— — интерполяционные 302
Поточечные оценки приближения функций 429
Принцип локализации условий сходимости 38
Присоединенные функции Лежандра 362
Производящая функция 69
— — для многочленов Чебышева–Лагерра 199
— — — — Чебышева–Эрмита 167
— — — — Якоби 239
Прямые теоремы о порядке наилучшего приближения 424

Радиотехнические фильтры Чебышева 329
Регулярные точки весовой функции 16
Рекуррентная формула для ортогональных многочленов 22
Родрига формула для многочленов Лежандра 120
— — — — Чебышева–Лагерра 196
— — — — Чебышева–Эрмита 165
— — — — Якоби 232
— — обобщенная 60
Ряды Грама–Шарлье 359
Ряды Лапласа 369
— Фурье по многочленам Лежандра 193
— — — — Чебышева–Лагерра 220
— — — — Чебышева–Эрмита 184
— — — — Якоби 257
— — — ортогональным многочленам 32
— — — основным сферическим функциям 367
— — — шаровым функциям Лапласа 367

Сегмент ортогональности 15
Сингулярный интеграл Джексона 416
Стандартизация классических ортогональных многочленов 66
Стандартизованные многочлены Лежандра 120
— — Чебышева–Лагерра 196
— — Чебышева–Эрмита 165
— — Якоби 232
Степенные моменты весовой функции 15
Сферические функции 366
Сходимость равномерная внутри области 99

Теорема Бернштейна 439
— Вейерштрасса 35, 404
— Джексона 420, 424
— Маркова 440

— Кораусa 278
— о равносходимости рядов Фурье–Лежандра 150
— Сонина 132
— Стилтьеса–Бернштейна 132
— Чебышева 410
Точка максимального уклонения второго рода 410
— — — первого рода 410
Тригонометрические полиномы наилучшего приближения 408, 415

Узлы интерполяции 299
Уравнение в дискретных свертках 351
— Пирсона 52
Условие Дини 96, 403, 493
— Дини–Липшица 40, 403
— Липшица 40, 401
— Сегё 445

Факториальные многочлены 290
Фильтр Чебышева 329
Фильтры радиотехнические 329
Формула Дирихле–Мелера 131
Формула дифференцирования многочленов Чебышева–Лагерра 204
— — — Чебышева–Эрмита 173
— — — Якоби 244
— Кристоффеля 283
— Кристоффеля–Дарбу 22, 24
— Лапласа для многочленов Лежандра 128
— Сегё 274
— Стилтьеса 142
Функции Бесселя второго рода 212
— — первого рода 105, 211
— второго рода 49, 446
— второго рода для многочленов Лежандра 163
— — — — — Якоби 49, 265
— Лебега для рядов Фурье по ортогональным многочленам 41
— — интерполяционные 303

Чебышева многочлены второго рода 21, 106
— — для равноотстоящих точек 293
— — первого рода 21, 82
Чебышева–Лагерра многочлены 22, 196
— — обобщенные 53
— — ортонормированные 198
— — стандартизованные 196
Чебышева–Эрмита многочлены 22, 165
— — обобщенные 53
— — ортонормированные 166
— — стандартизованные 165
Чебышевская норма 405
Чебышевское уклонение 39, 405

Шаровые функции Лапласа 368

Экстремальная задача Чебышева 92
Экстремальное свойство многочленов Чебышева второго рода 110
Экстремальные свойства многочленов Чебышева первого рода 93
— — ортогональных многочленов 29

Якоби многочлены 21, 232
— — обобщенные 54, 283
— — ортонормированные 236
— — стандартизованные 232

Учебное издание

СУЕТИН Павел Кондратьевич

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Компьютерный набор *Р.С. Ларионччикова*
Компьютерная верстка *Д.В. Горбачева*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 28.08.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 33. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15